A tutto cerchio!

Paola Gallopin *

Premessa

Insegno in una delle due sezioni sperimentali PNI[1] del Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste da diversi anni e ho già partecipato per due volte a "La matematica dei ragazzi": non mi dilungherò pertanto sul perché ritenga questa un'ottima occasione per i miei studenti per apprendere la matematica, e non solo, e rimando per queste considerazioni a Gallopin (2004a, 2004b).

La classe con cui ho lavorato per l'edizione del 2006 è una classe seconda, composta da 3 ragazze e 19 ragazzi, di cui uno portatore di handicap: per questo motivo ha collaborato per tutta la durata del progetto l'educatrice Maurizia Moro che, assieme alle insegnanti di sostegno, segue il percorso scolastico di tale studente. Per problemi di tempo, la preparazione del laboratorio è avvenuta totalmente in orario extracurricolare e, sebbene ciò sia molto faticoso per gli studenti, è l'unica possibilità che ho.

Vorrei invece soffermarmi sulla scelta dei contenuti. Durante il secondo anno di studi affronto con la classe sia i numeri irrazionali, e dunque i numeri reali, in ambito algebrico, sia lo studio della circonferenza e del cerchio, in ambito geometrico. Risulta abbastanza semplice per gli studenti capire che $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ecc. non sono numeri razionali (la dimostrazione aritmetica, per assurdo, che $\sqrt{2}$ non è razionale non presenta alcuna difficoltà per gli studenti), e quindi la necessità di ampliare il campo razionale Q risulta abbastanza naturale. Anche se intuitivamente gli

studenti non stentano a convincersi che π non sia un numero razionale, la costruzione dei numeri reali non è, però, per niente ovvia. I libri di testo per il biennio del liceo scientifico, sebbene propongano una costruzione del numero reale attraverso coppie di classi contigue, sono spesso poco precisi, e l'approccio risulta di difficile comprensione per la quasi totalità degli studenti. Lo studio della circonferenza e del cerchio e dei poligoni regolari inscritti e circoscritti a esso è materia che si studia nel curriculum: approfondire in maniera puntuale tali tematiche mi sembrava un significativo completamento di quanto solitamente si tratta e un modo altrettanto significativo per introdurre i numeri reali lavorando su classi contigue di razionali, con l'ausilio della geometria.

Obiettivi

Descriverò di seguito gli obiettivi che mi sono proposta, soffermandomi soprattutto su quelli trasversali, che ritengo più caratterizzanti e motivanti il progetto.

Obiettivi di tipo trasversale

– Lavoro di gruppo: durante l'anno scolastico è piuttosto difficile prevedere dei momenti di lavoro collettivo e, se ciò succede, accade solamente durante le lezioni di Informatica, soprattutto perché i computer a disposizione sono in numero inferiore rispetto al numero di studenti. Comunque, in quel caso, gli studenti devono collaborare al fine di produrre un listato in un linguaggio di programmazione, sulla base di quanto spiegato e richiesto dall'insegnante. In questo progetto, invece, i gruppi erano formati da un maggior numero di allievi e, soprattutto, dovevano essere gli studenti stessi a elaborare i contenuti e poi a organizzarli.

– Sviluppare capacità organizzative: proprio perché il percorso degli studenti è stato quasi del tutto autonomo, essi dovevano organizzare non solo i contenuti, ma anche tempi, materiali e percorsi, cercando di sfruttare al meglio le capacità e abilità dei vari componenti il gruppo di lavoro. Nel percorso curricolare ciò non avviene, in quanto il compito organizzativo viene assunto dall'insegnante, che decide la scansione dei contenuti e degli apprendimenti.

– Apprendere collaborando: molto spesso gli studenti di liceo sono abituati a uno studio individuale, con i pro e contro che esso comporta, ed eventualmente a uno scambio di contenuti solo in fase di controllo. Apprendere assieme un argomento nuovo, fin dall'inizio, è un'esperienza nuova: in effetti, il *cooperative learning* li costringe a un'analisi dei contenuti più ampia e profonda, con tempi che non sono più personalizzati, ma collettivi.

– Migliorare le proprie capacità espositive: proprietà di linguaggio e chiarezza espositiva sono obiettivi che mi pongo per tutto il biennio e sono anche oggetto di valutazione finale. Sebbene ci siano degli studenti che hanno buone capacità in tal senso, questa esperienza richiede uno sforzo ben più ampio: non si tratta, infatti, di esporre e organizzare contenuti per se stessi o per l'insegnante, ma di trovare una buona strategia per un pubblico di età diverse e soprattutto di competenze diverse.

– Sviluppare capacità di analisi e di sintesi: l'analisi di un testo e la successiva comprensione e organizzazione dei contenuti sono una delle capacità che cerco di sviluppare fin dalla classe prima. Per gli studenti, il libro di testo troppo spesso si riduce a eserciziario e, per la maggior parte di loro, la lettura dello stesso risulta difficile, se non mediata precedentemente dall'insegnante. Lasciare che i ragazzi studino, collaborando, una tematica non precedentemente spiegata dall'insegnante li costringe a un nuovo approccio alla matematica e soprattutto ai testi di matematica[2]: se ciò avviene in un contesto collaborativo e non in modo individuale, gli studenti lo avvertono come una sfida *da adulti* e non come una necessità contingente rispetto al programma curricolare.

– Accettazione dell'altro: durante il biennio, spesso, nascono nuove amicizie e molte si perdono timidamente. Alcuni studenti, poi, non riescono a socializzare e vivono in un gruppetto molto ristretto, con compagni che hanno i loro stessi problemi: più frequentemente ciò succede agli studenti maschi ancora un po' immaturi, che vengono esclusi dalle compagne, che li considerano troppo infantili, e dai compagni, che ormai si sono fatti *grandi*. Far interagire e collaborare tutti impone a ciascuno studente di accettare l'altro: accade spesso, poi, che nell'altro si trovino qualità insospettate e piacevoli. Quest'esperienza pertanto era un'occasione nuova di riscoperta per il gruppo classe.

Per quel che riguarda i contenuti, gli obiettivi erano i seguenti:

– Comprendere il concetto di rettificazione di una curva e, in particolare, della circonferenza.
– Calcolare in modo approssimato la lunghezza della circonferenza, utilizzando poligoni regolari inscritti e circoscritti.
– Utilizzare un foglio Excel per il calcolo dell'approssimazione numerica di $2\pi r$.
– Calcolare in modo approssimato l'area del cerchio, utilizzando poligoni regolari inscritti e circoscritti.
– Utilizzare un foglio di Excel per il calcolo dell'approssimazione numerica di πr^2.
– Calcolare in modo approssimato p sia come rapporto fra circonferenza e diametro, sia come rapporto fra area e quadrato del raggio.
– Dimostrazione di Archimede dell'equivalenza fra il cerchio e il triangolo rettangolo avente per cateti il raggio e la circonferenza dello stesso cerchio.

– Comprendere che π non è un numero razionale.

Per lo studente portatore di handicap, gli obiettivi erano ovviamente personalizzati, decisi, per quel che concerne quelli trasversali, con la collaborazione dell'educatrice e, per quel che riguarda i contenuti, con l'insegnante di sostegno dell'ambito scientifico, Luisa Giugovaz.

Per quel che concerne gli obiettivi trasversali:

– Socializzare: seppur inserito in maniera ottimale nella classe, lo studente non aveva mai aderito a iniziative collettive che non fossero mediate fortemente dall'educatrice. La preparazione del laboratorio, invece, prevedeva che lo studente si relazionasse in prima persona con i compagni e che il suo agire fosse mediato dai compagni stessi.

– Lavorare in gruppo: lo studente, per tutto il biennio, aveva lavorato in maniera individuale, seguendo percorsi personalizzati all'interno o fuori dalla classe. La preparazione del laboratorio prevedeva, invece, la sua partecipazione attiva ai gruppi di lavoro: egli infatti era incaricato di colorare i cartelloni preparati dagli studenti, lavorando con loro.

– Assumere atteggiamenti appropriati in contesti diversi da quelli usuali: questo obiettivo rientrava ampiamente nel PEI personalizzato dello studente. Poiché lo studente reagisce spesso in maniera poco controllabile a contesti nuovi e diversi dai soliti, in questa esperienza gli era richiesto di lavorare in gruppo in un ambiente molto caotico, cosa che generalmente lo agita molto, ma anche di partecipare alla manifestazione in una scuola diversa dalla sua, visitando i laboratori assieme all'educatrice.

Per quel che riguarda i contenuti:

– Distinguere la circonferenza dal cerchio.
– Rettificare empiricamente la circonferenza e determinare un valore approssimato della lunghezza della circonferenza attraverso la misura della lunghezza del segmento ottenuto dalla rettificazione.

Contenuti

Sebbene la scelta della tematica da studiare e organizzare nel laboratorio sia stata totalmente mia, per la particolarizzazione dei contenuti e per suggerimenti sulle possibilità divulgative degli stessi mi sono state di aiuto le discussioni avvenute nell'ambito del Nucleo di Ricerca Didattica, proprio perché le competenze e le

conoscenze dei partecipanti agli incontri del Nucleo sono molto diversificate e ciò costituisce senz'altro una ricchezza da non sottovalutare.

Il laboratorio "A tutto cerchio" è stato organizzato dagli studenti in tre postazioni: sebbene il percorso prevedesse che venissero visitate tutte e tre nell'ordine naturale, esse sono state concepite in maniera abbastanza indipendente, nel senso che il visitatore veniva messo nelle condizioni di capire i contenuti di ciascuna, in quanto gli studenti relatori fornivano i prerequisiti necessari alla comprensione, qualora il percorso non fosse stato seguito nella sua interezza.

Prima postazione

Nella prima postazione, con l'ausilio di un cartellone esplicativo, veniva innanzitutto spiegato cosa si intende per *rettificazione della circonferenza*, ovvero la determinazione di un segmento di lunghezza pari a essa.

In un secondo momento si spiegava perché la lunghezza della circonferenza è approssimata, rispettivamente per difetto e per eccesso, dal perimetro di poligoni regolari di n lati inscritti e circoscritti ad essa[3]. Si spiegava inoltre che, all'aumentare del numero n di lati di tali poligoni, l'approssimazione diventa migliore e che la differenza fra il perimetro del poligono regolare di n lati circoscritto e il perimetro del poligono regolare di n lati inscritto si può rendere piccola a piacere[4], ottenendo così un *valore approssimato della lunghezza della circonferenza*[5].

Tale valore era stato calcolato utilizzando un foglio di Excel. Assumendo, per semplicità, il raggio della circonferenza unitario e sfruttando le formule che legano il perimetro di un poligono inscritto/circoscritto di $2n$ lati con il perimetro del poligono inscritto/circoscritto di n lati[6], ovvero

$$p_{2n} = \sqrt{p_{2n} \cdot P_{2n}}$$

$$p_{2n} = \frac{2P_n\, p_n}{P_n + p_n}$$

dove:

- p_n è il perimetro del poligono regolare inscritto di n lati
- p_{2n} è il perimetro del poligono regolare inscritto di $2n$ lati
- P_n è il perimetro del poligono regolare circoscritto di n lati
- P_{2n} è il perimetro del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati

erano state prodotte due tabelle, l'una a partire da un poligono regolare di 4 lati e l'altra a partire da un poligono regolare di 6 lati, nelle quali si era ottenuta un'approssimazione numerica della lunghezza della circonferenza, procedendo per approssimazioni inferiori e superiori. In entrambe le tabelle, vi era una colonna che mostrava come la differenza fra il perimetro del poligono di n lati circoscritto e il perimetro del poligono di n lati inscritto tenda a zero, al raddoppiare del

numero dei lati. Durante la fase di laboratorio, gli studenti visitatori dovevano, per prima cosa, valutare empiricamente un'approssimazione della lunghezza della circonferenza. Veniva loro richiesto di rettificare empiricamente la circonferenza di un contenitore cilindrico con l'uso di un nastro e poi di misurare la lunghezza dello stesso in modo da avere una prima approssimazione della lunghezza della circonferenza.

Successivamente, gli studenti illustravano il procedimento di approssimazione descritto nei tabelloni, a diversi livelli di approfondimento a seconda dell'età dei visitatori.

Seconda postazione

Nella seconda postazione si spiegava come un metodo anologo a quello usato per la circonferenza possa essere usato anche per approssimare l'area del cerchio[7].

Utilizzando un foglio di Excel, assumendo il raggio unitario e sfruttando le formule che legano l'area del poligono inscritto/circoscritto di $2n$ lati con l'area del poligono inscritto/circoscritto di n lati[8], ovvero

$$a_{2n} = \sqrt{a_n \cdot A_n}$$

$$A_{2n} = \frac{2 \cdot A_n \cdot a_{2n}}{A_n + a_{2n}}$$

dove:

- a_n è l'area del poligono regolare inscritto di n lati
- a_{2n} è l'area del poligono regolare inscritto di $2n$ lati
- A_n è l'area del poligono regolare circoscritto di n lati
- A_{2n} è l'area del poligono regolare circoscritto di $2n$ lati

erano state prodotte due tabelle, l'una a partire da un poligono regolare di 4 lati e l'altra a partire da un poligono regolare di 6 lati, nelle quali si otteneva un'approssimazione numerica dell'area del cerchio, procedendo per approssimazioni inferiori e superiori. In entrambe le tabelle, una colonna mostrava come la differenza fra l'area del poligono di n lati circoscritto e l'area del poligono di n lati inscritto tenda a zero, al raddoppiare del numero dei lati.

Un ultimo cartellone spiegava come determinare π in due modi diversi: *come rapporto fra la circonferenza e il doppio del raggio oppure come rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del raggio*[9]:

$$\pi = \frac{C'}{2r} = \frac{C''}{r^2}$$

dove C' indica la lunghezza della circonferenza e C'' l'area del cerchio di raggio r.

Durante lo svolgimento della manifestazione, gli studenti visitatori dovevano valutare una migliore approssimazione della lunghezza della circonferenza e dell'area del cerchio rispetto alla prima postazione, utilizzando poligoni regolari: i ragazzi delle elementari e delle medie inferiori usavano un modello di cartoncino con un esagono inscritto e circoscritto (Fig. 1), mentre i ragazzi delle scuole superiori usavano ottagoni. Una scheda guidata, preparata dai ragazzi, conduceva l'ospite passo a passo.

Infine, un'altra scheda guidata permetteva di trovare un valore approssimato di π partendo dalla lunghezza della circonferenza o dall'area del cerchio.

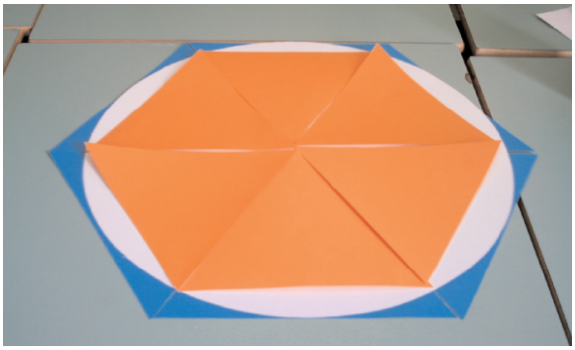

Figura 1

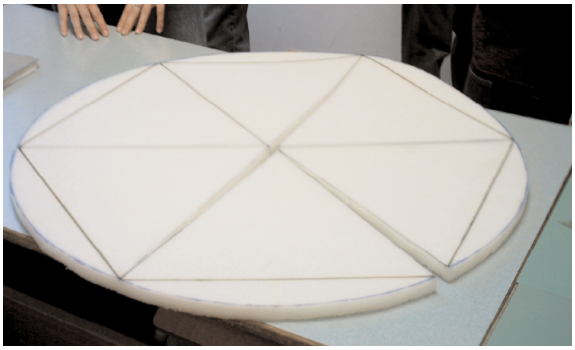

Figura 2

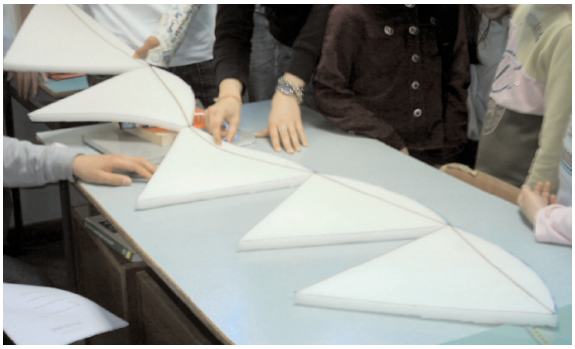

Figura 3

Terza postazione

Nella terza e ultima postazione, dopo una breve panoramica sulla vita e le opere di Archimede, si spiegava al visitatore l'equivalenza fra il cerchio e un opportuno triangolo, dimostrata da Archimede stesso. Si proponeva, però, una spiegazione intuitiva, diversa dalla dimostrazione di Archimede.

Nuovamente, si ragionava con poligoni regolari, questa volta scomposti in triangoli aventi la stessa base (un lato del poligono) e la stessa altezza. Si spiegava che l'area dei poligoni, somma delle aree dei triangoli in cui erano scomposti, approssima l'area del cerchio con un errore che si riduce all'aumentare dei lati. Si mostrava che tali triangoli sono equivalenti a un triangolo che ha per base la somma delle loro basi e che ha la stessa altezza.

Da ciò si poteva intuire che *l'area di un cerchio è equivalente a quella di un triangolo avente per base la circonferenza rettificata e per altezza il raggio del cerchio*[10].

Per l'esemplificazione concettuale si utilizzava un modello di gommapiuma, come nelle Fig. 2 e Fig. 3.

Conclusione

Le considerazioni che seguono tengono conto delle:

– osservazioni dirette fatte dall'insegnante durante la fase di preparazione del laboratorio, durante e dopo la manifestazione;
– risposte al questionario[11] proposto dopo la manifestazione a tutti gli studenti partecipanti all'edizione 2006 di "La matematica dei ragazzi";
– considerazioni libere e spontanee sul progetto richieste dall'insegnante agli allievi dopo la manifestazione.

Per quanto riguarda la fase di preparazione del laboratorio, iniziata a ottobre e conclusasi a fine marzo, va detto che gli studenti sono stati piuttosto dispersivi e mal organizzati: ciò probabilmente è dovuto al fatto che essi non sono abituati a lavorare in questo modo e, sebbene fosse stato spiegato loro quello che avrebbero dovuto fare e come si sarebbe svolta la manifestazione, non erano in grado di lavorare autonomamente in maniera efficace. Essi stessi hanno poi osservato che "*il tempo necessario all'organizzazione e realizzazione del progetto si è prolungato parecchio in quanto a volte si era svogliati e lo si impiegava malamente*". Solo quando si è trattato di realizzare i cartelloni, i materiali per le attività di laboratorio e stabilire i percorsi, qualche studente, con migliori capacità organizzative, ha preso in mano la situazione e il gruppo ha iniziato a lavorare in maniera efficace. Lo studente portatore di handicap ha contribuito colorando i cartelloni che gli altri studenti preparavano.

Durante la manifestazione, invece, tutti hanno contribuito in maniera attiva e, in particolare, uno studente, i cui risultati in matematica sono pessimi, si è dimo-

strato piuttosto abile nel coinvolgere i visitatori delle scuole elementari. Sono anche emerse abilità dei singoli, che nel contesto classe non erano state messe in luce: osserva uno studente che "*le giornate di manifestazione hanno messo in risalto le doti e la scioltezza nel parlare di alcune persone, me compreso, altrimenti nascoste a scuola*", e ciò sicuramente ha gratificato in qualche modo queste persone.

Al rientro a scuola, dopo le giornate della manifestazione, abbiamo discusso apertamente dell'esperienza: ritornare, però, nell'ambiente della classe ha purtroppo riproposto gli schemi usuali di partecipazione al dialogo. Chi si è espresso liberamente ha ritenuto l'esperienza utile, interessante, da ripetere, ma molto faticosa perché lo studio e la rielaborazione dei contenuti, senza una spiegazione a priori dell'insegnante, sono molto difficili. La quasi totalità degli studenti che non ha risultati soddisfacenti in matematica ritiene, però, che studiare in questo modo sia molto più divertente e "facile" perché "*se non si capisce qualcosa si può chiedere a qualche compagno più bravo che ti spieghi …*", e ciò conferma un certo individualismo che caratterizza, secondo il Consiglio di classe, una buona parte della classe.

Tutti sono stati concordi nel ritenere che studiare un argomento con l'obiettivo di spiegarlo poi a qualcuno che non lo conosce è notevolmente più faticoso che "*studiarlo per sé o per la prof.*". Ciò conferma il fatto che in studenti così giovani è piuttosto raro che qualcuno intenda lo studio come un arricchimento personale. A parte rarissimi casi, si studia per affrontare una verifica o un'interrogazione e quel *per sé* sottintende che si studia per poi affrontare il momento di verifica scritta o orale in modo che il voto finale sia soddisfacente *per sé*.

È anche molto difficile spiegare agli altri, specie se l'uditorio non è interessato e motivato: tutti hanno tratto maggior soddisfazione nell'interagire con i bambini delle scuole elementari. Addirittura uno studente, a posteriori, afferma in maniera assolutamente categorica che "*coloro che vengono ad ascoltare non devono venire se non sono interessati all'argomento*". In ogni caso, ripetere le stesse cose più volte durante la mattinata cercando di mantenere vivo l'interesse richiede un grosso sforzo al quale gli studenti hanno ammesso di non essere abituati.

L'esperienza, inoltre, consente agli studenti un primo momento di autoverifica, sia durante la fase conclusiva di preparazione del laboratorio, sia, in modo più sentito, durante la manifestazione stessa. L'analisi a posteriori di un buon gruppetto di studenti relativamente alle giornate della manifestazione è stata indirizzata soprattutto all'efficacia o meno della loro spiegazione alla luce del *feedback* ricevuto dagli studenti visitatori. Non sono stati pochi coloro che si sono accorti di non essere sempre riusciti a esprimersi in modo chiaro e fluido e per quasi la metà di essi ciò è stato dovuto a una comprensione non sempre così puntuale degli argomenti trattati: "*Fino a quando dovevo spiegare ai compagni, l'argomento che mi competeva mi sembrava chiaro, ma quando mi sono trovato a spiegare ai bambini delle elementari mi sembrava di non avere più le idee così chiare …*".

Una prima verifica dei contenuti è stata fatta a breve termine dopo la manifestazione, in ambito curricolare, e gli esiti non sono stati molto difformi rispetto alle dinamiche proprie della classe. Va notato, però, che gli studenti con più diffi-

coltà in matematica sono riusciti a meglio organizzare le loro conoscenze e inquadrare le problematiche relative alla circonferenza e all'area del cerchio proposte loro in sede di verifica; la poca padronanza degli strumenti matematici del biennio non ha permesso loro di concludere, ma ritengo che ciò sia un problema che "La matematica dei ragazzi" non ha assolutamente lo scopo di risolvere.

Posso affermare che il gruppo classe è ora divenuto più collaborativo e spesso ricorre alle abilità del singolo anche per obiettivi non strettamente legati alle attività curricolari. Anche la comunicazione è migliorata: alcuni colleghi mi hanno riferito di uno sforzo sensibile da parte dei più per esporre i contenuti in maniera chiara e significativa, sforzo che anch'io ho notato sia nelle prove orali che in quelle scritte.

Ritengo infine che l'esperienza sia stata molto positiva perché ha modificato in meglio l'approccio ai contenuti di carattere matematico e non solo, e anche perché ha creato in classe un clima meno orientato al singolo e più alla collettività.

NOTE

* Liceo Scientifico Statale
"G. Galilei", via Mameli, 4,
I-34100 Trieste
e-mail: pao.ga@libero.it

1 Piano Nazionale Informatica.

2 I testi che sono stati sottoposti allo studio degli studenti sono stati di diverso tipo: libri di testo procurati dall'insegnante, testi di matematica reperiti presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università degli Studi di Trieste e suggeriti nell'ambito delle riunioni del Nucleo di Ricerca Didattica, e testi trovati utilizzando Internet.

3 Durante la preparazione del laboratorio si è dimostrato che la circonferenza rettificata è maggiore del perimetro di ogni poligono regolare inscritto e minore del perimetro di ciascun poligono regolare inscritto, applicando il seguente postulato di Archimede: *il segmento che rettifica un arco AB di circonferenza (minore di una semicirconferenza) è maggiore della corda AB che lo sottende e minore della somma dei due segmenti di tangenza condotti per gli estremi A e B dell'arco*.

4 Infatti, prefissato arbitrariamente un segmento, è possibile determinare due poligoni regolari, l'uno circoscritto e l'altro inscritto a una circonferenza, tali che la differenza dei loro perimetri sia minore del segmento dato.

5 Le classi costituite dai perimetri dei poligoni regolari considerati sono classi contigue e la circonferenza rettificata è il loro (unico) elemento di separazione.

6 Queste formule sono state ottenute durante la fase di laboratorio, con l'aiuto dell'insegnante, perché nei mesi di preparazione del laboratorio non si era studiato ancora il Teorema della bisettrice, necessario a tale scopo. La dimostrazione comunque non è stata proposta agli studenti visitatori.

7 Si era dimostrato che ogni poligono regolare inscritto in un cerchio è contenuto nel cerchio, mentre ogni cerchio è contenuto in ciascun poligono regolare circoscritto a esso; poi, che fissato a piacere un poligono di data area, è sempre possibile trovare due poligoni regolari, l'uno circoscritto e l'altro inscritto al cerchio, tali che la differenza delle loro aree sia minore dell'area del poligono prefissato. Le classi delle aree dei poligoni regolari considerate sono classi contigue e l'area del cerchio è il loro (unico) elemento di separazione.

8 Le formule sono state ottenute durante la fase di laboratorio. La dimostrazione non è stata proposta agli studenti visitatori.

9 Durante la fase di preparazione del laboratorio si era dimostrato sia che due circonferenze stanno fra loro come i rispettivi raggi, sia che due cerchi stanno fra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi raggi.

10 La dimostrazione è stata studiata nella fase di preparazione, ma non è stata proposta in maniera rigorosa durante il laboratorio.

11 Sui risultati dei questionari si rimanda al lavoro di Zuccheri e Zudini riportato nella III parte di questo volume.

Boyer C.B., 1968, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano.

Burton D.M., 1985, *The History of Mathematics: an Introduction*, Wm.C. Brown, Dubuque.

Cateni L., Fortini R., Bernardi C., 2002, *Il nuovo pensiero geometrico*, Le Monnier, Firenze.

Delahaye J.P., 1997, *L'affascinante numero p*, Ghisetti & Corvi, Milano.

FraJese A. (a cura di), 1974, *Opere di Archimede*, UTET, Torino.

Gallopin P., 2004a, "Matematica tra i fiumi", in Zuccheri L., Gallopin P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 165-182.

Gallopin P., 2004b, "Un progetto matematico realizzato in un ambiente non formale: l'apprendimento come evento sociale", in Zuccheri L., Gallopin P. (a cura di), 2004, *La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002*, EUT, Trieste, pp. 207-221.

Kline M., 1972, *Storia del pensiero matematico*, vol. I, Einaudi, Torino.