

Geometria con piegature della carta. Prima parte

MARINA ROCCO*

Nucleo di Ricerca Didattica
Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Università di Trieste
marina.rocco1@tin.it

ABSTRACT

This text is the result of a workshop entitled “Geometry explained through folding paper: geometric constructions, in particular with triangles and quadrilaterals”, that was organised by the author within the activities to encourage continuing education promoted by CIRD in 2010. It illustrates how concrete activities can be useful to explain some abstract concepts of Euclidean geometry to secondary school students. The aim of this essay is to provide an example of an educational pathways in order to make students familiar with some geometric constructions, some of which proved ineffective, despite their correctness. In order to do this, only some geometric shapes suitable for educational purposes were considered, specifically those whose properties can speed up the educational process.

PAROLE CHIAVE

SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO / SECONDARY SCHOOL (11-14 YEARS); DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; LABORATORIO DI MATEMATICA / MATHEMATICS LABORATORY; GEOMETRIA / GEOMETRY; COSTRUZIONI GEOMETRICHE / GEOMETRIC CONSTRUCTIONS; PIEGATURA DELLA CARTA / PAPER FOLDING.

1. INTRODUZIONE

Alla fine degli anni '70 mi accorgevo che nella Scuola secondaria di primo grado molte circostanze occasionali (una nevicata, l'ultimo giorno di Carnevale, ... o anche eventi assai meno eclatanti) riuscivano ad azzerare la concentrazione e l'attenzione dei miei alunni; il ricorso all'autorità non sempre bastava a ricondurli alla lezione. Per caso o per frustrazione, c'è stata una volta in cui ho cominciato a costruire un “uccellino che batte le ali” (modello classico di *origami* che conoscevo fin da piccola). I

* Docente del PAS e del TFA A059 dell'Università di Trieste.

ragazzi non avevano più la mia attenzione e avevano un solo modo per riconquistarla: prestare attenzione a quanto di insolito stavo facendo!

La situazione scatenante è ovviamente ricorrente nella usuale attività didattica, così come le fasi immediatamente successive: l'insegnante si isola, in questo caso, nella realizzazione del modello che ha scelto, quindi i ragazzi vogliono replicare quanto sta facendo. Se ci fermiamo qui, lezione persa! Ma se, quando tutti dispongono di un modello accettabile, magari realizzato in cooperazione, si chiede di riaprire il foglio (cfr. Figura 1), la situazione può avere una svolta positiva.

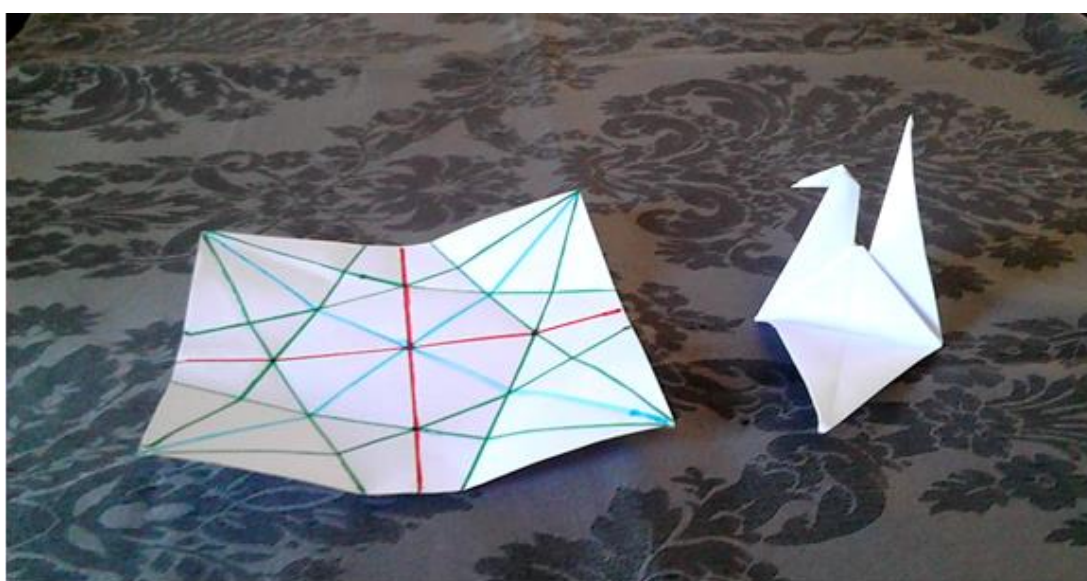


Figura 1. Il modello Origami dell'“uccellino che batte le ali”, anche aperto.

A partire da attività occasionali di realizzazione di modelli *origami*, con successiva osservazione del “modello aperto” dal punto di vista geometrico, ho abituato gli alunni al riconoscimento e alla descrizione di poligoni, simmetrie e così via... e un po' alla volta si è sviluppato il percorso didattico che si espone in questo articolo. Nei contenuti affrontati non è molto diverso da quanto si potrebbe fare con riga e compasso, strumenti non sempre a disposizione di tutti gli alunni.

Tale percorso didattico prevede lo svolgimento di attività concrete utili a motivare i concetti (astratti) di geometria euclidea proposti agli alunni della scuola secondaria di primo grado.

Prima di iniziare a descriverlo, faccio notare ai lettori che si trovano numerosi articoli, anche online, che nel titolo citano unitamente geometria e *origami*¹.

Vorrei precisare che, mentre ogni costruzione di *origami* coinvolge molta geometria, non tutte le volte che si piega della carta si fa *origami*, poiché questo prevede delle regole ben precise, che qui non tratteremo².

Dal punto di vista geometrico, però, *piegare carta* vuol dire usare una “riga” e un “compasso” *un po’ particolari*³. Ne deriva che le costruzioni proposte fanno riflettere sulle proprietà delle figure da realizzare.

Questo è l’obiettivo che perseguivo con i miei alunni di scuola secondaria di primo grado, nonché l’obiettivo principale del laboratorio di formazione “*Geometria con piegature della carta: costruzioni geometriche, in particolare di triangoli e quadrilateri*” tenutosi nell’ambito delle attività di formazione permanente promosse dal CIRD nel 2010, nel quale si proponeva l’esemplificazione di alcune costruzioni geometriche, mostrando fondamentalmente “come si fa”.

Le attività più soddisfacenti tra quelle usualmente proposte ai miei ragazzi erano proprio quelle che, attraverso un *sapere come si fa* (manipolazione di oggetti concreti) fornivano soluzioni a problemi capaci di creare un *conflitto cognitivo*. I problemi e le loro soluzioni trovavano, in seguito, la giusta collocazione nel *curriculum* che andavo delineando per i miei alunni.

2. MATERIALI

Un percorso didattico che si serva di piegature della carta necessita dei seguenti materiali:

- fogli di carta bianca;

¹ Cfr. ad es. BASCETTA 1998a, 1998b, il cui autore riporta anche un parallelo tra gli assiomi euclidei e gli assiomi della geometria con la piegatura della carta. Per una panoramica si veda il sito web “Matematica e... Origami”: <https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argomento/Matematicae/Giugno_06/origami.htm>.

² Per ulteriori informazioni sull’origami e sulla sua utilità didattica si rimanda, ad esempio, al sito web del Centro Diffusione Origami: <<http://www.origami-cdo.it>>.

³ La piegatura della carta, usata come strumento al posto della riga e del compasso classici, dà ulteriori possibilità di costruzione geometrica e viene formalizzata con un sistema di assiomi dovuto a B. Scimemi, H. Huzita e K. Hatori.

- pennarelli colorati, sia a punta grossa sia a punta fine;
- evidenziatori di colori diversi.

Per la carta sono possibili più scelte:

- carta per stampanti o fotocopiatrici, da 80 g/m^2 , formato A4: va bene per i più piccoli o per i meno abili, che rischiano di strappare altri tipi di carta;
- carta da 60 g/m^2 , formato A4 (si trova anche in blocco per note): si lavora con più precisione e si facilitano i passaggi in cui un punto, una retta o altre figure debbano essere visti in trasparenza sulle due facce del foglio;
- modulo continuo per stampanti (ormai quasi ovunque in disuso): spesso ancora più leggero del tipo di carta precedente, ne conserva i vantaggi e si potrebbe avere a costo zero se lo si trova inutilizzato in qualche ufficio;
- carta da forno: per lavori di precisione.

A prescindere dalla grammatura, è essenziale che la carta non abbia tracce di struttura: non a righe né a quadretti, ma bianca e informe. Inoltre, almeno nelle prime lezioni, ogni foglio va preparato strappandone il bordo per ricavare un ritaglio (il più grande possibile) che non ricordi più il rettangolo da cui è stato ottenuto.

Pennarelli ed evidenziatori possono far parte dei beni condivisi dalla classe; se si lavora con carta da forno, bisogna utilizzare, al loro posto, matite di vari colori.

3. PIANO E RETTE

Il foglio (preparato strappandone i margini, come descritto in precedenza) è un modello di *piano*, buono come qualunque modello concreto di un ente ideale. Certamente il foglio può curvarsi nello spazio: allora bisogna imporre che, almeno in certi momenti, sia “giacente” su un altro modello di piano altrettanto buono, ma meno deformabile, come il piano di un banco.

La preparazione del foglio strappandone il bordo ha un duplice scopo, uno dei quali, già citato, è la necessità di eliminare la struttura relativa alla sua forma; l'altro è quello di raffinare l'immagine mentale del piano geometrico euclideo, con il suggerimento

che, eseguendo diversamente gli strappi, il foglio potrebbe essere più grande, ancora più grande, ... infinito!



Figura 2. Pieghiamo il foglio...

Pieghiamo il foglio (cfr. Figura 2): se la piega è stata eseguita *correttamente* (si vedano le etimologie di *giusto*, *retto*, *dritto*, *diritto* e la possibilità, almeno in certe locuzioni, di considerarli sinonimi), essa è un buon modello di *retta*, con limiti e potenzialità pari a quelle del nostro modello di piano.

Possiamo assumere che *nel piano esistono infinite rette* (cfr. Figura 3), poiché, oltre a quella già eseguita, se ne possono realizzare quante altre si vuole.

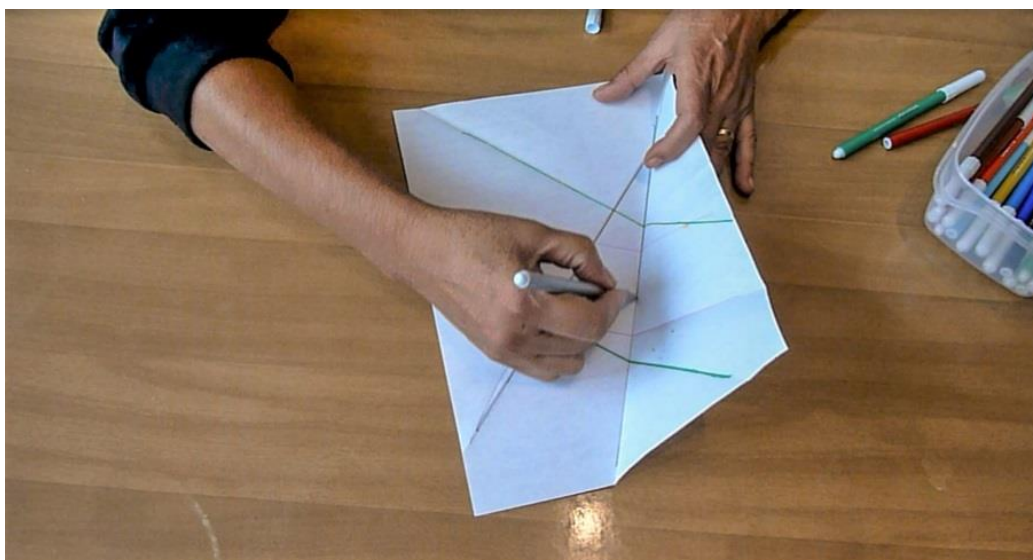


Figura 3. *Nel piano esistono infinite rette*. Alcune possiamo evidenziarle...

La “nostra riga”

L'azione dell'eseguire una piega **correttamente** sostituisce la riga; però, se dobbiamo eseguire una costruzione geometrica, non basta appoggiare gli strumenti dove occorre; vogliamo anche tenere traccia delle posizioni di volta in volta occupate. Il segno che la piega lascia nel foglio è di per sé la traccia in questione, ma potremmo avere bisogno di metterla in risalto: si può allora passare un pennarello sulla traccia della piega con i due lembi del foglio tenuti parzialmente aperti (cfr. Figura 3).

Rette incidenti e punti; semirette

Procedendo come prima indicato, eseguiamo una piega e, dopo aver riaperto il foglio, facciamone un'altra. Abbiamo, quindi, due rette evidenziate nel nostro piano e può capitare di vedere che esse si tagliano a vicenda entro lo spazio concreto del nostro pezzo di carta: diremo allora che le *rette* sono *incidenti* e che hanno in comune un oggetto cui diamo il nome di *punto* (cfr. Figura 4).

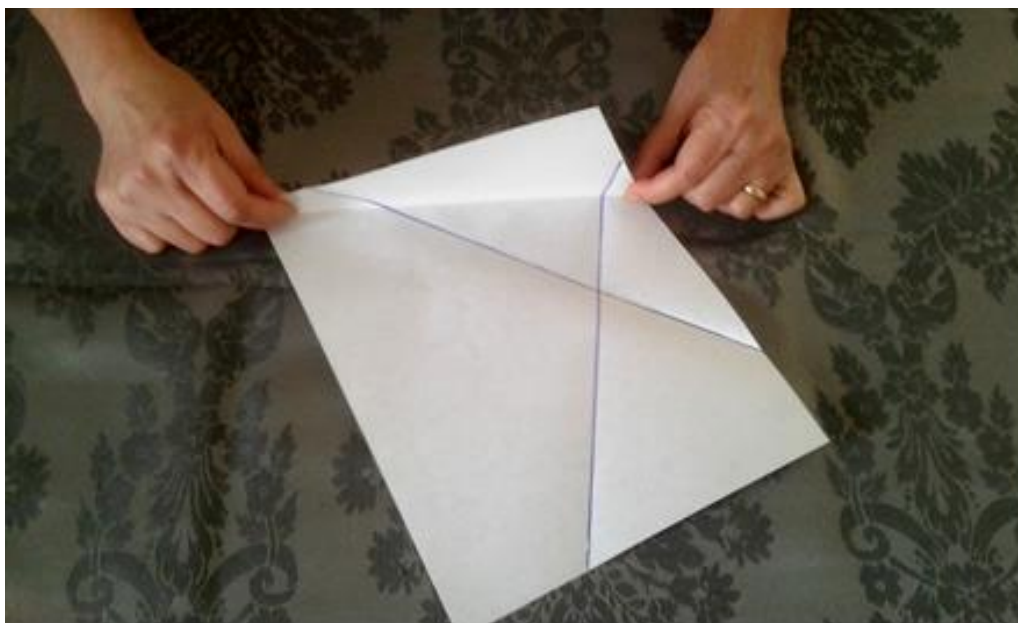


Figura 4. Rette incidenti.

Poiché avremmo potuto scegliere la seconda retta in “molti” altri modi, alla prima appartengono altrettanti punti. Con altre pieghe possiamo vedere che lo stesso capita alla seconda retta, e così via (cfr. Figura 5), fino a ipotizzare che: *a una retta*

appartengono infiniti punti; per ogni retta esistono punti del piano che non le appartengono; nel piano esistono infiniti punti.

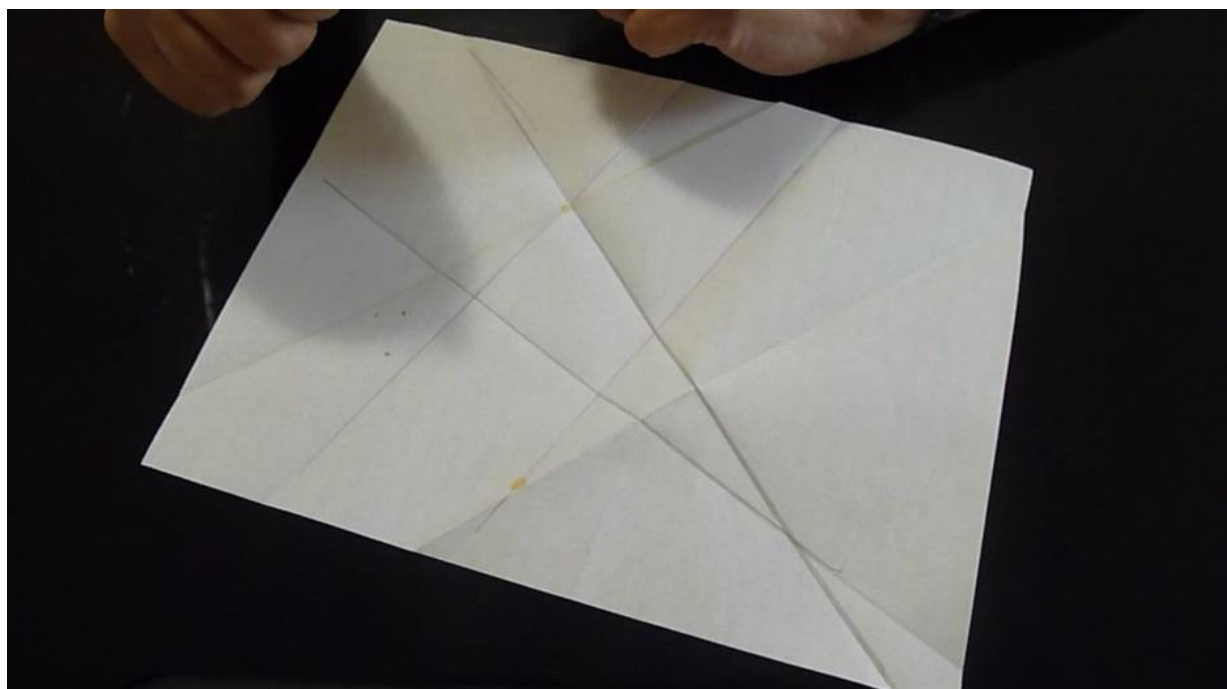


Figura 5. Con altre pieghe possiamo vedere che...

E se non si vede che le rette si tagliano dentro al foglio? Per ora diciamo che, forse, se il foglio fosse stato strappato in un altro modo e quindi fosse stato più grande, avremmo visto l'intersezione, ma non possiamo ovviamente esserne sicuri.

Osserviamo infine che ogni punto individuato su una retta la divide in due parti, ciascuna delle quali viene detta *semiretta*.

Semipiani e angoli

Una retta divide il piano in due parti, ciascuna delle quali si dice *semipiano*; due rette che si intersecano dividono il piano in quattro parti, ciascuna delle quali rappresenta una *regione angolare*. Generalmente, nella scuola secondaria di primo grado il concetto di angolo viene presentato a partire da questa osservazione, per cui diremo anche che due rette che si intersecano formano quattro *angoli*. Le semirette che delimitano un angolo sono dette *lati* e il loro punto di intersezione *vertice* dell'angolo.

La piegatura della carta ci permette di convincere gli allievi del fatto che gli *angoli*

opposti al vertice sono congruenti⁴, seguendo una procedura che ricalca la dimostrazione geometrica di questa proprietà (tralasciando di puntualizzare tutti i presupposti assiomatici, possiamo riassumerla come segue: “siano, in senso orario, α , β , γ , δ i quattro angoli individuati da due rette incidenti; $\alpha + \beta$ e $\alpha + \delta$ sono due semipiani con α in comune, quindi $\beta = \delta$ ”).

La carta piegata consente al docente una gestualità molto efficace dal punto di vista didattico: “tenendo in mano” α , basta nascondere alternativamente i semipiani che contengono γ usando l'altra mano. La posizione di α è arbitraria: da ciò la congruenza di qualunque coppia di angoli opposti al vertice.

Rette perpendicolari e angoli retti

Disegniamo una retta (= pieghiamo il foglio) e pieghiamo nuovamente *senza riaprire*. Quando apriamo il foglio vediamo che la prima piega corrisponde a una retta e, forse, la seconda piega no; il piano è stato diviso in quattro angoli, che possono essere visti come due coppie di angoli *supplementari* (= la loro somma è pari a un *angolo piatto*, corrispondente a tutto un semipiano), oppure due coppie di angoli congruenti che generalmente non sono opposti al vertice (cfr. Figura 6, caso A).

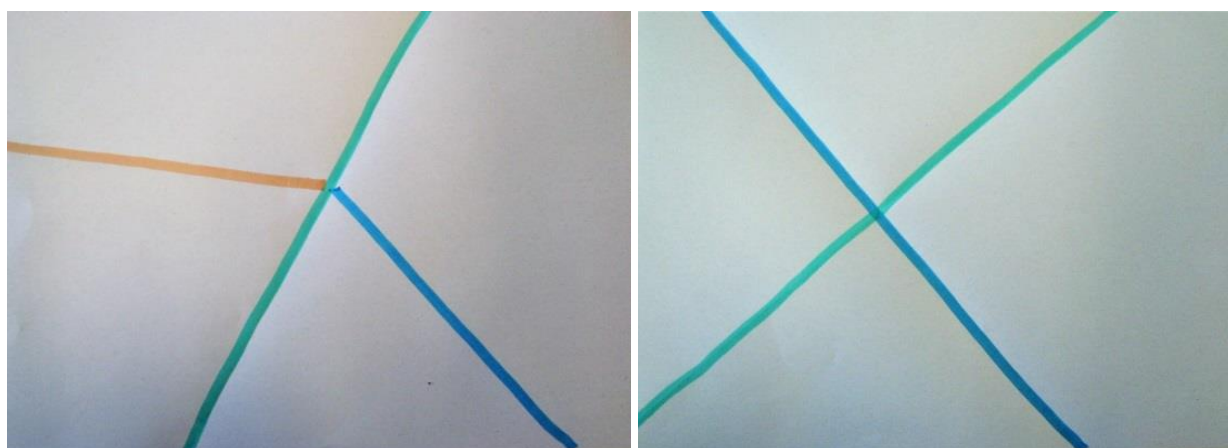


Figura 6. Disegniamo una retta e pieghiamo nuovamente senza riaprire...
(a sinistra: caso A; a destra: caso B).

⁴ Qui lasciamo all'intuizione del lettore, come dell'allievo, il concetto di *congruenza*, esemplificandolo con l'idea di “uguaglianza”, “sovrapponibilità”. Nel caso dell'angolo, specie se presentato a partire dalla regione angolare, questo concetto può creare un po' di disorientamento, se persiste la visione concreta del foglio limitato, a discapito dell'idea di piano (astratto) illimitato.

È possibile eseguire la seconda piega in modo che, aprendo il foglio, si vedano due rette, se si fa in modo che i quattro angoli siano tutti congruenti: allora le rette si dicono *perpendicolari* e gli angoli si dicono *angoli retti* (cfr. Figura 6, caso B).

Costruzione di rette perpendicolari

Eseguiamo una piega e, senza riaprire il foglio, realizziamone un'altra, ponendo attenzione a far combaciare su se stesso il bordo della prima piega (si veda la seconda immagine di Figura 6). Potrebbe darsi che la seconda piega debba passare per un certo punto, appartenente o no alla prima: è solo questione di manualità e di qualche accorgimento (cfr. più avanti *Retta per due punti; segmenti*).

Rette parallele

Ricordiamo che due rette si dicono parallele se giacciono nello stesso piano e non hanno punti in comune (quindi non si incontrano in alcun punto)⁵.

Visto che stiamo considerando di volta in volta solo rette appartenenti allo stesso piano (esemplificate da piegature dello stesso foglio), d'ora in avanti non ricorderemo più la necessità che le rette siano complanari.

Per la costruzione di rette parallele con le piegature della carta, terremo presente che in geometria euclidea vale la seguente proprietà:

Se due rette tagliate da una trasversale formano angoli coniugati interni supplementari, allora queste due rette non si incontrano (quindi sono parallele).

Allora, come caso particolare:

Se una retta, intersecando due altre rette, forma con esse solo angoli retti, allora tali due rette non si incontrano (quindi sono parallele).

Da ciò si ricava un modo per costruire due rette tra loro parallele.

(Naturalmente, due rette sono parallele anche se gli angoli coniugati esterni sono supplementari, o se gli alterni interni sono congruenti, o ...).

⁵ Utilizzeremo qui una nozione di *parallelismo* che, come quella presente negli *Elementi di Euclide*, prende in considerazione solo rette distinte. Per vari motivi, attualmente si preferisce aggiungere alla definizione da noi richiamata: "oppure sono coincidenti". In tal caso seguirà che ogni retta è parallela a se stessa.

Costruzione di rette parallele

Eseguiamo una piega (1) e, senza riaprire il foglio, realizziamone un'altra (2), ponendo attenzione a far combaciare su se stesso il bordo della piega (1). Sappiamo ormai che abbiamo in questo caso due rette perpendicolari; apriamo la piega (2), ma non la (1), ed eseguiamo una nuova piega (3) con la stessa procedura seguita per la (2). Allora (2) e (3) formano solo angoli retti con (1) e sono parallele tra loro.

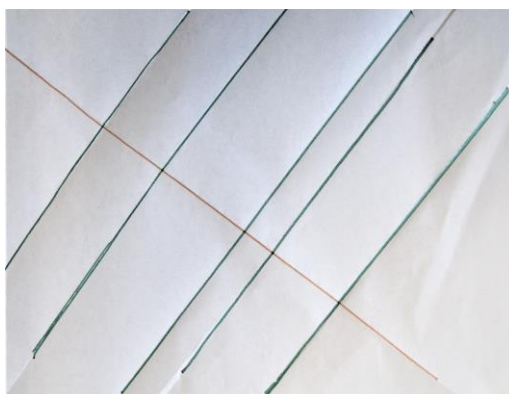


Figura 7. Più rette parallele a una stessa retta.

E se le rette fossero di più?

Continuando con lo stesso foglio, si segni (4) perpendicolare a (1): proseguendo in questo modo, si potrebbero ottenere quante si vuole (cioè “tantissime”) rette tutte parallele a (2) e quindi appartenenti al medesimo *fascio di rette parallele* (cfr. Figura 7). E se, invece, (4) fosse stata perpendicolare a (2)?

Come verificare se due rette tracciate sul foglio sono parallele o no

Quanto ci proponiamo corrisponde a verificare se due rette rappresentate sul foglio sono “incidenti fuori dal foglio”. Infatti, per verificare che non sono incidenti, non basta non vederne l’intersezione sul foglio!

Ricordiamo però che in geometria euclidea si assume vera la seguente proprietà, equivalente al famoso V postulato di Euclide:

Se due rette tagliate da una trasversale formano in uno dei semipiani (da questa individuati) angoli coniugati interni la cui somma è minore di un angolo piatto, allora esse si incontrano in tale semipiano (e quindi non sono parallele).

Quindi, per verificare se due rette sono parallele o no, si può effettuare una piegatura lungo una trasversale alle due rette date e valutare cosa succede “fuori dal foglio” in base alla somma degli angoli coniugati interni.

Il metodo più semplice è quello di tracciare una retta perpendicolare a una delle rette date e controllare con un'altra piegatura se è perpendicolare anche all'altra retta (in tal caso le rette sono parallele) oppure non lo è (in tal caso le rette non sono parallele).

Note

In classe le tracce delle pieghe venivano fatte evidenziare man mano con i pennarelli colorati; dicevo “disegniamo una retta” e non “facciamo una piega”; rette, punti, angoli erano indicati come di consueto, nello stesso colore usato per l'elemento da indicare. Come si può notare in questi ultimi due casi e nelle prossime costruzioni, ho scelto qui, invece, di numerare i vari elementi nell'ordine in cui si eseguono delle pieghe, si trovano dei punti e così via. Questo accorgimento risultava utile soprattutto nelle prove di verifica, poiché permette di controllare la correttezza dei vari passaggi nell'esecuzione.

Retta per due punti; segmenti

Nei paragrafi precedenti non si poneva alle rette da costruire alcuna condizione di passaggio per punti assegnati. Come accennato in *Costruzione di rette perpendicolari*, è solo questione di manualità; per facilitare l'esecuzione di una piega passante per due punti dati (1) e (2), conviene innanzitutto marcare con i pennarelli i punti (1) e (2); quindi si inizia ad abbozzare una piega che passi per entrambi, tenendo le marcature dei punti sulla faccia in vista del foglio. Ogni mano deve stringere la carta tra pollice e indice, inizialmente a circa 1 cm dalla posizione finale della piega e altrettanto vicino rispettivamente ai punti (1) e (2).

Alternando il lavoro di una mano con quello dell'altra, si deve avvicinare la posizione delle dita a quelle dei punti e, quindi, contemporaneamente ci si avvicina

alla posizione voluta della piega. Quando la si raggiunge, bisogna “pizzicare” la carta in corrispondenza di (1) e (2), poi appoggiare il foglio sul tavolo e completare la piega. Un po’ di esperienza renderà più veloce l’esecuzione... La parte della retta così ottenuta che sta tra (1) e (2) esemplifica un *segmento* di retta.

Note

La costruzione, *mutatis mutandis*, si può adattare per ottenere rette perpendicolari a una retta data passanti per un punto dato. Il punto per cui deve passare la seconda retta può appartenere o no alla prima.

Piegare il foglio per trovare la retta per due punti dati è tanto più difficile quanto più essi sono distanti tra loro, e lo sarebbe anche in altre situazioni: si pensi, ad esempio, di dover tracciare un segmento lungo qualche metro nel cortile della scuola; restando nel contesto, si provi a piegare un grande foglio di carta per pacchi.

Se si sceglie di *fare geometria* piegando carta, occorre ricordare che la scelta di punti o di rette iniziali (come anche la dimensione del foglio) può condizionare fortemente il risultato finale, se la figura desiderata non è completamente visibile sul foglio o se tali scelte rendono l’esecuzione (inutilmente) difficile.

4. TRIANGOLI

Su un foglio si eseguano, riaprendolo ogni volta, tre pieghe (1), (2) e (3) (cfr. *Rette incidenti e punti; semirette e Rette parallele*), cercando di operare in modo che nel foglio si vedano i tre punti che derivano dall’intersezione, a due a due, delle rette disegnate. Il piano è stato ripartito in 7 regioni, di cui 3 sono regioni angolari, 3 sono regioni illimitate (delimitate da due semirette e un segmento) e una è una regione limitata, (delimitata da tre segmenti), che si può pensare come intersezione di tre angoli: abbiamo un *triangolo*; i segmenti che lo delimitano sono detti *lati* del triangolo. Possiamo segnare con un pennarello i punti di intersezione, ovvero i *vertici* del triangolo (cfr. Figura 8).

Costruzione di triangoli con vertici assegnati

In questo caso, ciascuna delle rette (1), (2) e (3) deve passare per due dei tre punti assegnati come vertici del triangolo: occorre procedere ogni volta come detto in *Rette per due punti; segmenti*.

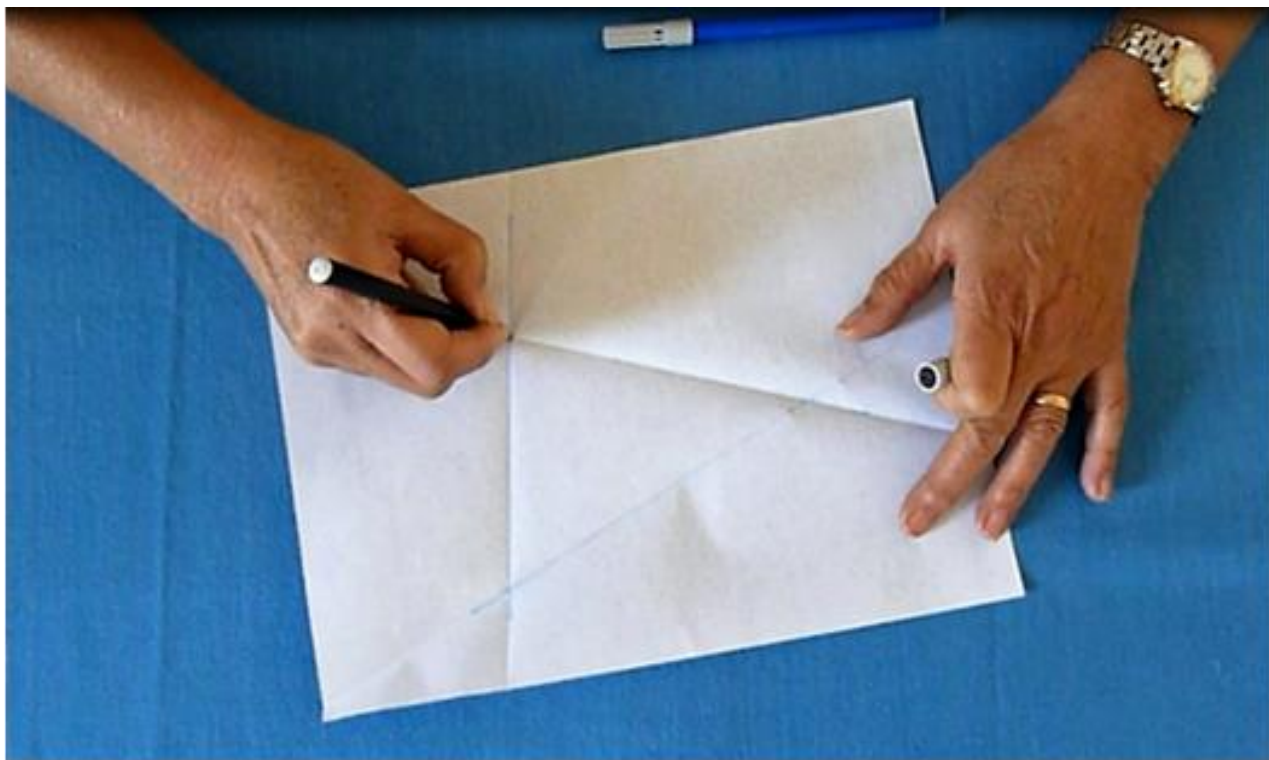


Figura 8. Costruzione di un triangolo.

Un problema sui triangoli: costruzione dell'ortocentro

Si disegni un triangolo come detto nel paragrafo precedente e si indichi con (4) il punto d'intersezione fra le pieghe (1) e (2).

Si combini quanto visto in *Costruzione di rette perpendicolari* e in *Rette per due punti; segmenti* per ottenere la piega (5), perpendicolare a (3) e passante per (4); sia (6) l'intersezione fra (5) e (3): diremo che il segmento, che ha per estremi (4) e (6), è un'altezza del triangolo e che (6) è piede di tale altezza.

Si proceda similmente per ottenere le altre altezze del triangolo: se l'esecuzione è accurata, troveremo l'unico punto di intersezione delle rette contenenti le tre altezze, che si chiama *ortocentro* (cfr. Figura 9).

Il fatto che le tre rette delle altezze passano tutte per un unico punto è assicurato da un teorema, del quale non riportiamo qui la dimostrazione. Il lavoro con la carta piegata determina correttamente l'ortocentro solo se l'esecutore è sufficientemente preciso.

Analoghe osservazioni valgono per gli altri punti notevoli, trattati successivamente nel paragrafo 6 in: *Un problema sui triangoli: costruzione del baricentro*, *Un problema sui triangoli: costruzione del circocentro* e *Un problema sui triangoli: costruzione dell'incentro*.

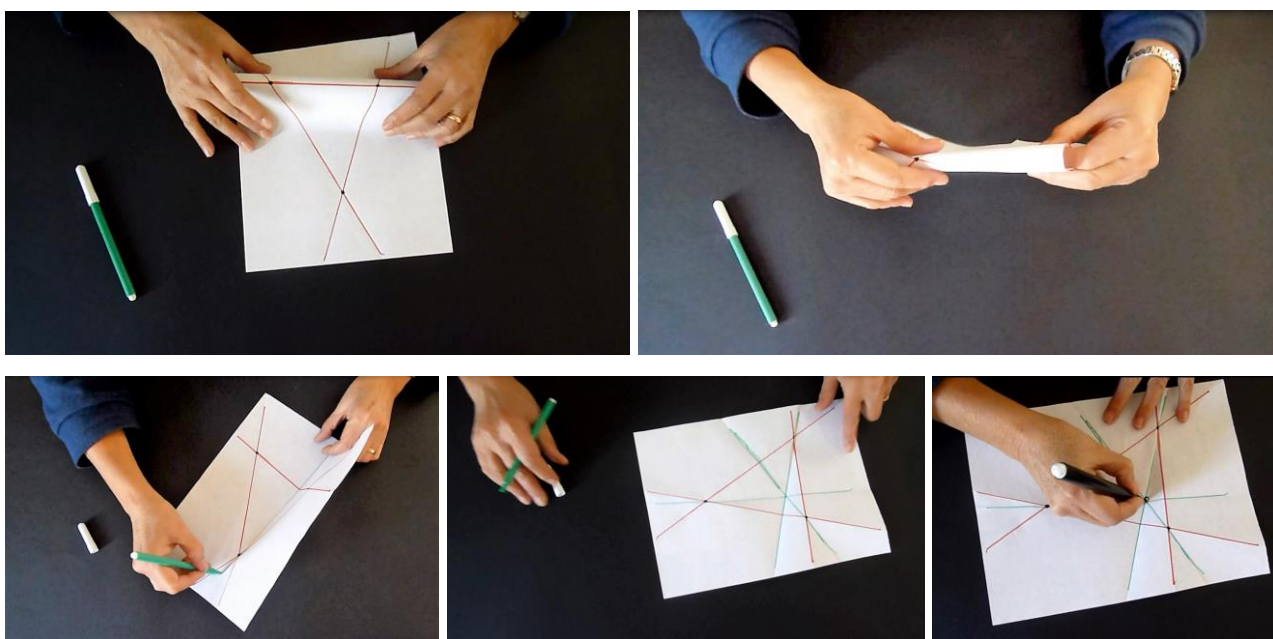


Figura 9. Costruzione dell'ortocentro.

Spunti di approfondimento

Il piede dell'altezza, ovvero il punto (6) individuato in *Un problema sui triangoli: costruzione dell'ortocentro*, appartiene sempre a un lato del triangolo? Se non è così, cosa succede e quando capita? E l'ortocentro è sempre interno al triangolo? Se non è così, quando capita?

5. SEGMENTI CONGRUENTI; ANGOLI CONGRUENTI

Nella geometria della carta piegata, diremo che due *segmenti* sono *congruenti* se esistono pieghe (da effettuare in successione l'una dopo l'altra) che portino a sovrapporre

contemporaneamente i loro estremi.

Per gli *angoli congruenti* si richiede che esistano pieghe (da effettuare in successione l'una dopo l'altra) che portino a sovrapporre contemporaneamente i lati (e il vertice) dell'angolo.

Il “nostro compasso”

Con il compasso, per tracciare una circonferenza, si riporta un segmento tenendone fisso uno degli estremi. Come vedremo nelle costruzioni seguenti, si può procedere in modo analogo piegando opportunamente il foglio; chiameremo tale procedura il “nostro compasso”. Nelle usuali operazioni di disegno geometrico si usa anche “trasportare” i segmenti sollevando il compasso dal foglio: nella geometria classica ciò non era consentito e, infatti, per il trasporto del segmento esiste una costruzione apposita da effettuarsi con riga e compasso. Nella geometria della carta piegata, si può trasportare un segmento effettuando pieghe opportune.

Costruzione di segmenti adiacenti congruenti

Si segni sul foglio la piega (1) e su di essa il punto (2). Piegare in (1) con (2) in vista, in modo da costruire (3), perpendicolare a (1) e passante per (2), secondo quanto detto in *Costruzione di rette perpendicolari*; senza riaprire, si pieghi ancora perpendicolarmente a (1) ottenendo così da parti opposte rispetto a (3) le rette (4) e (5), che intersecano (1) in (6) e (7).

In base alla nostra definizione, il segmento che ha per estremi (2) e (6) è congruente a quello che ha per estremi (2) e (7), ad esso adiacente.

Costruzione di segmenti consecutivi congruenti

Si pieghi il foglio lungo una retta (1). Senza riaprire, si esegua un'altra piega: riapriamo e indichiamo con (2) e (2') le due semirette così generate e con (3) la loro intersezione; richiudere e “pizzicare” in un punto (4) di (2), generando al contempo il punto (5) su (2'). Aprendo il foglio, si vede il segmento con estremi in (4) e (3) consecutivo e congruente al segmento con estremi in (5) e (3).

Note

Spesso conviene non riempire il foglio di linee di costruzione. Per evitarlo, si può “pizzicare” la carta invece di effettuare una piega, specie se questa ha lo scopo di individuare dei punti.

Problemi sui segmenti

Le costruzioni, rispettivamente, del *punto medio* e dell'*asse* di un segmento dato iniziano allo stesso modo: si sovrappongono gli estremi del segmento (guardando il foglio in trasparenza) e, a partire da essi, si continuano a sovrapporre le due parti del segmento fino a “pizzicare” il foglio se si vuole il punto medio, o facendo un'intera piega se si vuole l'asse. Consiglio vivamente di mantenere distinte (anche dal punto di vista temporale) le due costruzioni (si vedano, nel paragrafo seguente, le osservazioni in chiusura di *Un problema sui triangoli: costruzione del baricentro*).

6. RIPRENDIAMO IL NOSTRO LAVORO SUI TRIANGOLI...

Un problema sui triangoli: costruzione del baricentro

Si disegni un triangolo, come indicato nel paragrafo 4, e si indichino con (4), (5) e (6) i suoi vertici. Si trovi (7), punto medio del segmento di estremi (4) e (5), e si tracci il segmento di estremi (6) e (7): esso è una *mediana* del triangolo.

Si proceda similmente per ottenere le altre mediane del triangolo: se l'esecuzione è accurata, si troverà il loro unico punto di intersezione, che si chiama *baricentro* (cfr. Figura 10).

È noto che l'esistenza del baricentro e degli altri *punti notevoli* dei triangoli è assicurata dai teoremi a essi relativi: ciò non fornisce altrettante garanzie sulla nostra capacità di trovarli concretamente! La costruzione potrebbe basarsi su una procedura corretta, ma non essere eseguita con sufficiente precisione, oppure, invece di limitarsi a “pizzicare” si è fatta la piega che determina l'asse e questa crea confusione, o, ancora, invece di disegnare una mediana si è segnata un'altezza, ...

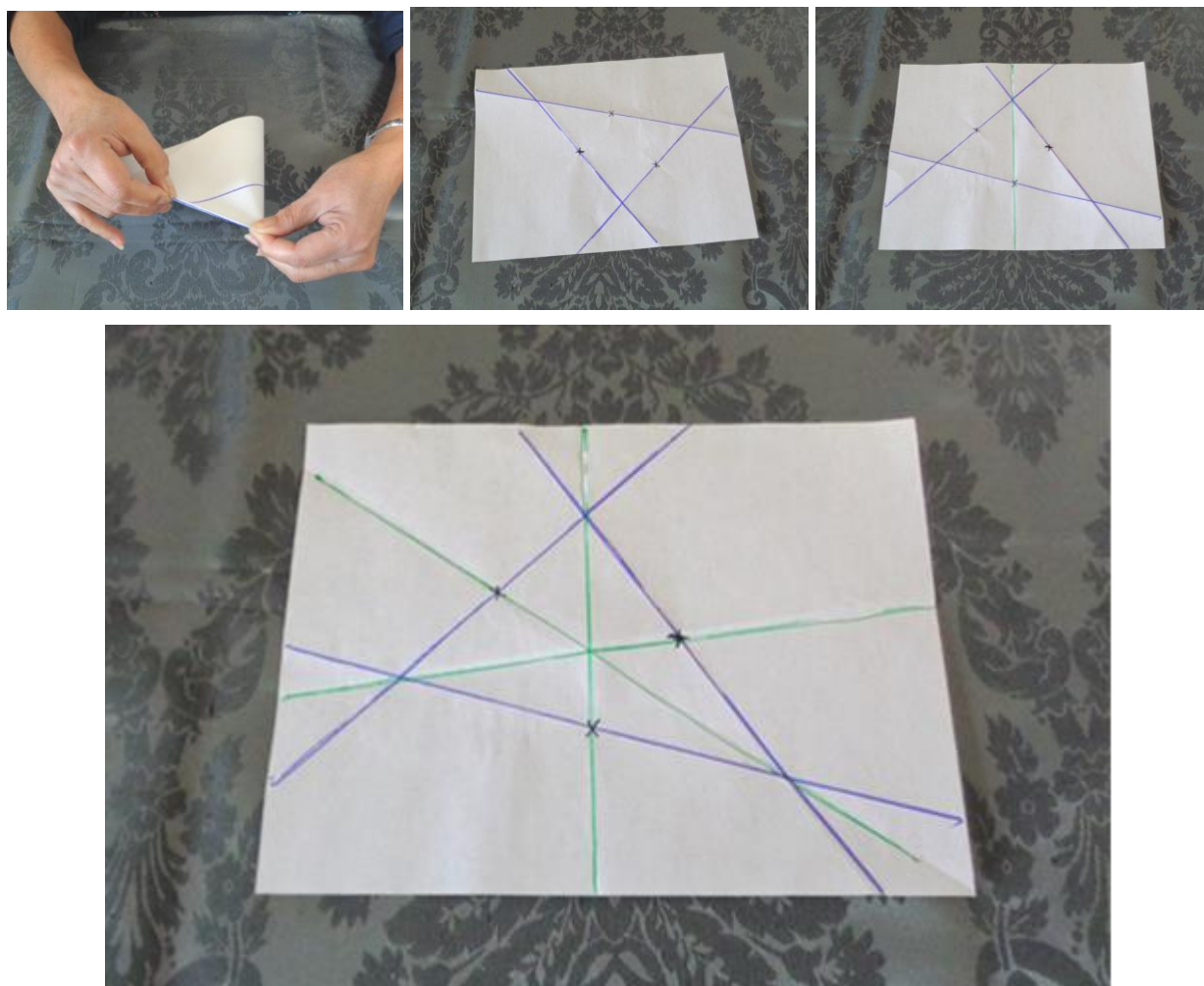


Figura 10. Costruzione del baricentro.

Spunti di approfondimento

Il baricentro è sempre interno al triangolo? In un triangolo, una mediana può coincidere con un'altezza?

Un problema sui triangoli: costruzione del circocentro

Si disegni un triangolo, come indicato nel paragrafo 4, e si traccino gli assi dei suoi lati. Se l'esecuzione è accurata, si troverà il loro unico punto di intersezione, che si chiama *circocentro* (cfr. Figura 11).

Spunti di approfondimento

Il circocentro è sempre interno al triangolo? Perché si chiama circocentro? Un asse può coincidere con una retta che contiene un'altezza o una mediana?

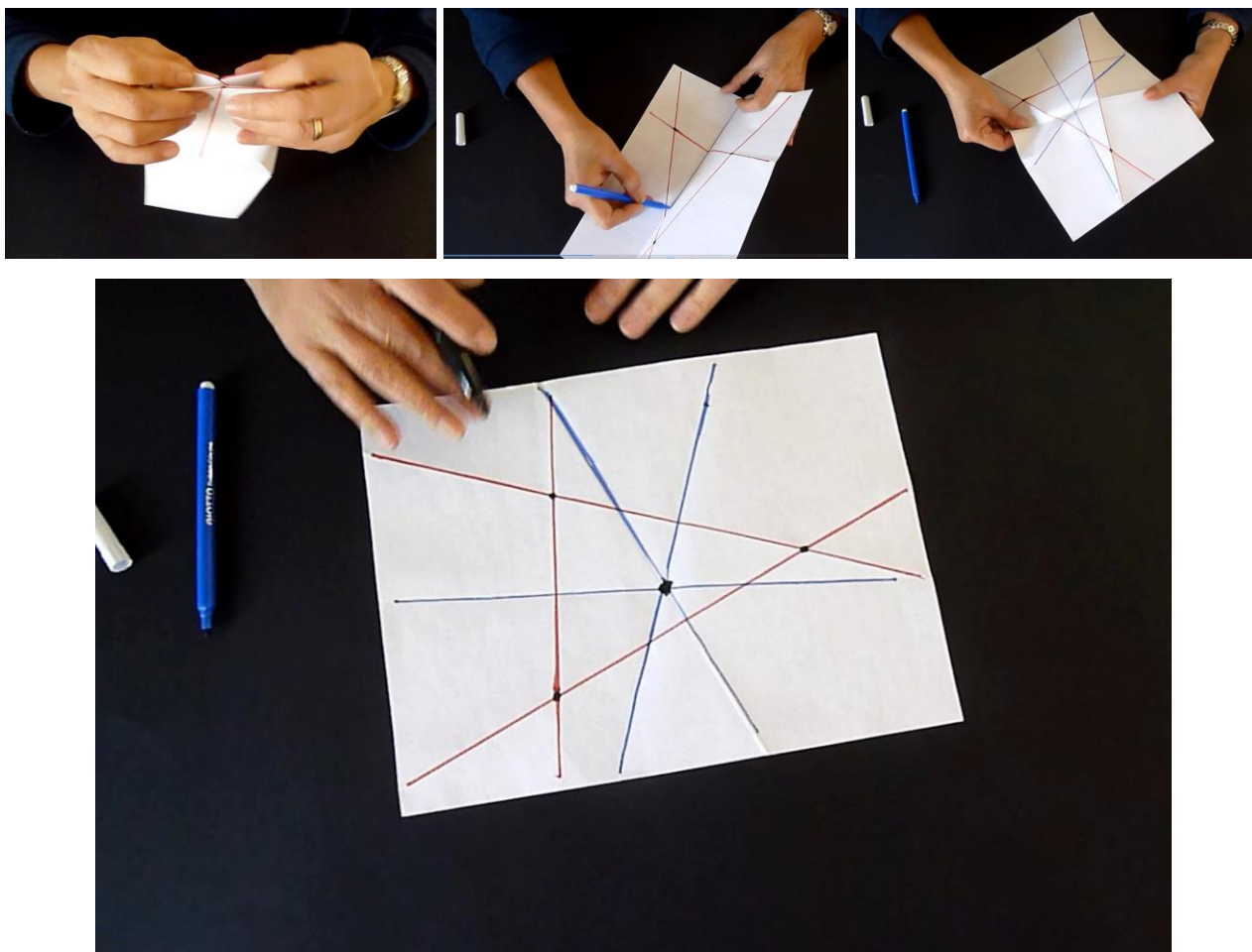


Figura 11. Costruzione del circocentro.

Triangoli “speciali”

Si riprenda il triangolo del paragrafo 4: probabilmente non ci vedremo *niente di speciale*. Tuttavia, potremmo fare in modo che due lati siano congruenti (*triangolo isoscele*) o che lo siano tutti e tre (*triangolo equilatero*).

Costruzione di un triangolo isoscele

Si riprenda in esame la *Costruzione di segmenti consecutivi congruenti* del paragrafo 5: il triangolo che ha un vertice nel punto lì indicato con (3) e gli altri negli estremi, diversi da (3), dei due segmenti congruenti ottenuti nella costruzione, è isoscele.

Bisettrice di un angolo e sua costruzione

Torniamo alla *Costruzione di segmenti consecutivi congruenti* del paragrafo 5: osserviamo che la retta (1) divide in due parti congruenti l'angolo di vertice (3) individuato dalle

semirette (2) e (2') (cfr. *Segmenti congruenti; angoli congruenti*): diremo che (1) è la *bisettrice* di tale angolo. Per costruire la bisettrice di un angolo dato, piegare il foglio “pizzicando” nel vertice e sovrapponendo i lati dell’angolo.

Un problema sui triangoli: costruzione dell’incentro

Si disegni un triangolo, come indicato nel paragrafo 4, e si traccino le bisettrici dei suoi angoli, come indicato in *Bisettrice di un angolo e sua costruzione*. Se l’esecuzione è accurata, si troverà il loro unico punto di intersezione, che si chiama *incentro* (cfr. Figura 12).

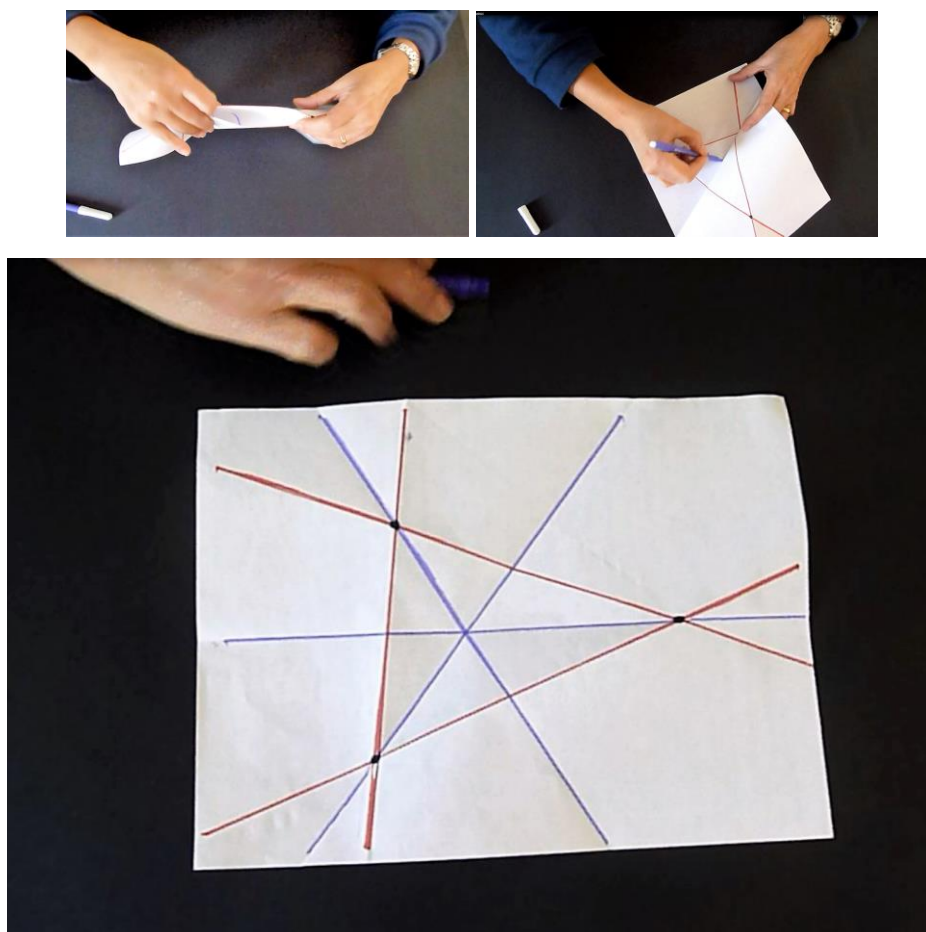


Figura 12. Costruzione dell’incentro.

Spunti di approfondimento

L’incentro è sempre interno al triangolo? Perché si chiama incentro? Una bisettrice può coincidere con un asse, o contenere un’altezza o una mediana?

Nota

Le costruzioni e le osservazioni dei paragrafi 5 e 6, da *Il nostro compasso* a *Bisettrice di un angolo e sua costruzione*, portano a dire che, in ogni triangolo isoscele, un'altezza e una mediana coincidono e appartengono alla bisettrice dell'angolo compreso tra i lati congruenti del triangolo e all'asse dell'altro lato, spesso indicato come "base" del triangolo (e ovviamente questa bisettrice e questo asse coincidono).

È anche vero che, se in un triangolo un'altezza appartiene a un asse, o a una bisettrice, o coincide con una mediana, oppure una bisettrice e un asse coincidono, allora il triangolo è isoscele.

I triangoli equilateri

I triangoli equilateri sono isosceli rispetto a una qualunque coppia dei loro lati: ciò verrà sfruttato nella loro costruzione.

Costruzione di un triangolo equilatero

Tracciare la retta (1) e una sua perpendicolare, (2), come indicato in *Costruzione di rette perpendicolari*; sia (3) il loro punto d'intersezione. Tenendo il foglio ancora piegato sia lungo (1) che lungo (2), "pizzicare" la (1): si ottengono su di essa due punti, (4) e (5), estremi di un segmento che ha (3) come punto medio e (2) come asse. Congiungendo un qualunque punto di (2) a (4) e (5), si ottiene un triangolo isoscele, in cui (2) è contemporaneamente asse e bisettrice. Se vogliamo ottenere un triangolo equilatero, dobbiamo determinare un punto (6) su (2) in modo che il segmento di estremi (4) e (5) sia a sua volta congruente al segmento di estremi (4) e (6): useremo il "nostro compasso" per riportare segmenti, creando la piega (7) che passa per (4) e porta (5) su (2); in quest'operazione, conviene tenere il foglio piegato lungo (1) con tutti gli altri elementi in vista (cfr. Figura 13).

Note

Tutte le costruzioni suggerite sui triangoli, le osservazioni e gli spunti di approfondimento coinvolgono i cosiddetti *criteri di congruenza dei triangoli*. Sempre

tenendo presente la fascia d'età degli alunni cui mi sono rivolta, ho ritenuto conveniente non esplicitare tali criteri, ma dichiarare semplicemente che due *triangoli* sono *congruenti* se esistono pieghe (da effettuarsi in successione, l'una dopo l'altra) che sovrappongano contemporaneamente tutti i loro punti.

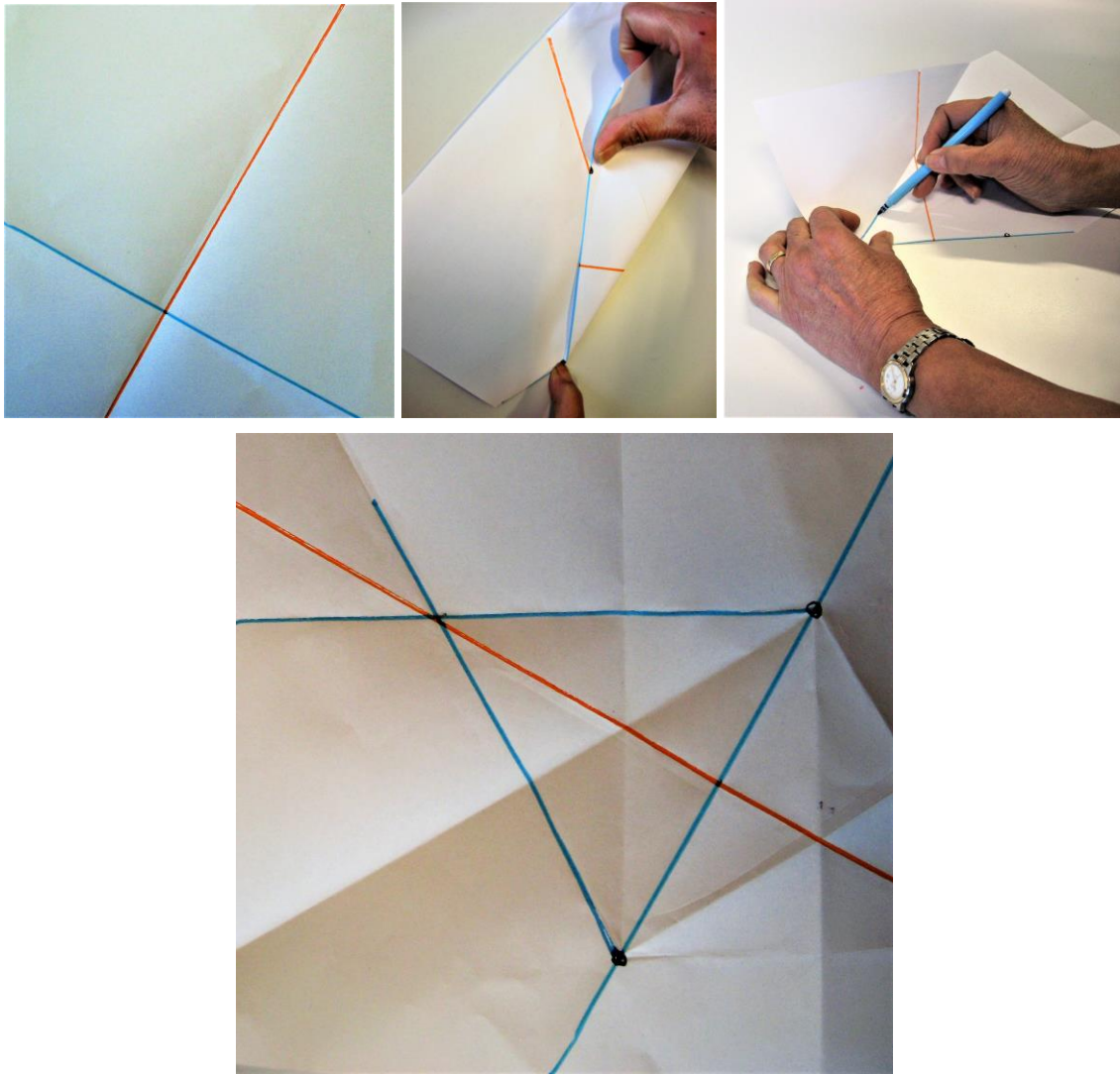


Figura 13. Costruzione del triangolo equilatero.

CONCLUSIONI

Il lavoro qui illustrato, come detto nell'introduzione, è stato molte volte presentato ai miei allievi del secondo anno della Scuola secondaria di primo grado. Oltre a quanto esposto, il percorso didattico comprendeva la costruzione di quadrilateri, lo studio delle simmetrie assiali e la loro composizione.

Questo tipo di attività, soprattutto all'inizio, richiede pazienza da parte dell'insegnante, che deve assistere quasi ogni allievo individualmente, poiché le abilità manuali sono spesso carenti: è questa la maggior difficoltà incontrata generalmente dai ragazzi. In cambio, l'attenzione che i miei allievi dovevano porre nell'esecuzione del lavoro manuale e ancor più l'analisi degli errori commessi favorivano il consolidamento dei concetti acquisiti e sviluppavano la capacità di riconoscere relazioni tra gli elementi di una figura, come congruenze di segmenti o angoli, perpendicolarità e così via.

BIBLIOGRAFIA

BASCETTA P.

1998a, *Origami: Geometria con la carta (I)*,

<https://www.origami-cdo.it/articoli/files/Geometriaconlacarta_PBascetta.pdf>, sito consultato l'1.2.2018.

1998b, *Origami: Geometria con la carta (II)*,

<https://www.origami-cdo.it/articoli/files/Geometriaconlacarta2_PBascetta.pdf>, sito consultato l'1.2.2018.

SITI WEB

Centro Diffusione Origami,

<<http://www.origami-cdo.it>>, sito consultato il 14.10.2016.

Matematica e... Origami,

<https://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/Matematicae/Giugno_06/origami.htm>, sito consultato l'1.2.2018.

[AUTORI DELLE IMMAGINI: Le foto delle Figure 1, 2, 4, 10 sono di Edoardo Pittino; le altre immagini sono state tratte da un video girato da Daniela Leder].