Dipartimento di scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche
"Bruno de Finetti"

Research Paper Series, N.2 , 2018

SUGLI APPROCCI ANALITICO E PROBABILISTICO NELL'ANALISI DI ALCUNI PROCESSI DI MARKOV

ATTILIO WEDLIN
DEAMS – UNIVERSITA' DI TRIESTE

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Research Paper Series

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali, Matematiche e Statistiche “Bruno de Finetti”
Via dell’Università, 1
34123, Trieste
Tel.: +390405587927
Fax: +390405587005
http://www.deams.units.it

EUT Edizioni Università di Trieste
Via E.Weiss, 21 - 34128 Trieste
Tel. +390405586183
Fax +390405586185
http://eut.units.it
eut@units.it

ISBN: 978-88-8303-928-7

Research Paper Series, N. 2, 2018

SUGLI APPROCCI ANALITICO E PROBABILISTICO NELL'ANALISI DI ALCUNI PROCESSI DI MARKOV

ATTILIO WEDLIN
DEAMS – UNIVERSITA' DI TRIESTE

ABSTRACT[1]

Questa nota introduce agli approcci di Kolmogorov – Feller e, rispettivamente, di Ito nello studio dei processi stocastici Markoviani di diffusione, dei processi di Markov puramente discontinui e dei processi Markoviani di tipo "jump – diffusion".

KEYWORDS: equazioni differenziali stocastiche, equazioni differenziali alle derivate parziali, funzioni di transizione, semigruppi di transizione, generatori differenziali.

[1] **Corresponding author:** Attilio Wedlin, Dipartimento di Scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche, Università di Trieste, email: attilio.wedlin@deams.units.it; tel: 040/5587029.

0. INTRODUZIONE

E’ noto che l’analisi sistematica dei processi di Markov è stata iniziata da A.N. Kolmogorov con la monografia (1.9) dal titolo “ On analytical methods in probability theory ” del 1931 nella quale compaiono le celebri equazioni differenziali alle derivate parziali per le funzioni di transizione $Q_t(x,B)$ di un processo stocastico Markoviano omogeneo $X(t)$.

Ricordiamo che se lo spazio degli stati (S,B_S) del processo $X(t)$ è discreto allora la funzione di transizione $Q_t(x,B)$ esprime la probabilità condizionata

$$\Pr\left\{X(t) \in B \,/\, X(0) = x\right\}$$

per ogni stato $x \in S$ e ogni sottoinsieme di stati $B \in B_S$. Se lo spazio degli stati è continuo $Q_t(x,B)$ è una funzione misurabile in x, per ogni sottoinsieme B, e una misura di probabilità su B_S, per ogni stato x. In letteratura $Q_t(x,B)$ è detta “stochastic kernel”.

Ulteriori importanti sviluppi sull’argomento sono stati apportati, sempre negli anni 30 del secolo scorso, da W. Feller nei lavori (1.2) e (1.3) e, in seguito, da altri autori.

In questa nota, avente carattere introduttivo, indicheremo col nome di “approccio analitico” lo studio dell’evoluzione nel tempo delle funzioni $Q_t(x,B)$, o delle densità di transizione $q_t(x,y)$ se esistono, di un processo Markoviano descritta dalle soluzioni delle equazioni di Kolmogorov e Feller. Ovviamente, se esiste $q_t(x,y)$ è $Q_t(x,B) = \int_B q_t(x,y)dy$.

Vent’anni dopo l’uscita della monografia di Kolmogorov, in una serie di lavori, il probabilista giapponese K. Ito ha proposto un diverso metodo per l’analisi dei processi di Markov, detto “approccio probabilistico”, che consiste nello studio dell’evoluzione nel tempo dello stato del processo, cioè nello studio delle traiettorie del processo. Tali traiettorie si ottengono risolvendo opportune equazioni differenziali stocastiche descritte da Ito nella monografia (1.6) del 1951 dal titolo “On Stochastic Differential Equations.” Tale metodo si basa su una versione stocastica del calcolo differenziale e integrale di Cauchy – Riemann elaborata da K. Ito e, più tardi e indipendentemente, dal ricercatore russo R.L. Stratonovich.

I due metodi, quello analitico e quello probabilistico, sono stati applicati inizialmente a processi Markoviani di diffusione, cioè a processi a tempo continuo e con traiettorie continue. Il più semplice di tali processi è il processo di N. Wiener, o processo di moto Browniano, per il quale A. Einstein, già nel 1905, aveva trovato la seguente equazione differenziale alle derivate parziali per la densità di transizione $q_t(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,y) = \frac{1}{2}\sigma^2 . \frac{\partial^2}{\partial y^2} q_t(x,y)$$

con condizione iniziale $X(0) = x$. La soluzione è costituita da una densità Gaussiana con valor medio x e varianza $\sigma^2.t$.

In questa nota seguiremo l'evoluzione storica dell'argomento incominciando proprio dai processi di diffusione; in seguito tratteremo i processi Markoviani "puramente discontinui" ed infine i processi Markoviani "jump – diffusion" nei quali l'andamento diffusivo è interrotto, in epoche aleatorie, da discontinuità di salto aventi ampiezza aleatoria. Si è scelto anche, per facilitare il lettore, di predisporre indicazioni bibliografiche separate per ognuno dei paragrafi dedicati ai differenti tipi di processi Markoviani considerati. Analogamente le appendici sono state inserite all'interno dei paragrafi corrispondenti e non alla fine dell'intera nota com'è più frequente.

Per i lettori che avessero bisogno di informazioni introduttive sui processi stocastici e sul "calcolo stocastico" di K. Ito suggeriamo in particolare i testi (1.5) e, rispettivamente, (1.10) indicati nella bibliografia del prossimo paragrafo.

1. PROCESSI DI DIFFUSIONE MARKOVIANI

Si tratta di processi stocastici a tempo continuo, con spazio degli stati continuo e con traiettorie quasi certamente continue. Il più semplice processo di diffusione è il processo di Wiener $W(t)$ definito dalle seguenti condizioni:

1) $W(0) = 0,$ quasi certamente,

2) $W(t_4) - W(t_3) \, \mathbf{C} \, W(t_2) - W(t_1)$ se $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$,

3) $\forall h, \quad W(t) - W(s) \overset{d}{=} W(t+h) - W(s+h)$, con densità $N\left[0, \quad \sigma^2 (t-s)\right]$

4) $\text{Lim } \Pr\left[\left|W(t) - W(s)\right| > \varepsilon\right] = 0 \quad se \quad s \to t$

Queste proprietà qualificano il processo di Wiener come uno dei processi di Lévy. Si provano facilmente le seguenti proposizioni

Proposizione 1:

a) il processo $W(t)$ ha funzione di covarianza $Cov(W_t, W_s) = \sigma^2.\min(t,s)$;

b) continuità in media quadratica: $\lim \; E\{[W(t+s) - W(s)]^2\} = 0 \quad se \quad t \downarrow 0$;

c) la densità di transizione $q_t(x,y)$ per $W(t)$, se $W(0) = x$, è normale con valor medio x e varianza $\sigma^2.t$.

Proposizione 2.

La densità di transizione $q_t(x, y)$ del punto c) della Proposizione 1 è l'unica soluzione delle seguenti equazioni differenziali di A.N. Kolmogorov :

equazione retrospettiva (backward equation) $\frac{\partial}{\partial t} q_t(x, y) = \frac{\sigma^2}{2} . \frac{\partial^2}{\partial x^2} q_t(x, y)$,

equazione prospettiva (forward equation) $\frac{\partial}{\partial t} q_t(x, y) = \frac{\sigma^2}{2} . \frac{\partial^2}{\partial y^2} q_t(x, y)$.

Le condizioni iniziali delle due equazioni consistono nella fissazione dello stato finale y nella prima equazione, che così riguarda la funzione incognita $q_t(x, y)$ dipendente dagli argomenti t e x, e nella fissazione dello stato iniziale x nella seconda equazione che allora riguarda la funzione incognita $q_t(x, y)$ dipendente da t e y. La soluzione delle due equazioni è formalmente la stessa

$$q_t(x, y) = (2\pi\sigma^2 t)^{-1/2} . \exp\left\{-(y-x)^2 / 2\sigma^2 t\right\} .$$

Per il caso generale di un qualunque processo di diffusione Markoviano omogeneo $\{X(t)\}$ le equazioni di Kolmogorov sono state approfonditamente studiate da W. Feller e da altri autori. L'analisi dei processi di diffusione secondo l'approccio Kolmogorov – Feller si caratterizza attraverso **lo studio dell'evoluzione delle funzioni di transizione nel tempo**.

Il generale processo di diffusione è definito dai seguenti assiomi: nell'ipotesi che gli incrementi di $X(t)$ abbiano momenti secondi finiti, si assume che, se h è opportunamente piccolo, per l'incremento $X(t+h) - X(t)$ sussistano le seguenti condizioni

5) $E\left[X(t+h) - X(t) / X(t) = x\right] = h.a(x) + o(h),$

6) $Var[X(t+h) - X(t) / X(t) = x] = h.b(x) + o(h),$

7) $\Pr\left\{\left|X(t+h) - X(t)\right| > \varepsilon / X(t) = x\right\} = o(h),$

ove le funzioni $a(.)$ e $b(.) > 0$ sono dette "termine di drift" e "termine di diffusione".

Osserviamo che nel caso del processo di Wiener è $a(x) \equiv 0$ e $b(x) \equiv \sigma^2$.

Per il generale processo di diffusione, e supponendo che i termini di drift e di diffusione $a(x)$ *e* $b(x)$ siano assegnati, presentiamo l'equazione retrospettiva per la densità di transizione, che supporremo esistente, del processo $X(t)$; la sua espressione è la seguente

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,y) = a(x).\frac{\partial}{\partial x} q_t(x,y) + \frac{b(x)}{2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_t(x,y) .$$

La condizione iniziale è $\lim_{t \downarrow 0} q_t(x,y) = \delta(y-x)$, ove $\delta(.)$ è la funzione di Dirac.

Scegliendo $a(x) = -\alpha.x$, con $\alpha > 0$, e $b(x) \equiv 1$ si ottiene l'equazione retrospettiva del particolare processo di diffusione denominato spesso (e impropriamente) "processo di Ornstein – Uhlenbeck"

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,y) = -\alpha x.\frac{\partial}{\partial x} q_t(x,y) + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_t(x,y) .$$

La sua soluzione è $q_t(x,y) = [2\pi.v(t)]^{-1/2}.\exp\{-[y-m(t)]^2 / 2v(t)\}$, ove $m(t) = x.e^{-\alpha.t}$ e $v(t) = (1-e^{-2\alpha.t}) / 2\alpha$.

Si noti che per $t \to \infty$ tale densità converge a quella di una distribuzione normale $N\left(0, \ \frac{1}{2\alpha}\right)$. Osserviamo infine che se la distribuzione iniziale del processo di diffusione coincide con quest'ultima densità allora le distribuzioni congiunte corrispondenti hanno la proprietà di invarianza per traslazione di un processo stazionario in senso stretto; questo caso è propriamente indicato come "processo di Ornstein – Uhlenbeck".

Ritornando al generale processo di diffusione, l'equazione prospettiva per la densità di transizione $q_t(x,y)$ ha la seguente espressione

$$\frac{\partial}{\partial t} q_t(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}[a(y).q_t(x,y)] + \frac{1}{2}.\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(y).q_t(x,y)],$$

mentre la condizione iniziale rimane la stessa dell'equazione retrospettiva. A questo punto sarebbero necessarie diverse considerazioni e precisazioni analitiche, particolarmente per chiarire le relazioni tra le soluzioni delle due equazioni. Il lettore interessato può far riferimento al quinto paragrafo del decimo capitolo del trattato (1.4) di W. Feller. Noi riprenderemo la questione nella prima appendice.

Un secondo approccio allo studio dei processi di diffusione è dovuto al probabilista giapponese K. Ito: egli descrive tali processi attraverso **l'evoluzione nel tempo delle loro traiettorie**. Il generale processo di diffusione omogeneo ha traiettorie che sono soluzioni di equazioni differenziali stocastiche del tipo

8) $$dX(t) = a[X(t)]dt + \sigma[X(t)]dW(t),$$

che scriveremo anche $dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$,

ove $a(X_t)$ *e* $\sigma(X_t)$ sono dati processi stocastici dipendenti dal processo X_t, che rappresenta la funzione aleatoria incognita dell'equazione. W_t è un processo di Wiener standardizzato (cioè con parametro $\sigma^2 = 1$) supposto indipendente dalla condizione iniziale aleatoria X_0.

L'equazione 7) va correttamente interpretata come un'espressione differenziale corrispondente all'equazione integrale stocastica

9) $$X_t = X_0 + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

nella quale il primo integrale è un integrale in media quadratica, mentre il secondo è il cosiddetto "integrale di Ito" nel quale la funzione integranda è il processo stocastico, o funzione aleatoria, $\sigma(X_t)$ e l'integratore è il processo di Wiener W_t.

Formalmente l'integrale di Ito ricorda quello di Riemann - Stieltjes di una funzione deterministica $f(t)$ rispetto alla funzione a variazione limitata e deterministica $g(t)$: $\int_0^t f(s)dg(s)$. Una tale interpretazione per l'integrale di Ito è impossibile in quanto l'integratore W_t ha traiettorie con variazione infinita su ogni intervallo limitato $[0, t]$.

K. Ito ha introdotto negli anni 40 del secolo scorso un calcolo stocastico, cioè una versione aleatoria del calcolo di Cauchy – Riemann, definendo l'integrale di un processo stocastico rispetto all'integratore costituito dal processo di Wiener e determinandone le proprietà. In questa nota ci limiteremo a considerare l'integrale del processo $\sigma(X_s)$ rispetto al processo di Wiener W_s, indicato con $\int_0^t \sigma(X_s)dW_s$, come un numero aleatorio Y(t) avente certe proprietà (per esempio valor medio 0 e varianza pari a $\int_0^t E[b(X_s)]^2 ds$).

Naturalmente, al variare di t , l'integrale $Y_t = \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$ è un processo stocastico (che si prova essere una martingala con funzione valor medio nulla).

Nel caso del processo di Ornstein – Uhlenbeck l'equazione 7) assume la forma

10) $$dX(t) = -\alpha.X(t)dt + dW(t)$$

che corrisponde all'equazione integrale

$$X(t) = X(0) - \alpha.\int_0^t X(s)ds + W(t) .$$

La soluzione di tale equazione risulta essere espressa dalla

$$X(t) = e^{-\alpha.t}.X(0) + \int_0^t e^{-\alpha.(t-s)} dW(s) \qquad 11)$$

nella quale compare un caso particolare dell'integrale di Ito detto "integrale di Wiener": la particolarità consiste nel fatto che la funzione integranda $e^{-\alpha.(t-s)}$ è deterministica anziché stocastica. Esso va considerato, fissato t, un numero aleatorio con valor medio 0 e varianza pari a $\int_0^t e^{-2\alpha.(t-s)} ds$.

Dall'espressione 10) del processo si ottengono quindi le:

$$E[X(t)] = e^{-\alpha.t}.E[X(0)] \quad \text{e} \quad Var[X(t)] = e^{-2.\alpha.t} Var[X(0)] + \int_0^t e^{-2\alpha.(t-s)} ds .$$

Con riferimento alla specificazione della condizione iniziale dell'equazione 9) si ha che ponendo $X(0) = m_0 \in R$, oppure $X(0) \approx N(m_0; \sigma_0^2)$, il processo soluzione 10) è Gaussiano, cosicché risulta

$$X(t) \approx N\left(e^{-\alpha.t}.m_0; \;\; e^{-2\alpha.t}.\sigma_0^2 + \int_0^t e^{-2\alpha.(t-s)} ds \right) .$$

Proveremo ora che le distribuzioni condizionate di questo processo Gaussiano coincidono con quelle che risultano dalla risoluzione dell'equazione retrospettiva menzionata sopra. Ponendo per l'equazione 9) la condizione iniziale $X(s) = x \in R$, con $s > 0$, essa diventa nella versione integrale

$$X(t) = x - \alpha \int_s^t X(u)du + \int_s^t dW(u)$$

e la soluzione è espressa dalla

$$X(t/s, x) = e^{-\alpha.(t-s)} \left[x + \int_s^t e^{\alpha.(u-s)} dW(u) \right] = e^{-\alpha.(t-s)}.x + \int_s^t e^{-\alpha.(t-u)} dW(u) .$$

E' ora facile pervenire alla densità di transizione per $X(t)$ condizionata all'ipotesi $\{X(s)=x\}$: si tratta di una densità normale con valor medio $E[X(t/s,x)]=e^{-\alpha.(t-s)}.x$ e varianza data dalla $Var[X(t/s,x)]=\int_s^t e^{-2\alpha.(t-u)}du=\dfrac{1-e^{-2\alpha.(t-s)}}{2\alpha}$.

PRIMA APPENDICE SULLE EQUAZIONI DI KOLMOGOROV

Finora, per il processo di diffusione $X(t)$ ci siamo occupati delle funzioni di transizione $q_t(x,y)$ e delle equazioni differenziali alle derivate parziali delle quali le $q_t(x,y)$ sono le soluzioni. Abbiamo anche accennato a delle difficoltà analitiche che impedivano chiarimenti ulteriori sull'equazione prospettiva. Come spesso accade in Matematica, anche nel nostro argomento l'uso di strumenti analitici più generali delle funzioni di transizione consente di semplificare la trattazione delle equazioni di Kolmogorov – Feller.

Lo strumento utile nel nostro caso è costituito dall'operatore di transizione $\{T_t; t\geq 0\}$ che agisce su funzioni continue e limitate degli stati del processo trasformandole in altre funzioni continue e limitate.

Definizione 1: E' detto "operatore di transizione" T_t del processo di Markov $X(t)$, con funzioni di transizione $Q_t(x,B)$, quello definito dalla

$$T_t[f(x)]=E[f(X_t)/X_0=x]=\int_R f(y).Q_t(x,dy).$$

ove $f(x)$ è una funzione continua e limitata, misurabile sullo spazio degli stati (S,B_S).

Si osservi che se $B\in S_B$ e $f(x)=I_B(x)$ allora è $T_t[I_B(x)]=Q_t(x,B).$ Quindi l'operatore di transizione è una generalizzazione della funzione di transizione del processo $X(t)$.

Tale operatore, che è evidentemente lineare, gode della proprietà di semigruppo $T_{s+t}=T_s.T_t=T_t.T_s$, T_0 essendo l'operatore identità ; nel caso particolare $T_t[I_B(x)]=Q_t(x,B)$ la proprietà di semigruppo diventa la condizione di Chapman – Kolmogorov.

Definizione 2: E' detto "generatore" del semigruppo $\{T_t; t\geq 0\}$ l'operatore definito dalla

$$G\left[f(x)\right]=\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t f(x)-f(x)}{t}$$

che agisce su funzioni $f(x)\in C^2$ definite su $\left(S,B_S\right)$. Ovviamente tale definizione richiede che il limite suddetto esista. Esso è interpretabile come una sorta di derivata dell'operatore T_t in t = 0. Molte precisazioni andrebbero fatte su questa definizione, ma per i nostri fini è sufficiente affermare che il generatore associato al processo di diffusione $X(t)$ con termini di drift e di diffusione $a(x)$ *e* $b(x)$ è espresso dalla

$$G\left[f(x)\right]=a(x).f'(x)+\frac{1}{2}b(x).f''(x), \qquad f(x)\in C^2,$$

e che le equazioni di Kolmogorov – Feller per l'operatore di transizione relativo T_t sono

1) equazione retrospettiva: $\frac{\partial}{\partial t}T_t\left[f(x)\right]=G\left[T_t f(x)\right]$,

2) equazione prospettiva: $\frac{\partial}{\partial t}T_t\left[f(x)\right]=T_t\left[Gf(x)\right]$.

Con riferimento alle eventuali densità di transizione del processo $X(t)$ le suddette equazioni diventano quelle che conosciamo già:

equazione retrospettiva $\quad \frac{\partial}{\partial t}q_t(x,y)=a(x).\frac{\partial}{\partial x}q_t(x,y)+\frac{b(x)}{2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2}q_t(x,y)=G\left[q_t(x,y)\right]$

equazione prospettiva $\quad \frac{\partial}{\partial t}q_t(x,y)=-\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y).q_t(x,y)\right]+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(y).q_t(x,y)\right].$

L'equazione prospettiva può essere anche espressa in termini del cosiddetto "generatore aggiunto" G* , corrispondente a G, definito dalla

$$G^*\left[f(y)\right]=-\frac{\partial}{\partial y}\left[a(y).f(y)\right]+\frac{1}{2}.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(y).f(y)\right].$$

e applicato a $f(y)=q_t(x,y)$.

Scegliendo $a(x) = -\alpha.x$, con $\alpha > 0$, e $b(x) \equiv 1$ (processo di Ornstein – Uhlenbeck) l'espressione del generatore è $G\left[f(x)\right] = -\alpha x. f'(x) + \frac{1}{2}. f''(x)$ e per $f(x) = q_t(x, y)$ si ottiene per $G[q_t(x, y)]$ l'espressione già nota dell'equazione retrospettiva.

Per un secondo esempio, leggermente più generale, scegliamo $a(x) = \alpha.x + \beta$ e $b(x) \equiv \sigma^2$; il generatore corrispondente è $G\left[f(x)\right] = \left(\alpha.x + \beta\right). f'(x) + \frac{\sigma^2}{2}. f''(x)$ e le equazioni di Kolmogorov – Feller hanno le espressioni seguenti:

eq. retrospettiva $\frac{\partial}{\partial t} q_t(x, y) = (\alpha.x + \beta).\frac{\partial}{\partial x} q_t(x, y) + \frac{\sigma^2}{2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_t(x, y) = G\left[q_t(x, y)\right],$

eq. prospettiva $\frac{\partial}{\partial t} q_t(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[(\alpha.y + \beta).q_t(x, y)\right] + \frac{\sigma^2}{2}.\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[b(y).q_t(x, y)\right]$.

Si prova che la soluzione dell'equazione retrospettiva relativa alla condizione iniziale $\lim_{t \downarrow 0} q_t(x, y) = \delta(y - x)$ è espressa dalla $q_t(x, y) = \left[2\pi.v(t)\right]^{-1/2}.\exp\left\{-\left[x - m(t)\right]^2 / 2v(t)\right\}$

ove $m(t) = y.e^{\alpha.t} + \frac{\beta}{\alpha}.\left(e^{\alpha.t} - 1\right)$ e $v(t) = \sigma^2.\left(e^{2\alpha.t} - 1\right)/ 2\alpha$.

Nell'impostazione di K. Ito l'attuale processo di diffusione ha traiettorie che sono soluzioni dell'equazione differenziale stocastica

$$dX(t) = \left[\alpha.X(t) + \beta\right]dt + \sigma.dW(t) ;$$

in corrispondenza alla condizione iniziale $X(0) = k \in R$ le soluzioni sono espresse dalla

$$X(t) = k.e^{\alpha.t} + \frac{\beta}{\alpha}.\left(e^{\alpha.t} - 1\right) + \sigma.\int_0^t e^{\alpha.(t-s)} dW(s) \ .$$

Le distribuzioni univariate del processo $X(t)$ sono Gaussiane con valori medi $k.e^{\alpha.t} + \frac{\beta}{\alpha}.\left(e^{\alpha.t} - 1\right)$ e varianze $\frac{\sigma^2}{2\alpha}.\left(e^{2\alpha.t} - 1\right)$.

In corrispondenza alla condizione iniziale $X(s) = x \in R$, con $s > 0$, la soluzione è data dalla

$$X_t(s, x) = e^{\alpha.(t-s)}.\left[x + \beta.\int_s^t e^{-\alpha.(u-s)} du + \sigma.\int_s^t e^{-\alpha.(u-s)} dW(u)\right] ;$$

allora possiamo affermare che le densità di transizione $q_{t-s}(x, y)$ del processo Markoviano $\{X(t)\}$ sono normali con parametri

$$E[X_t(s,x)] = x.e^{\alpha.(t-s)} + \frac{\beta}{\alpha}.\left(e^{\alpha.(t-s)} - 1\right),$$

$$Var[X_t(s,x)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[e^{2\alpha.(t-s)} - 1\right].$$

Queste densità di transizione si possono ottenere risolvendo le precedenti equazioni differenziali alle derivate parziali di Kolmogorov ponendo t - s al posto di t.

ALCUNE INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

(1.1) Arnold L. – "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications." J. Wiley, 1974.

(1.2) Feller W. – Zur Theorie der Stochastischen Prozesse. Math. Ann. 113, 1936.

(1.3) Feller W. – On the integro-differential equations of purely discontinuous Markov processes. Trans. Am. Math. Soc. 48, 1940.

(1.4) Feller W. – "An Introduction to Probability Theory and Its Applications." J. Wiley, 1970. Vol. II.

(1.5) Grimmett G. e Stirzaker D. – "Probability and Random Processes." Oxford Univ. Press, 2009.

(1.6) Ito K. – "On Stochastic Differential Equations." Amer. Math. Soc., 1951.

(1.7) Karatzas I. – "A Tutorial Introduction to Stochastic Analysis and its Applications." On line.

(1.8) Keller – Ressel M. - An Intuitive Introduction to Operator Semi – Groups. On line.

(1.9) Kolmogorov A.N. – "On analytical methods in probability theory." In Selected Works of A.N. Kolmogorov, ed. by A.N. Shiryaev. Kluwer, 1992.

(1.10) Kuo H.H. – "Introduction to Stochastic Integration." Universitext Springer, 2006.

(1.11) Lamperti J. – "Stochastic Processes." Springer – Verlag, 1977.

2. PROCESSI DI MARKOV PURAMENTE DISCONTINUI

Sono processi stocastici a tempo continuo con traiettorie costanti a tratti e continue a destra nei punti di discontinuità. Il più semplice di tali processi è quello di Poisson {N(t)} con intensità $c > 0$, deterministica e costante. Sappiamo che il processo di Poisson è un processo con incrementi indipendenti e ugualmente distribuiti; più precisamente esso soddisfa le seguenti condizioni:

1) $N(0) = 0,$ quasi certamente,

2) $N(t_4) - N(t_3)$ **C** $N(t_2) - N(t_1)$ se $t_1 < t_2 \le t_3 < t_4$,

3) $\forall h,\quad N(t) - N(s) \overset{d}{=} N(t+h) - N(s+h)$ con distribuzione Poissoniana di parametro $c.(t-s)$,

4) Lim $P\big[|N(t) - N(s)| > \varepsilon\big] = 0 \quad per \quad s \to t$.

Il processo di Poisson , come il processo di Wiener, è un processo Markoviano appartenente alla classe dei processi di Lévy. E' detta "misura di Lévy" del processo di Poisson la funzione di insieme $\lambda_1(dx) = c\,.\,\delta_1(dx)$, ove $\delta_1(dx)$ è la misura di Dirac: $\delta_1(B) = 1$ se e solo se $1 \in B$; altrimenti $\delta_1(B) = 0$. La misura di Lévy applicata ad un insieme Boreliano A, in questo caso $\lambda_1(A) = c.\delta_1(A)$, esprime il numero medio di discontinuità aventi ampiezze contenute in A in un intervallo di tempo unitario. Diremo di più su di essa nel seguito.

Proposizione 1: si provano facilmente le seguenti proprietà.

a) $E[N(t)] = c.t$,

b) Cov $\left[N(t),\quad N(s) \right] = c.\min(t,s)$,

c) $N(t)$ è continuo in media quadratica: $E\{[N(t) - N(s)]^2\} \to 0 \quad se \quad s \to t$,

d) La distribuzione di $N(t)$ condizionata all'evento $\{N(s) = m\}$ è Poissoniana sull'insieme degli interi positivi $m, m+1, m+2,$ .... con parametro $c.(t-s)$.

E' noto che, indicati con T_j , $j \geq 1$, i tempi di arrivo dei successivi eventi, le differenze $T_j - T_{j-1}$ sono mutuamente indipendenti e dotate tutte di una stessa distribuzione "esponenziale negativa" con densità $f(\tau) = c.\exp\{-c.\tau\}$. In letteratura sono indicate come "tempi di attesa tra arrivi successivi" (in lingua inglese: inter-arrival times).

Un secondo esempio è fornito dal "processo di Poisson composto" $Y(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y_j$, ove i numeri aleatori Y_j sono assunti mutuamente indipendenti, ugualmente distribuiti, con funzione di ripartizione $F_Y(y)$ e indipendenti dai n.a. $N(t)$; il processo $N(t)$ è assunto Poissoniano con intensità c . Lo spazio degli stati è continuo se i n.a. Y_j hanno determinazioni numeriche reali.

Tale processo è ancora un processo di Lévy e quindi soddisfa le precedenti condizioni 1) – 4) salvo che nella 3) l'incremento $Y(t) - Y(s)$ ha la distribuzione di probabilità seguente:

$$\Pr\{Y(t) - Y(s) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-c.(t-s)} . \frac{[c.(t-s)]^n}{n!} .F_Y^{n*}(x) ,$$

dipendente dalla differenza t – s. Si ha anche:

$$\Pr\{Y(t) \leq x\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-c.t} \frac{(c.t)^n}{n!} F_Y^{n*}(x) .$$

Nelle espressioni precedenti si è indicata con $F_Y^{n*}(x)$ la convoluzione n – ma di $F_Y(y)$.

La misura di Lévy di $Y(t)$ è finita, come nel caso precedente, ed espressa dalla $\lambda_2(dy) = c.F_Y(dy)$; la finitezza di $\lambda_2(dy)$ su R implica che in ogni intervallo temporale finito il numero medio delle discontinuità è finito. Vedremo in seguito un esempio di processi puramente discontinui che in ogni intervallo finito hanno un numero medio di arrivi infinito; si denominano "processi con attività infinita". I processi di Poisson e di Poisson composto sono processi con "attività finita".

Possiamo ora dare una rappresentazione generale per i processi $X(t)$ puramente discontinui: denotando con $\Delta X(t) = X(t) - X(t^-) = X(t) - \lim_{s \uparrow t} X(s)$ l'ampiezza dell'eventuale discontinuità al tempo t possiamo scrivere

5) $$X(t) = \sum_{s \leq t} \Delta X(s)$$

e quindi $X(t)$ è definito come somma di tutte le discontinuità nell'intervallo $(0, t]$.

Più precisamente, i processi di Lévy puramente discontinui sono definiti dalle

6) $$X(t) = \sum_{s \le t} \Delta X(s) = \int_0^t \int_R x.M_\omega(ds, dx) ,$$

ove la seconda uguaglianza esprime $X(t)$ come integrale di x rispetto alla misura aleatoria M_ω definita sullo spazio prodotto $R_+ \times R$.

Per ogni $t > 0$ e ogni sottoinsieme Boreliano B del campo reale le espressioni

$$M_\omega\{(0,t], B\} = \sum_{s \le t} |\Delta X(s) \in B| = \int_0^t \int_B M_\omega(ds, dx)$$

indicano il numero aleatorio di discontinuità in $(0,t]$ la cui ampiezza appartiene all'insieme B .

La corrispondente speranza matematica

$$EM_\omega\{(0,t], B\} = \mu\{(0,t], B\} = \int_0^t \int_R \mu(ds, dx) \ ,$$

detta "compensatore di $M_\omega\{(0,t], B\}$", è legata alla misura di Lévy $\lambda(dx)$ dalla relazione

$$\mu(ds, dx) = ds \times \lambda(dx) \ ,$$

che evidentemente corrisponde al prodotto della misura di Lebesgue e di quella di Lévy.

Nel primo esempio precedente, riguardante il processo di Poisson, è

$$\mu\{(0,t], B\} = \int_0^t \int_B ds.c.\delta_1(dx) = c.t.\delta_1(B) = t.\lambda_1(B) ,$$

mentre nel secondo è $\mu\{(0,t], B\} = \int_0^t \int_B ds.c.F_Y(dx) = c.t.\int_B F_Y(dx) = t.\lambda_2(B)$.

La misura aleatoria M_ω è detta Poissoniana perchè la funzione aleatoria $t \to M_\omega\{(0,t], B\}$ è un processo di Poisson con intensità $\lambda(B)$. Aggiungiamo infine che dal punto di vista matematico la misura di Lévy su R deve soddisfare le condizioni $\lambda(\{0\}) = 0$ e $\int_R (x^2 \wedge 1)\lambda(dx) < \infty$.

L'ultima disuguaglianza implica che sia $\lambda\left\{(-\infty,-\varepsilon]\bigcup[\varepsilon,\infty)\right\}<\infty$ per ogni $\varepsilon>0$.

Possiamo ora precisare le definizioni di "attività finita" e "attività infinita" dei processi di Lévy puramente discontinui: si parla di attività finita se per ogni t > 0 è $\mu\{(0,t],R\}<\infty$ e di attività infinita se $\mu\{(0,t],R\}=\infty$. Un esempio di processo di Lévy con attività infinita è dato dal "processo Gamma" per il quale la misura di Lévy, dotata di densità, è definita dall'espressione $\lambda(dx)=\frac{a.e^{-c.x}}{x}dx$, con parametri positivi a e $c.$.

Introduciamo ora un terzo esempio di processo puramente discontinuo, il processo "pseudo – Poissoniano" che è Markoviano, ma non è un processo di Lévy. Indicata con S_n una catena di Markov a tempo discreto e con spazio degli stati continuo, avente funzioni di transizione espresse dalle $K(s,B)$, si definisce il processo $X(t)=S_{N(t)}$, ove $N(t)$ è un processo di Poisson con intensità c, supposto indipendente dai n.a. S_n. Si tratta di una generalizzazione del processo di Poisson composto perché in quest'ultimo le variabili S_n sono somme di n.a. i.i.d., cioè elementi di una passeggiata aleatoria. Le funzioni di transizione sono espresse dalle

$$Q_t(x,B)=\sum_{N=0}^{\infty}e^{-c.t}\,\frac{(c.t)^n}{n!}.K^{(n)}(x,B)$$

che si provano essere soluzioni delle equazioni differenziali parziali di Kolmogorov retrospettiva e prospettiva

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x,B)=-c.Q_t(x,B)+c.\int_R K(x,dy).Q_t(y,B)\,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x,B)=-c.Q_t(x,B)+c.\int_R Q_t(x,dz).K(z,B)\,. \tag{8}$$

Per una semplice giustificazione dell'equazione retrospettiva 7) si veda W. Feller, secondo volume, a pagina 327 .

Assumeremo ora, più in generale, che per il processo Markoviano puramente discontinuo $X(t)$, nell'ipotesi $X(t)=x$ siano vere le seguenti condizioni:

α) il tempo di attesa per la prossima discontinuità ha distribuzione esponenziale negativa con densità $f(\tau)=c(x).e^{-\tau.c(x)}$, avente parametro $c(x)$ dipendente dal valore di $X(t)$;

β) la probabilità condizionata che la prossima discontinuità porti il processo X in uno stato appartenente a B è $K(x,B)$.

Nel trattato di W. Feller (2.3) tale processo è detto "jump process". Si dimostra che le ipotesi $\alpha)$ e $\beta)$ implicano l'equazione differenziale alle derivate parziali retrospettiva per le $Q_t(x,B)$ espressa dalla :

9) $$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x,B) = -c(x).Q_t(x,B) + c(x).\int_R K(x,dy).Q_t(y,B) \ .$$

La corrispondente equazione prospettiva, che però richiede, oltre alle precedenti $\alpha)$ e $\beta)$, ulteriori condizioni sulle quali non ci soffermiamo, è data dalla:

10) $$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x,B) = -\int_B c(z).Q_t(x,dz) + \int_R Q_t(x,dz).c(z).K(z,B) \,.$$

SECONDA APPENDICE SULLE EQUAZIONI DI KOLMOGOROV

In questa seconda Appendice incominceremo le nostre considerazioni dal processo puramente discontinuo più generale, quello detto "jump process", e ci limiteremo a considerare le equazioni retrospettive di Kolmogorov, espresse in generale dalla

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x,B) = G\left[Q_t(x,B)\right],$$

allo scopo di non appesantire l'esposizione con troppi dettagli analitici.

Definizione 1: E' detto "generatore" delle funzioni di transizione $Q_t(x,B)$ del processo puramente discontinuo (jump process) $X(t)$ l'operatore G che agisce su funzioni $f \in C^2$ espresso dalla

11) $$G\left[f(x)\right] = \int_R \left[f(y) - f(x)\right]c(x).K(x,dy) \,.$$

All'equazione retrospettiva si perviene al modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(x,B) = G\left[Q_t(x,B)\right] = \int_R \left[Q_t(y,B) - Q_t(x,B)\right]c(x).K(x,dy) =$$

$$= c(x).\int_R K(x,dy).Q_t(y,B) - c(x).Q_t(x,B)\,,$$

in quanto è $\int_R K(x, dy) = 1$ per ogni $x \in R$.

Per il processo pseudo – Poissoniano, cioè per l'equazione 7), vale la stessa catena di uguaglianze con la semplificazione riguardante l'intensità $c(x)$ data ora dalla $c(x) \equiv c$.

Per il processo di Poisson composto e per il processo di Poisson, che sono processi di Lévy, il generatore delle funzioni di transizione ha l'espressione

12) $$G[f(x)] = \int_R [f(x+y) - f(x)].\lambda(dy) = \int_R [f(x+y) - f(x)].c.F_{Y_1}(dy) .$$

L'equazione retrospettiva del processo di Poisson composto si ottiene quindi al modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t(x, B) = G[Q_t(x, B)] = \int_R [Q_t(x+y, B) - Q_t(x, B)]c.F_{Y_1}(dy) =$$

$$= c.\int_R Q_t(x+y, B).F_{Y_1}(dy) - c.Q_t(x, B) .$$

Per il processo di Poisson è sufficiente ricordare che la misura di Lévy è $\lambda(dy) = c.\delta_1(dy)$ di modo che il generatore corrispondente si riduce all'espressione $G[f(x)] = c.[f(x+1) - f(x)]$.

Le corrispondenti funzioni di transizione si ottengono dall'equazione retrospettiva

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_t(x, B) = c.[Q_t(x+1, B) - Q_t(x, B)] .$$

Chiaramente, nel processo di Poisson lo stato x in $Q_t(x, B)$ è un intero non negativo e l'insieme B contiene solo interi non negativi e non minori di x ; se con $p_n(t)$ si indica la probabilità dell'evento $\{N(t+s) - N(s) = n\}$ per qualunque $s \geq 0$ allora la precedente equazione differenziale corrisponde al seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dt} p_n(t) = c.[p_{n-1}(t) - p_n(t)], \qquad n \geq 1,$$

$$\frac{d}{dt} p_0(t) = -c.p_0(t) .$$

Le condizioni iniziali sono espresse dalle $p_0(0) = 1$ *e* $p_n(0) = 0$.

La risoluzione del sistema è ricorsiva: dalla seconda equazione si ottiene $p_0(t) = e^{-c.t}$; ponendo $n = 1$ nella prima equazione si ricava la $\frac{d}{dt} p_1(t) = c.[p_0(t) - p_1(t)] = c.[e^{-c.t} - p_1(t)]$ dalla quale si ottiene $p_1(t) = c.t.e^{-c.t}$. In generale è $p_n(t) = e^{-c.t}.\frac{(c.t)^n}{n!}$.

ALCUNE INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

(2.1) Applebaum D. – “Lévy processes and Stochastic Calculus.” Cambridge University Press, 2009. Second edition.

(2.2) Cinlar E. – “Probability and Stochastics.” Springer, 2010.

(2.3) Feller W. – “An Introduction to Probability Theory and Its Applications.” J. Wiley, 1970. Vol. II.

(2.4) Grimmett G. e Stirzaker D. – “Probability and Random Processes”. Oxford University Press, 2009.

(2.5) Keller – Ressel M. - An Intuitive Introduction to Operator Semi – Groups. On line.

3. CENNI SUI PROCESSI DI MARKOV “JUMP – DIFFUSION”

Questi processi stocastici sono processi di diffusione le cui traiettorie presentano discontinuità di prima specie, di ampiezze aleatorie, in epoche aleatorie. Si ottengono dalla combinazione di un processo di diffusione con un processo puramente discontinuo.

Come tutti i processi di Markov, i processi jump – diffusion si possono studiare dal punto di vista di A.N. Kolmogorov – W. Feller (evoluzione nel tempo delle funzioni di transizione) o dal punto di vista di K. Ito (evoluzione nel tempo delle traiettorie). Con riferimento a quest’ultimo approccio i processi jump – diffusion si definiscono come soluzioni di equazioni integrali stocastiche del tipo

$$1)\quad X(t) = X(0) + \int_0^t a(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW(s) + \int_0^t \int_R j(X_{s^-}, v).M_\omega(ds, dv)$$

o, equivalentemente, di equazioni differenziali stocastiche del tipo

$$1')\quad dX(t) = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dW(t) + \int_R j(X_{t^-}, v)M_\omega(dt, dv)$$

nelle quali intervengono: i processi stocastici $a(X_t)$, $\sigma(X_t)$ *e* $j(X_{s^-}, v)$, che dipendono dal processo $X(t)$, il processo di Wiener $W(t)$ e la misura aleatoria M_ω definita sullo spazio prodotto $R_+ \times R$. Si assume che $X(0), W(t)$ ed M_ω siano due a due indipendenti.

La seguente versione lineare dell'equazione 1')

2) $$dX(t) = a_t.X(t)dt + \sigma_t.X(t)dW(t) + \int_R j(t,v).X(t^-).M_\omega(dt,dv) =$$

$$= X(t^-).\left[a_t dt + \sigma_t dW(t) + \int_R j(t,v).M_\omega(dt,dv)\right]$$

fa intervenire le funzioni deterministiche a_t, σ_t *e* $j(t,v)$ che si assumono continue e limitate. La presenza dei simboli $X(t^-) = \lim_{s \uparrow t} X(s)$ e $X_{s^-} = \lim_{\tau \uparrow s} X(\tau)$ è legata alla definizione dell'integrale di Poisson rispetto alla misura M_ω per la quale rinviamo il lettore al testo (3.2).

Un esempio ben noto dell'equazione lineare 2) nella letteratura economico – finanziaria è il modello di R. Merton (3.4) del 1976 con coefficienti costanti

3) $$dS(t) = S(t^-).[a.dt + \sigma.dW(t) + dZ(t)], \quad S(0) = S_0,$$

riguardante il prezzo $S(t)$ di un'attività finanziaria. In esso $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} V_i = \int_R v.M_\omega(t,dv)$ è un processo di Poisson composto ed $S_0, W(t)$ e $Z(t)$ sono assunti due a due indipendenti. In questo modello la misura aleatoria M_ω è tale che

$$E[M_\omega(dt,dv)] = \mu(dt,dv) = dt.[c.F(dv)] = dt.\lambda(dv),$$

ove F è la comune distribuzione degli incrementi V_i e $\lambda(dv)$ è la misura di Lévy di $Z(t)$.

La soluzione dell'equazione 3), e quindi il relativo processo jump – diffusion, è nota come "processo di Lévy geometrico":

$$S(t) = S_0.\left[\prod_{n=1}^{N(t)} (1+V_n)\right].\exp\left\{\left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right).t + \sigma.W(t)\right\} = S_0.\exp\left\{\sum_1^{N(t)} \ln(1+V_n) + \left(a - \frac{\sigma^2}{2}\right).t + \sigma.W(t)\right\}$$

La soluzione della equazione 2), come si può vedere per esempio nella monografia di J.W. Runggaldier (3.6), è data dalla

$$X(t) = X_0 . \prod_{n=1}^{N(t)} \left[1 + j(T_n, V_n) \right] . \exp\left\{ \int_0^t (a_s - \frac{\sigma_s^2}{2}) ds + \int_0^t \sigma_s dW(s) \right\},$$

ove nel prodotto compaiono le coppie (T_n, V_n) ciascuna delle quali registra l'epoca e l'ampiezza, entrambe aleatorie, dell'ennesima discontinuità.

Non potendo approfondire il discorso in questi brevi cenni sui processi jump – diffusion ci limiteremo ora ad alcune considerazioni intuitive sulla soluzione dell'equazione 1). Se la condizione iniziale fosse $X(0) = x$ la traiettoria partirebbe da x in $t = 0$ e continuerebbe fino al tempo aleatorio T_1 della prima discontinuità con un cammino determinato dalla soluzione dell'equazione di diffusione

$$X(t) = x + \int_0^t a(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW(s) .$$

Al tempo T_1 lo stato del processo $X(T_1)$, in conseguenza della discontinuità aleatoria di ampiezza V_1, è $X(T_1) = X(T_1^-) + j\left[X(T_1^-), V_1 \right]$; da tale stato la traiettoria riparte come un cammino di diffusione fino al tempo aleatorio T_2 della seconda discontinuità di ampiezza V_2 e così via. Il tempo T_1 della prima discontinuità è definito dalla

$$T_1 = \inf \{ t > 0 : X(t^-) \neq X(t) \} .$$

Interessa anche considerare il processo jump – diffusion $X(t)$ in corrispondenza ai soli tempi delle discontinuità T_j , $j \geq 0$, con $T_0 = 0$; si può dimostrare che il processo bivariato $\left\{ \left(X_{T_j}, T_j \right) ; j \geq 0 \right\}$ è una catena di Markov .

Invitiamo il lettore che volesse approfondire le precedenti brevi considerazioni a far riferimento al testo (3.3) citato in Bibliografia.

Passeremo ora all'approccio Kolmogorov – Feller nell'analisi dei processi jump – diffusion. In esso l'evoluzione delle funzioni di transizione $Q_t(x, B)$ è descritto dalle equazioni differenziali di Kolmogorov:

equazione retrospettiva $\quad \dfrac{\partial}{\partial t} T_t f(x) = G\left[T_t f(x) \right]$, equazione prospettiva $$\frac{\partial}{\partial t} T_t f(x) = T_t\left[G f(x)\right] ,$$

ove $T_t f(x)$ indica l'operatore di transizione $E\left[f(X_t)/X_0 = x\right]$, che coincide con $Q_t(x,B)$ se $f(x) = I_B(x)$, e ove $G(.)$ indica il generatore

4) $$G[f(x)] = a(x).f'(x) + \frac{1}{2}.\sigma^2(x).f''(x) + c(x).\int_R \left[f(y) - f(x)\right].K(x,dy)$$

dell'operatore $T_t(.)$ che opera su funzioni $f \in C^2$.

Per un semplice esempio consideriamo un caso particolare del generatore 4) e precisamente quello espresso dalla

5) $$\mathrm{G}\left[f(x)\right] = -\alpha.x.f'(x) + \frac{1}{2}.f''(x) + c.\int_R \left[f(x+y) - f(x)\right] F(dy) ,$$

che si riferisce alla combinazione di un processo di diffusione di Ornstein – Uhlenbeck, caratterizzato dalle funzioni $a(x) = -\alpha.x \;\; e \;\; b(x) \equiv 1$, con un processo di Poisson composto, indipendente dal primo e caratterizzato dall'intensità c e dalla comune funzione di ripartizione delle discontinuità aleatorie $F(y)$.

Supponendo che esista per il processo $X(t)$, caratterizzato dal generatore 5), una densità di transizione $p(s,x;t,y)$, relativa al passaggio dallo stato x al tempo s allo stato y al tempo t, essa è soluzione dell'equazione retrospettiva

$$\frac{\partial}{\partial s} p(s,x;t,y) =$$

$$= \alpha.x.\frac{\partial}{\partial x} p(s,x;t,y) - \frac{1}{2}.\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(s,x;t,y) - c.p(s,x;t,y) + c.\int_R p(s,x+z \;\; ; \;\; t,y).F(dz)$$

con condizione iniziale $\lim_{s \uparrow t} p(s,x;t,y) = \delta(y-x)$.

Il lettore interessato ad avere maggiori informazioni sui processi stocastici "jump – diffusion" può far riferimento alle ultime tre indicazioni bibliografiche che introducono ai testi (3.2), (3.3) e (3.5).

ALCUNE INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

(3.1) Applebaum D. – “Lévy Processes and Stochastic Calculus.” Cambridge University Press, 2009. Second edition.

(3.2) Bremaud P. – “Point Processes and Queues: Martingale Dynamics” Springer Verlag, 1981.

(3.3) Cinlar E. – “Probability and Stochastics.” Springer, 2010.

(3.4) Merton R. – Option Pricing When The Underlying Stock Returns Are Discontinuous. Journal of Financial Economics 3, 125 – 144. North Holland P., 1976.

(3.5) Oksendal B. and Sulem A. – “Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.” Springer, 2009.

(3.6) Runggaldier J. – Jump Diffusion models. Dipartimento di Matematica Pura e Applicata dell’Università di Padova, 2002.

(3.7) Wedlin A. – Processi stocastici Jump Diffusion: aspetti probabilistici. Working Paper n. 13/2. Dipartimento di discipline matematiche, finanza matematica ed econometria dell’Università Cattolica di Milano, 2013.

(3.8) Wedlin A. – Processi stocastici Jump Diffusion: aspetti statistici. Dipartimento di Scienze economiche, aziendali, matematiche e statistiche dell’Università di Trieste, 2015.