# PROLUNGAMENTI DI CONI SIMMETRICI SU UN DOMINIO D' INTEGRITÀ (*)

di GAETANO PIZZARELLO (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si prova che ogni cono simmetrico, non massimale S su un dominio d'integrità A può essere ampliato propriamente in un cono simmetrico su A e che fra questi ampliamenti ne esiste uno ed uno soltanto che risulti totale su A. Si prova altresì che ogni cono simmetrico su A è prolungabile in unico modo in un cono simmetrico su Q (A), ottenendo così una generalizzazione di un ben noto teorema riguardante i coni totali su A.*

SUMMARY. - *Every symmetric but not maximal cone on an integral domain A admits proper extensions in symmetric cones; exactly one of these cones is a total cone on A. Furthermore, every symmetric cone on A can be imbedded in one and only one way in a symmetric cone on the field of fractions Q (A); this result generalizes a well known theorem concerning total cones on A.*

Com'è noto, nella teoria degli anelli ordinati si intende per *cono* su un anello $A$ ogni sottoinsieme non vuoto $P$ di $A$ tale che: *a*) $P$ sia parte stabile di $A$; *b*) $0 \notin P$. Il cono dicesi poi *totale* su $A$ se è soddisfatta l'ulteriore condizione: *c*) $A = P \cup \{0\} \cup (-P)$. Da tali definizioni segue che ogni cono $P$ su $A$ determina un ordinamento parziale di $A$ e che, viceversa, ogni ordinamento parziale di $A$ dà luogo ad un ben determinato cono su $A$. L'ordinamento considerato risulta poi totale se e solo se il relativo cono è totale su $A$.

(*) Pervenuto in Redazione il 3 aprile 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

Nella presente nota, dopo aver richiamato le definizioni di cono massimale e di cono simmetrico ed alcuni risultati di [1], si studiano certe questioni riguardanti la teoria dei domini d'integrità ordinati.

Si fornisce innanzi tutto (n. 3) una caratterizzazione dei coni totali su un dominio d'integrità, quali coni massimali e simmetrici al tempo stesso.

Si accerta poi (n. 4) la possibilità di ampliare ogni cono simmetrico e non massimale $S$ in un cono simmetrico $S'$ che contenga $S$ propriamente, pervenendo così a costruire delle catene ascendenti di coni simmetrici a partire da $S$. Si dimostra quindi che ogni cono simmetrico $S$ è ampliabile in uno ed un solo modo in un cono totale $T$ del quale si assegna anche una caratterizzazione dei suoi elementi. Se ne deduce che tutte le catene ascendenti di coni simmetrici, costruite a partire da $S$, possiedono un medesimo elemento massimo, dato appunto da quel cono totale $T$.

Nel n. 5 si prova infine l'esistenza e l'unicità del prolungamento di un cono simmetrico $S$ su $A$ in un cono simmetrico $S'$ sul campo delle frazioni $Q(A)$, pervenendo anche ad una caratterizzazione degli elementi di $S'$ stesso. Si generalizza così un ben noto teorema riguardante il caso in cui $S$ sia totale su $A$.

**1.** Dato un anello commutativo $A$, dicesi *cono su A* ogni sottoinsieme (non vuoto) $P$ di $A$ che non contenga lo zero e che sia parte stabile di $A$. Un cono $P$ dicesi *totale* su $A$ se $P \cup \{0\} \cup (-P) = A$, ove $-P$ denota l'insieme degli opposti degli elementi di $P$. Per definizione un cono totale su $A$ è (o determina) un ordinamento totale di $A$. Un cono $P$ su $A$ dicesi *simmetrico* se:

$\alpha$) $a, b \in A$ ; $a, b \notin P \Longrightarrow a + b \notin P$;

$\beta$) $a \in P$, $b \in A$, $ab \in P \Longrightarrow b \in P$;

$\gamma$) $P - P = A$,

ove $P - P = \{x - y \mid x, y \in P\}$, ossia il sottoanello di $A$ generato da $P$. Infine, un cono su $A$ dicesi *massimale* se è elemento massimale nell'insieme (semiordinato per inclusione) dei coni su $A$. E' immediato riconoscere che un cono totale è massimale e simmetrico. Invece un cono massimale (simmetrico) non è necessariamente simmetrico (massimale) e quindi neppure totale ([1], esempi 2.1, 2.2). Un anello $A$ contenente un cono è necessariamente infinito e, se unitario, a caratteristica nulla.

Fra i coni simmetrici su $A$ ed i coni totali sui quozienti di $A$ sussiste una relazione che è espressa dal seguente

TEOREMA (1.1) *Se $Q$ è un ideale primo di $A$ e $T$ è un cono totale su $A/Q$, allora l'insieme $S = \{x \in A \mid x + Q \in T\}$ è un cono simmetrico su $A$. Inversamente, se $S'$ è un cono simmetrico su $A$ e $Q' = \{x \in A \mid a \notin S', \ -a \notin S'\}$, allora $Q'$ è un ideale primo di $A$ e l'immagine di $S'$ in $A/Q'$ è un cono totale su $A/Q'$.*

Sarà ancora utile la seguente

DEFINIZIONE. Se $P$ è un qualunque cono su $A$, un ideale $I$ di $A$ dicesi *$P$-convesso* se $b - a \in P$, $a \in P$, $b \in I \Longrightarrow a \in I$.

Concludiamo questi richiami con il

TEOREMA (1.2) *Se $P$ è un cono su $A$, contenente un cono simmetrico $S$, allora l'ideale $Q = \{x \in A \mid x \notin S, \ -x \notin S\}$ è $P$-convesso. Se $I$ è un qualunque ideale $P$-convesso di $A$, allora o $I \subseteq Q$ oppure $Q \subseteq I$.*

**2.** Sia $P$ un cono su un anello $A$ e sia $B$ un sottoanello non nullo di $A$. E' chiaro che $P \cap B$, se non è vuoto, è un cono su $B$; lo diremo *indotto* da $P$ su $B$. Sussiste la seguente proposizione

(2.1). *Un cono $P$ su un anello $A$ è totale su $A$ se e solo se induce un cono totale su ogni sottoanello $B \neq \{0\}$ di $A$.*

E' ovvio che la condizione è sufficiente. Se poi $P$ è un cono totale su $A$ e $B$ è un qualunque sottoanello non nullo di $A$, si ha innanzitutto $P \cap B \neq \emptyset$. Inoltre $P \cap B$ è totale su $B$, appartenendo ogni elemento $x \neq 0$ di $B$ o a $P \cap B$ o a $-P \cap B = -(P \cap B)$.

COROLLARIO. *Un ordinamento parziale di un anello $A$ è totale se e solo se induce un ordinamento totale su ogni sottoanello non nullo di $A$.*

Può accadere che un cono, non totale su $A$, sia totale su un opportuno sottoanello (proprio) di $A$. Al riguardo si ha che

(2.2). *Se esiste un sottoanello di $A$ su cui $P$ è totale, esso è unico ed è dato da $P - P$.*

Infatti, se $B$ è un sottoanello del tipo richiesto, $P$ è simmetrico su $B$ e quindi $B = P - P$.

**3.** In questo numero e nei successivi, gli anelli che verranno considerati saranno supposti domini d'integrità.

TEOREMA (3.1) *Se $A$ è un dominio d'integrità, ogni cono $P$, massimale e simmetrico su $A$, è anche totale su $A$.*

Supponendo, per assurdo, che $P \cup \{0\} \cup (-P)$ sia parte propria di $A$, esisterà un elemento $\xi \in A$ tale che $\xi \neq 0$, $\xi \notin P$, $\xi \notin -P$. A norma del teor. 1.1, l'insieme $I = \{x \in A \mid x \notin P,\ -x \in P\}$ è un ideale primo di $A$; si ha allora $\xi \in I$.

Consideriamo l'insieme

$$P[\xi] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} p_i \xi^i \mid p_i \in P \cup \{0\} \right\}, \quad (p_0 \xi^0 = p_0)$$

delle espressioni razionali intere in $\xi$ a coefficienti, non tutti nulli, appartenenti a $P \cup \{0\}$. Tenuto conto che $A$ è dominio d'integrità, si riconosce subito che $P[\xi]$ è parte stabile di $A$. Inoltre $0 \notin P[\xi]$. Supposto infatti che

$$p_0 + p_1 \xi + \ldots + p_n \xi^n = 0,$$

detto $j$ il più piccolo indice tale che $p_j \neq 0$, si ha

$$p_j \xi^j + \ldots + p_n \xi^n = \xi^j (p_j + p_{j+1} \xi + \ldots + p_n \xi^{n-j}) = 0$$

e quindi, essendo $\xi \neq 0$ ed $A$ privo di divisori dello zero, $\xi^j \neq 0$ e $p_j + p_{j+1} \xi + \ldots + p_n \xi^{n-j} = 0$. Ne segue che $p_j = -p_{j+1} \xi - \ldots$ $\ldots - p_n \xi^{n-j}$, onde $p_j \in I$. Ciò è assurdo perché $p_j \in P$. Da quanto precede risulta che $P[\xi]$ è un cono su $A$. Inoltre $P[\xi]$ contiene $P$. Se poi $p \in P$, risulta $p \xi \in P[\xi]$. Se $p \xi$ appartenesse a $P$ ne seguirebbe, in forza della simmetria di $P$, che $\xi \in P$, il che è assurdo. Ciò prova che $P[\xi]$ è più ampio di $P$, contro la supposta massimalità di $P$. L'assurdo cui si perviene dimostra che $P \cup \{0\} \cup (-P) = A$, onde $P$ è totale su $A$.

Tenuto conto di quanto è stato richiamato al n. 1, si ha il

TEOREMA (3.2). *Tutti e soli i coni totali su un dominio d'integrità sono i coni massimali e simmetrici.*

L'anello degli interi relativi, il campo razionale, il campo reale ammettono un unico cono che sia e massimale e simmetrico: quello che fornisce lo (unico) ordinamento (totale) delle strutture predette.

**4.** Siano $A$ un dominio d'integrità, $S$ un cono simmetrico e non massimale su $A$ ed $I = \{x \in A \mid x \notin S, -x \notin S\}$ l'ideale primo (n. 1) determinato da $S$ nel senso del teor. 1.1. Poiché $S$ non è totale su $A$, esiste un elemento $\xi \in I - \{0\}$; l'insieme $S[\xi] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i \xi_i \mid a_i \in S \cup \{0\} \right\}$ è, come risulta dalla dimostrazione del teor. 3.1, un cono contenente propriamente $S$. Dimostreremo in più, che $S[\xi]$ è simmetrico su $A$, onde sussiste il

TEOREMA (4.1). *Se $S$ è un cono simmetrico e non massimale su un dominio d'integrità $A$, esiste un cono simmetrico $S'$ contenente propriamente $S$.*

Occorre provare che per $S[\xi]$ valgono le proprietà $\alpha$), $\beta$), $\gamma$) del n. 1.

$\alpha$) $a, b \notin S[\xi] \Longrightarrow$ i) $a, b \in -S$, oppure
ii) $a \in -S$, $b \in I - S[\xi]$, oppure
iii) $a, b \in I - S[\xi]$.

i) $a, b \in -S \Longrightarrow -a, -b \in S \Longrightarrow -(a+b) \in S \Longrightarrow a + b \notin -S \Longrightarrow a + b \notin S[\xi]$.

ii) $a \in -S$, $b \in I - S[\xi] \Longrightarrow a + b \notin S[\xi]$. Infatti $a + b \in S[\xi] \Longrightarrow a + b = p_0 + p_1 \xi + \dots + p_n \xi^n$ $(p_i \in S \cup \{0\}) \Longrightarrow b = (p_0 - a) + p_1 \xi + \dots + p_n \xi^n \in S[\xi]$ contro l'ipotesi.

iii) $a, b \in I - S[\xi] \Longrightarrow a + b \notin S[\xi]$. Infatti $a + b \in S[\xi] \Longrightarrow a + b = p_0 + p_1 \xi + \dots + p_n \xi^n \Longrightarrow (a + b) - p_0 = p_1 \xi + \dots + p_n \xi^n$. Ricordando che (n. 1) $I$ è $S[\xi]$ — convesso ed osservando che $(a + b) - p_0 \in S[\xi]$, $p_0 \in S[\xi]$, $a + b \in I$, dovrebbe essere $p_0 \in I$ il che è assurdo perché $p_0 \in S$.

$\beta$) Sia $a = p_0 + p_1 \xi + \dots + p_n \xi^n$ un qualsiasi elemento di $S[\xi]$ e $b$ un qualsiasi elemento (diverso da zero) di $A$: $ab \in S[\xi] \Longrightarrow p_0 b + p_1 b \xi + \dots + p_n b \xi^n \in S[\xi] \Longrightarrow p_i b \in S \cup \{0\}$. Ne segue che per ogni $p_i \neq 0$ è $p_i b \in S$, il che comporta che $b \in S$ quindi $b \in S[\xi]$.

$\gamma$) Ovvia, perché $S$ genera $A$ ed è contenuto in $S[\xi]$.

Osserviamo ora che se $S[\xi]$ non risulta massimale in $A$ (quindi non totale), l'insieme $J = \{x \in A \mid x \notin S[\xi], -x \notin S[\xi]\}$ è un ideale primo non nullo di $A$, contenuto (propriamente) in $I$. Scelto allora un qualsiasi elemento $\xi' \in J - \{0\}$, il cono simmetrico $S[\xi]$ è prolungabile, in modo proprio, in un cono simmetrico contenente $S[\xi]$, e così via. Possiamo allora dimostrare il

TEOREMA (4.2). *Sia $S$ un cono simmetrico e non massimale su un dominio d'integrità $A$. Comunque si assegnino $\xi_1, \dots, \xi_n \in I - \{0\}$,* *l'insieme*

$$S[\xi_1^2, \dots, \xi_n^2] = \{ \Sigma p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n} \mid p_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in S \cup \{0\}\}$$

*delle espressioni razionali in* $\xi_1^2, \dots, \xi_n^2$ *a coefficienti in* $S \cup \{0\}$ *e non tutti nulli, è un cono simmetrico contenente propriamente* $S$.

Dimostreremo il teorema per induzione rispetto ad $n$. Per $n=1$ il teorema è vero poiché si riconduce al teorema precedente. Supponiamo allora vero il teorema per gli elementi $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ e proviamo che è vero per gli elementi $\xi_1, \dots, \xi_n$. Ogni elemento di $S[\xi_1^2, \dots, \xi_n^2]$ può considerarsi come espressione razionale intera in $\xi_n^2$ con coefficienti in $S[\xi_1^2, \dots, \xi_{n-1}^2]$. Si presentano allora due casi: $\xi_n^2 \in S[\xi_1^2, \dots, \xi_{n-1}^2]$ oppure $\xi_n^2 \in I_n = \{x \in A \mid x \notin S[\xi_1^2, \dots, \xi_{n-1}^2], -x \notin S[\xi_1^2, \dots, \xi_{n-1}^2]\}$. Nel primo caso è $S[\xi_1^2, \dots, \xi_n^2] = S[\xi_1^2, \dots, \xi_{n-1}^2]$, onde $S[\xi_1^2, \dots, \xi_n^2]$ è simmetrico per l'ipotesi di induzione. Nel secondo caso, $S[\xi_1^2, \dots, \xi_n^2]$ risulta ampliamento del cono simmetrico $S[\xi_1^2, \dots, \xi_{n-1}^2]$ mediante l'elemento $\xi_n^2 \in I_n - \{0\}$. Allora, in base al teorema precedente, si conclude nel modo voluto.

A tal punto è spontaneo domandarsi se, dato un cono simmetrico e non massimale su $A$, esista un cono simmetrico $T$ che contenga $S$ e che, in più, sia massimale (quindi totale) su $A$. La risposta è affermativa. La relativa dimostrazione e la caratterizzazione degli elementi di $T$ sono fornite dal seguente

TEOREMA (4.3). *Sia* $S$ *un cono simmetrico e non totale su un dominio d'integrità* $A$. *Allora l'insieme* $T$ *delle espressioni razionali intere in* $\xi_1^2, \dots, \xi_n^2$ ($\xi_1, \dots, \xi_n \in I - \{0\}$, $n \in \mathcal{N}$) *aventi coefficienti non tutti nulli in* $S \cup \{0\}$, *è un cono totale su* $A$, *che prolunga* $S$. *Ogni prolungamento di* $S$ *in un cono totate su* $A$ *coincide con* $T$.

*Pertanto, ogni cono simmetrico su un dominio d'integrità* $A$ *è prolungabile, in uno ed un sol modo, in un cono totale su* $A$.

*a*) *$T$ è un cono su* $A$. Proviamo innanzi tutto che $0 \notin T$. Se lo zero fosse elemento di $T$ esisterebbero $n$ elementi $\xi_1, \dots, \xi_n \in I - \{0\}$ tali che $0 = \Sigma p_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n}$. Ciò è assurdo perché $\Sigma p_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \dots \xi_n^{2\alpha_n} \in S[\xi_1^2, \dots, \xi_n^2]$ (teor. 4.2) che è un cono simmetrico su $A$ (1). È poi evidente che $T$ è parte stabile di $A$.

(1) Quanto si è dimostrato fin qui assicura già che $S$ è prolungabile in un cono totale su $A$ ([2], 167-174).

*b*) *$T$ è simmetrico su $A$*. Proviamo la sola $\alpha$) del n. 1, potendosi verificare la $\beta$) e la $\gamma$) in modo del tutto anologo a come si è proceduto nel teor. 4.1. A tal fine supponiamo che per due elementi $a, b \in A$, non entrambi nulli, si abbia $a + b \in T$. Risulta allora $a + b = \Sigma\, p_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}\, \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_r^{2\alpha_r}$ che è elemento di $S\,[\xi_1^2, \dots, \xi_r^2]$. Ma, essendo $S\,[\xi_1^2, \dots, \xi_r^2]$ cono simmetrico su $A$, ne segue che almeno uno degli elementi $a, b$ appartiene ad $S\,[\xi_1^2, \dots, \xi_r^2]$ e quindi a $T$.

*c*) *$T$ è totale su $A$*. In base al teor. 3.1 basta provare che $T$ è massimale su $A$. Se così non fosse, l'ideale $\mathrm{I} = \{x \in A \mid x \notin T, - x \notin \mathrm{T}\}$ sarebbe diverso dall'ideale nullo. Detto allora $\xi$ un elemento di $I - \{0\}$ e $p$ un qualsiasi elemento di $S$, risulterebbe $p\, \xi^2 \in I$. Ciò è assurdo perché $p\, \xi^2 \in T$.

*d*) *$T$ è l'unico cono totale che prolunga $S$*. Supponiamo che esista un cono totale $T'$, prolungamento di $S$, con $T' \neq T$. Allora $T' \cap I$ è un cono totale su $I$ (prop. 2.1) e pertanto, per ogni $\xi \in I - \{0\}$, è $\xi^2 \in T' \cap I$. Considerando allora un qualunque elemento $x = \Sigma\, p_{\alpha_1 \dots \alpha_n}\, \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n}$ di $T$, si ha $x \in S \cup (T' \cap I) = T'$ onde $T \subseteq T'$. Dalla massimalità di $T$ si deduce che $T = T'$.

**5.** Siamo ora in grado di trattare il seguente problema. Dato un cono simmetrico $S$ su un dominio di integrità $A$, stabilire se $S$ è sempre prolungabile in un cono simmetrico $S'$ sul campo dei quozienti $Q(A)$. Al riguardo abbiamo anzitutto il seguente

TEOREMA (5.1). *Condizione necessaria e sufficiente affinché un cono simmetrico $S$ su un dominio d'integrità $A$ sia prolungabile in un cono simmetrico $S'$ sul campo delle frazioni $Q(A)$, è che esista un prolungamento di $S$ in un cono totale $T$ su $A$.*

Supponiamo che esista un cono simmetrico $S'$ su $Q(A)$, prolungamento del cono $S$. Sarà allora $S'$ totale su $Q(A)$ poiché l'ideale $I = \{x \in Q(A) \mid x \notin S', - x \notin S'\}$ è necessariamente nullo. Risulta allora (prop. 2.1) che $S' \cap A$ è un cono totale su $A$, che ovviamente prolunga $S$.

Viceversa, supponiamo che esista un cono totale $T$ su $A$, prolungamento di $S$. È allora ben noto ([3]) che $T$ è prolungabile in uno (ed in un sol modo) in un cono totale $S'$ su $Q(A)$. Ricordando che ogni cono totale è simmetrico (n. 1), è provata la sufficienza della condizione.

La questione posta all'inizio del presente numero trova allora risposta nel seguente

TEOREMA (5.2). *Ogni cono simmetrico $S$ su un dominio d'integrità $A$ è prolungabile in uno ed un sol modo in un cono simmetrico (quindi totale) su $Q(A)$.*

In virtù di (4.3) esiste un cono totale $T$ su $A$, prolungamento di $S$; ma allora (teor. 5.1) $T$ è prolungabile in un cono simmetrico $S'$ su $Q(A)$. Detto $S''$ un qualunque prolungamento simmetrico di $S$ su $Q(A)$, si ha che $S''$ è totale su $Q(A)$. Pertanto $S'' \cap A$ è totale su $A$ (prop. 2.1) ed avendosi $S'' \cap A \supseteq S$, da (4.3) discende che $S'' \cap A = T$. Ma allora, sempre in virtù del teorema di [3], $S'' = S'$. Il teorema è così provato.

OSSERVAZIONE. Se $T$ è prolungamento totale di $S$ su $A$ ed $S'$ è il prolungamento simmetrico di $S$ su $Q(A)$, si ha

$$S' = \left\{ \frac{a}{b} \in Q(A) \mid ab \in T \right\}.$$

Anzitutto ha senso porre $\frac{a}{b} \in S' \Longleftrightarrow ab \in T$: infatti, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow ad = bc \Longrightarrow d^2 ab = b^2 cd$. Ne segue, in virtù della $\beta$) del n. 1, che $ab \in T \Longrightarrow cd \in T$. Risulta poi $\frac{a}{b} \in S' \Longleftrightarrow b^2 \frac{a}{b} \in S' \Longleftrightarrow ab \in T$.

Essendo note le espressioni degli elementi di $T$ (teor. 4.3) ed avendosi $ab \in T \Longrightarrow a \in T$, $b \in T$ oppure $a \in -T$, $b \in -T$, rimangono caratterizzati i singoli elementi di $S'$.

Nel caso che effettivamente interessa, ossia in cui $S$ non sia anche totale su $A$, l'ideale $I = \{x \in A \mid x \notin S, -x \notin S\}$ è diverso dall'ideale nullo; quindi $T \cap I$ è un cono totale su $I$. Allora, comunque si assegnino un elemento $k \in I - \{0\}$ ed una frazione $\frac{a}{b} \in Q(A)$, risulta $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, il che comporta $Q(A) = Q(I)$. Essendo poi $ab \in T \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow k^2 ab \in T \cap I$, si ha

$$S' = \left\{ \frac{a}{b} \in Q(I) \mid ab \in T \cap I \right\}.$$

Osservando che, per $a \in I$, $b \in I$, è $ab \in T \cap I \Longleftrightarrow a \in T \cap I$, $b \in T \cap I$ oppure $a \in -(T \cap I)$, $b \in -(T \cap I)$ e che gli elementi di $T \cap I$ sono tutte e sole le espressioni del tipo $\Sigma\, p_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n} (\xi_1 \dots \xi_n \in I -$ $- \{0\}$, $n \in \mathcal{N})$ con i $p_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ in $S \cup \{0\}$ non tutti nulli e $p_{0, \dots, 0} = 0$, si ha un'ulteriore caratterizzazione degli elementi di $S'$.

## BIBLIOGRAFIA

[1] C. W. KOHLS and J. D. REID, *Orders on commutative rings*; Duke Mathematical Journal (1966).

[2] L. FUCHS, *Note on ordered groups and rings*; Fundamenta Mathematicae, 46 (1958).

[3] L. FUCHS, *Partially ordered algebraic systems*; Pergamon Press (1963).