APhEx 22, 2020 (ed. Vera Tripodi)
Ricevuto il: 03/04/2020
Accettato il: 16/09/2020
Redattore: Francesca Ervas & Paolo Labinaz

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK
N° 22, 2020

T E M I

Logica plurale

Francesca Boccuni

Scopo di questo articolo è fornire una panoramica storico-teorica sulla quantificazione plurale. *Dopo aver presentato la semantica plurale di Boolos (1984, 1985) come possibile interpretazione per la quantificazione del secondo ordine e quello che, ormai, viene inteso come un linguaggio formale autonomo, i.e. il linguaggio della logica plurale, ne verranno trattati i problemi più noti. Infine, verranno presentate alcune possibili applicazioni della logica plurale ai fondamenti della matematica e alla logica.*

INDICE

1. Introduzione

Molti linguaggi ordinari, come ad esempio l'italiano o l'inglese, presentano tipi diversi di espressioni referenziali e quantificazionali. In particolare, questi linguaggi contengono forme singolari di riferimento, come nell'esempio "Francesca è bassa", e forme plurali di riferimento, e.g. "Gianni e Mario sono felici insieme". Al contempo, italiano e inglese contengono anche forme singolari e plurali di quantificazione, come ad esempio "C'è un tuo amico alla porta" e "Alcuni tuoi amici ti stanno cercando".

La nozione di *riferimento plurale* non sarà l'oggetto di questo articolo[1], ma ci servirà solo per introdurre il tema del trattamento semantico di espressioni quantificazionali del linguaggio naturale che, almeno *prima facie*, sembrano richiedere l'utilizzo di risorse plurali. Del resto, l'inaugurazione di una semantica plurale, proposta da Boolos (1984, 1985), pur avendo scopi strettamente logico-matematici, prende le mosse esattamente dall'osservazione che nel linguaggio naturale sono presenti forme di riferimento e quantificazione che, almeno in apparenza, possiamo ricondurre al riferimento e alla quantificazione plurali.

Scopo di questo articolo è fornire una panoramica storico-teorica sul dibattito, ormai piuttosto ampio, relativo alla nozione di *quantificazione plurale*. In particolare, prendendo le mosse dall'analisi di Boolos (1984, 1985), l'articolo avrà la seguente struttura. Dopo aver presentato la semantica plurale di Boolos (1984, 1985) come possibile interpretazione per la quantificazione del secondo ordine e di quello che, ormai, viene inteso come un linguaggio formale autonomo, i.e. il linguaggio della logica plurale (§2), ne verranno trattati i problemi più noti (§3). Infine, verranno presentate alcune possibili

[1] Per una efficace panoramica sul riferimento plurale, si veda Frigerio (2012).

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA
NETWORK

applicazioni della logica plurale all'ambito della logica e dei fondamenti della matematica (§4).

2. La logica plurale

In termini molto generali, i linguaggi logici che contengono simboli per la quantificazione servono a formalizzare enunciati del linguaggio naturale che indicano generalità, come ad esempio "Tutti gli esseri umani sono mortali" e "Qualche numero naturale è primo". Un esempio noto sta nella logica dei predicati del primo ordine, in cui i quantificatori universale "Tutti" ed esistenziale "Qualche" sono catturati rispettivamente dai simboli $\forall$ e $\exists$. Come per tutti gli altri simboli primitivi del linguaggio di questa teoria[2], anche per i quantificatori è necessario fissare delle regole di buona formazione. In base a esse, è possibile stabilire se una qualsiasi concatenazione di simboli di quel linguaggio contenente occorrenze dei quantificatori sia o meno una formula ben formata—potremmo dire, in termini molto laschi, una formula sensata. In quanto tali, questi simboli sono privi di significato. Il loro uso corretto e significato vengono catturati, rispettivamente, da appropriate regole di inferenza, che ne governino l'introduzione e l'eliminazione a livello sintattico, e da una appropriata semantica. In termini generali, questo apparato costituisce la logica dei predicati del primo ordine[3].

2.1 Espressioni plurali nel linguaggio naturale e loro formalizzazione

Negli esempi precedenti, sono state utilizzate espressioni singolari e plurali del linguaggio naturale, che fossero referenziali o quantificazionali, piuttosto semplici. L'introduzione, tuttavia, di strumenti semantici che facciano utilizzo della nozione di pluralità prende avvio da due osservazioni distinte ma correlate: (a) nel linguaggio naturale, è possibile costruire enunciati che contengono termini plurali e predicati collettivi; (b) nel linguaggio naturale, è possibile formulare enunciati contenenti espressioni quantificazionali plurali:

(1) Russell e Whitehead scrissero i *Principia Mathematica*;

(2) Russell e Whitehead erano britannici;

[2] Si veda tuttavia la nota 13.

[3] E analogamente per altri linguaggi logici.

(3) Alcuni manifestanti circondarono l'edificio;

(4) Alcuni manifestanti si incamminarono verso l'uscita.

Come si noterà, mentre (2) è vero di Russell e Whitehead considerati ciascuno singolarmente, (1) è vero solo di Russell e Whitehead considerati insieme. Seguendo Frege (1914, 227), potremmo identificare la forma logica di (2) con la congiunzione:

(2^*) Russell era britannico e Whitehead era britannico,

ma non potremmo fornire una lettura simile di (1), dato che non sarebbe vero

(1^*) Russell scrisse i *Principia Mathematica* e Whitehead scrisse i *Principia Mathematica*[4].

Infatti, Frege (1914, 226), relativamente all'esempio

(2^{**}) Bunsen e Kirchhoff gettarono le basi dell'analisi spettrale,

afferma che *Bunsen e Kirchhoff* va inteso come un "tutto", benché non fornisca poi alcuna indicazione su come vada inteso questo "tutto"[5].

Allo stesso modo, (4) contiene la quantificazione esistenziale "Alcuni" che risulta vera di ciascun manifestante preso singolarmente, mentre, in (3), la quantificazione esistenziale "Alcuni" non può che essere vera di quei manifestanti considerati insieme: non avrebbe infatti senso pensare che ciascun manifestante da solo abbia circondato l'edificio, mentre è pienamente sensato ritenere che alcuni manifestanti si siano incamminati verso l'uscita ognuno per proprio conto—in sostanza, "circondare l'edificio" è un predicato collettivo, mentre "incamminarsi verso l'uscita" è un predicato che può essere utilizzato distributivamente. Anche in questo caso, supponendo che ci fosse più di un manifestante, diciamo n, potremmo leggere (4) come una congiunzione di n congiunti:

[4] Si noti che, mentre all'enunciato (2^*) è correttamente applicabile la regola di eliminazione della congiunzione, questo non accade per l'enunciato (1^*), proprio in forza del fatto che la forma logica di (2) consiste nella congiunzione di due enunciati in cui la predicazione è veridicamente applicata a ciascun individuo considerato singolarmente, mentre la forma logica di (1) richiede che la predicazione, per essere applicata veridicamente, debba applicarsi a due individui considerati collettivamente.

[5] C'è una gamma piuttosto ampia di possibili interpretazioni di quest'idea: con quel "tutto" potremmo riferirci a una somma mereologica, a un insieme oppure a un gruppo. Quest'ultima nozione va intesa in senso intuitivo, come nell'esempio "Un gruppo di manifestanti si incamminò verso l'uscita".

(4*) Esiste almeno un manifestante che si incamminò verso l'uscita, esiste un altro manifestante, non necessariamente identico al primo, che si incamminò verso l'uscita, ..., esiste un ennesimo manifestante, non necessariamente identico al primo, al secondo, ..., e all'n-1esimo manifestante, che si incamminò verso l'uscita.

Questa medesima strategia non avrebbe senso nel caso di (3):

(3*) Esiste un manifestante che circondò l'edificio, esiste un altro manifestante, non necessariamente identico al primo, che circondò l'edificio, ..., esiste un ennesimo manifestante, non necessariamente identico al primo, al secondo, ..., all'n-1esimo manifestante, che circondò l'edificio.

Se seguissimo le indicazioni di Frege, dovremmo dunque affermare che la differenza fra gli enunciati (3) e (4) stia nel fatto che, mentre (4) può essere scomposto in una serie (finita) di congiunzioni di enunciati esistenziali, (3) ci richiede di trattare la quantificazione esistenziale come si stesse riferendo a un "tutto". In altre parole, sembrerebbe che la differenza fra (3) e (4) sia che questi due enunciati contengono forme di quantificazione sostanzialmente diverse fra loro.

Ora, la quantificazione in (4) può essere facilmente catturata utilizzando le risorse del linguaggio della logica dei predicati del primo ordine: (4) ci assicura che almeno un manifestante si incamminò verso l'uscita, per cui la sua forma logica risulta essere $\exists x(Mx \land Ix)$[6]. Ma se la quantificazione in (4) può essere facilmente espressa in questo modo, possiamo dire lo stesso di (3), a dispetto delle osservazioni precedenti? Oppure ci sono forme di quantificazione, come quella in (3), che non possono essere ridotte alla quantificazione della logica del primo ordine? Per rispondere a questa domanda, possiamo analizzare un ulteriore enunciato e vedere che, effettivamente, esistono forme di quantificazione, quanto meno simili a quella in (3), che sono sostanzialmente diverse dalla quantificazione in (4) e richiedono linguaggi e risorse quantificazionali formali distinti.

Il caso prototipico di enunciati del linguaggio naturale simili a (3) è il cosiddetto *enunciato di Geach-Kaplan*:

(GK) Alcuni critici si ammirano solo gli uni con gli altri[7].

[6]Dove M designa la proprietà di essere un manifestante e I quella di incamminarsi verso l'uscita.

[7]Cfr. Quine (1982) e Boolos (1985).

La forma logica di GK viene espressa tramite l'enunciato del secondo ordine:

(5) $\exists F(\exists x Fx \wedge \forall x \forall y(Fx \wedge Axy \rightarrow x \neq y \wedge Fy))$.

Ci si può, tuttavia, chiedere se GK possa essere espresso anche tramite un enunciato del linguaggio della logica dei predicati del primo ordine. Se ciò non fosse, GK conterrebbe una forma di quantificazione sostanzialmente diversa da quella del primo.
Per amore di argomento, assumiamo che esista una formalizzazione di GK nel linguaggio della logica del primo ordine—con identità. Chiamiamola (5*). Se effettivamente (5*) catturasse la forma logica di GK, sotto l'assunzione che così faccia anche (5), allora (5) e (5*) dovrebbero essere logicamente equivalenti. Tuttavia, è dimostrabile che (5) non è logicamente equivalente ad alcun enunciato della logica dei predicati del primo ordine. Se, infatti, in (5) si sostituisce ad Axy la formula $x = 0 \vee x = y + 1$, (5) diventa:

(6) $\exists F(\exists x Fx \wedge \forall x \forall y(Fx \wedge (x = 0 \vee x = y+1) \rightarrow x \neq y \wedge Fy))$.

Trascuriamo la quantificazione del secondo ordine che apre (6): agli scopi della dimostrazione che segue, essa è irrilevante. Ora, (6), che altro non è che un'istanza di (5), risulta falso nel modello standard dei numeri naturali, benché sia vero in tutti i modelli non-standard dell'aritmetica. Si consideri infatti un arbitrario insieme non vuoto F di numeri naturali. Se l'elemento minimo x di F è 0, allora sia $y = 0$; altrimenti, $x = y + 1$ per qualche y. Dato che x è l'elemento minimo di F, y non è un elemento di F e Fy risulta falso. Ora, tutti gli enunciati veri della logica del primo ordine sono veri in tutti i modelli, standard o meno, delle verità del primo ordine dell'aritmetica. Ma se, come assunto, esistesse un enunciato (vero) (5*) della logica del primo ordine logicamente equivalente a (5), allora (5), come anche tutte le sue istanze, dovrebbe essere vero in ogni modello dell'aritmetica. Ma dato che non è così, (6) e, *a fortiori*, (5) non sono equivalenti ad alcun enunciato vero della logica dei predicati del primo ordine[8]. Se, quindi, (5) esprime la forma logica di GK,

[8]Per i lettori che avessero maggiore familiarità con questi temi, che (5) non possa essere ridotto a un enunciato della logica del primo ordine è dovuto alla compattezza di quest'ultima. In base al metateorema di compattezza per la logica dei predicati del primo ordine (che garantisce che, se un sottoinsieme finito di un insieme Γ di formule del linguaggio di questa logica ha un modello, allora anche Γ ha un modello), qualsiasi teoria (consistente) al primo ordine per l'aritmetica ha sia modelli standard sia modelli non standard. Ma, dato che (6) è falso nel modello standard dei numeri naturali e (6) è un'istanza di (5), quest'ultimo non è equivalente ad alcun enunciato della logica del primo ordine.

GK stesso non sarà equivalente a un enunciato della logica dei predicati del primo ordine e non sarà, quindi, esprimibile nel suo linguaggio[9].

Proprio in base alla sua inesprimibilità al primo ordine, GK viene utilizzato da Quine (1970, 1973, 1982) come esempio a conferma della tesi generale secondo cui la logica dei predicati del secondo ordine non è una teoria logica, bensì è una teoria degli insiemi mascherata da logica[10]. In termini generali, l'argomento di Quine a sostegno della compromissione ontologica dei linguaggi della logica di ordine superiore al primo può essere riassunto come segue:

(i) gli enunciati quantificati esistenzialmente di una teoria ne rivelano l'impegno ontologico[11];

(ii) gli enunciati quantificati esistenzialmente della logica del secondo ordine devono quantificare su entità di ordine superiore al primo—proprietà, concetti fregeani, classi o insiemi;

(iii) concetti e proprietà, poiché sono entità di tipo intensionale, non hanno, a differenza degli insiemi, chiari criteri di identità[12];

(iv) quindi, la logica dei predicati del secondo ordine è irrimediabilmente impegnata all'esistenza di insiemi, che forniscono i valori per la quantificazione propria di quella logica—in forza di (i)-(iii);

(v) quindi, la logica dei predicati del secondo ordine è, in realtà, una teoria degli insiemi mascherata—in forza di (iv).

GK, dunque, per il fatto di poter essere espresso solo in una logica dei predicati di ordine superiore al primo, risulta essere impegnato all'esistenza di entità di natura insiemistica.

[9] A meno che a questa logica non sia aggiunto un frammento di teoria degli insiemi. Quine (1982, 293) infatti suggerisce di tradurre GK tramite l'enunciato $\exists x(\exists y(y \in x) \wedge \forall y(y \in x \rightarrow \exists z A(y,z) \wedge \forall z(A(y,z) \rightarrow y \neq z \wedge z \in x)))$, attraverso l'utilizzo della constante predicativa binaria $\in$ per l'appartenenza insiemistica.

[10] ≪Set theory in sheep's clothing≫, per l'esattezza: si veda Quine (1970).

[11] ≪Essere è essere il valore di una variabile (vincolata)≫, direbbe Quine (1948), traduzione mia.

[12] Sono infatti ≪creature dell'oscurità≫: Quine (1956), traduzione mia. Questa assunzione è fondamentale per arrivare alla conclusione desiderata e muove dall'idea quineana che, se presunte entità non sono accompagnate da un chiaro criterio di identità, allora non siamo legittimati a postularne l'esistenza —≪no entity without identity≫, si veda Quine (1969, 23).

Per rispondere alla posizione di Quine, Boolos (1984, 1985) appronta una interpretazione per la logica dei predicati del secondo ordine che non faccia riferimento a insiemi o a entità di ordine superiore e che sia, dunque, ontologicamente innocente, allo scopo di vendicarne la logicità.

2.2 La semantica plurale di Boolos

Negli anni '80 del secolo scorso, George Boolos ebbe l'idea di applicare l'uso delle espressioni plurali alla semantica della logica formale, in particolare alla semantica della logica dei predicati del secondo ordine, mettendo così in discussione la visione tradizionale di stampo quineano relativa al suo impegno ontologico. In particolare, sostiene Boolos, non c'è ragione che le espressioni plurali del linguaggio naturale, come quelle che compaiono in GK, debbano essere modellate formalmente attraverso strumenti compromessi all'esistenza di entità matematiche. È anzi pienamente ragionevole prendere queste espressioni *at face value*. Alcune espressioni del linguaggio naturale che quantificano su individui, come nell'esempio "Esiste almeno un numero primo", sono modellate tramite gli strumenti quantificazionali della logica del primo ordine: $\exists x(Nx \wedge Px)$. La quantificazione al primo ordine viene intesa come primitiva[13] e viene interpretata *at face value*. Allo stesso modo, le espressioni quantificazionali plurali adottate nel linguaggio naturale possono essere intese come primitive e, dunque, essere modellate attraverso strumenti ad esse precipui, senza che questo richieda di introdurre un impegno ontologico a entità matematiche.

Come dicevo, l'idea di Boolos muove dalla semplice osservazione che nel linguaggio naturale esistono forme di quantificazione non necessariamente compromesse all'esistenza di entità astratte come gli insiemi e che, dunque, non c'è ragione che tali forme di quantificazione non possano essere formalizzate e utilizzate per scopi di natura logico-matematica. Prima, tuttavia, di elencare le clausole semantiche che Boolos fornisce in termini di pluralità per la logica dei predicati del secondo ordine, è necessario considerare il linguaggio di quest'ultima[14].

[13] Naturalmente, possiamo scegliere se assumere come primitiva la quantificazione universale o quella esistenziale: l'una infatti è definibile nei termini dell'altra e del connettivo di negazione. Sta di fatto, tuttavia, che una di queste forme di quantificazione deve essere assunta come primitiva.

[14] Per una efficace panoramica, fra le altre, sulla sintassi e sulla semantica della logica dei predicati del secondo ordine, si veda Shapiro (1991).

Il vocabolario del linguaggio della logica dei predicati del secondo ordine consta di: una lista infinita di variabili individuali $x, z, y, \ldots$; una lista infinita di variabili del secondo ordine $F, G, H, \ldots$; gli usuali connettivi logici $\neg, \rightarrow$[15]; quantificatori esistenziali $\exists$ per ciascun tipo di variabile[16]. L'assioma che governa la quantificazione al secondo ordine è il cosiddetto *assioma di comprensione* CA:

(CA) $\exists F \forall x(Fx \leftrightarrow \phi x)$[17],

che stabilisce l'esistenza di un F tale che F è soddisfatto da tutti gli individui x che soddisfano una arbitraria formula ϕ del linguaggio della logica del secondo ordine. Naturalmente, questa presentazione cattura solo la porzione monadica di questa logica. In realtà, in questa sede, il fatto che questa logica sia in grado di esprimere anche relazioni n-arie è dato per scontato. Possiamo, tuttavia, aggiungere al vocabolario del linguaggio della logica dei predicati del secondo ordine monadica: una lista infinita di variabili del secondo ordine n-arie $R, S, T, \ldots$ e riscrivere CA come segue:

(CA^n) $\exists R \forall x_1, \ldots, x_n(R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n))$,

dove $x_1, \ldots, x_n$ indica una n-upla di possibili argomenti di R, modulo l'arietà di R stessa, e ϕ non contiene occorrenze libere di R.

La semantica standard per il linguaggio della logica dei predicati del secondo ordine richiede che sia fissato un dominio del primo ordine D_1, contenente individui su cui variano le variabili $x, y, z, \ldots$. In questa semantica, in base al dominio del primo ordine, viene automaticamente fissato il dominio del secondo ordine D_2 che contiene tutti i possibili sottoinsiemi di individui di D_1 e su cui variano le variabili del secondo ordine. Una interpretazione del linguaggio della logica del secondo ordine, quindi, consta di una terna $< f, D_1, D_2 >$, in cui f è una funzione di assegnazione che associa alle varia-

[15] È sufficiente assumere come primitivi due connettivi logici, di cui uno sia la negazione, per poter definire gli altri. In questo caso, considero negazione e condizionale come primitivi. Da essi, è possibile ottenere congiunzione e disgiunzione tramite definizione.

[16] Per gli scopi di questa sezione, è possibile omettere dal vocabolario la considerazione delle costanti individuali e predicative.

[17] Dove ϕ non contiene occorrenze libere di F.

APhEx
PORTALE ITALIANO DI FILOSOFIA ANALITICA
GIORNALE DI FILOSOFIA NETWORK

bili del primo ordine individui di D_1 e alle variabili del secondo ordine insiemi in D_2[18].
Per amor di precisione, non è necessario che il dominio D_2 contenga *tutti* i possibili sottoinsiemi degli individui di D_1. In termini molto generali, esistono ulteriori semantiche per il linguaggio della logica del secondo ordine, in cui la quantificazione del secondo ordine è interpretata su un dominio D_2^* che, tuttavia, può contenere anche solo una parte di tutti i possibili sottoinsiemi di D_1. Queste semantiche inducono modelli che sono detti *generali* e furono introdotti da Henkin (1950). Un modello generale è determinato da un tripla $< f, D_1, D_2^* >$, in cui D_2^* è un insieme di sottoinsiemi di D_1. A differenza di quanto accade nella semantica standard, in questo caso, se il dominio del secondo ordine D_2^* contiene solo una parte di tutti i possibili sottoinsiemi di D_1, D_2^* non è automaticamente fissato in base a D_1[19]. Gli elementi di D_2^* devono essere esplicitamente indicati, in modo tale da assicurarci che le istanze rilevanti di (CA^n) risultino vere. In particolare, se un modello generale della logica dei predicati del secondo ordine rende vere tutte le istanze di (CA^n), si dice che questo modello è un *modello di Henkin*.

Tornando alla semantica plurale, l'idea di Boolos sta nel fornire una interpretazione della quantificazione del secondo ordine tale da evitare che essa richieda l'esistenza di un dominio D_2 contenente (tutti i possibili) sottoinsiemi di D_1. Boolos, infatti, per fornire le clausole di soddisfacibilità delle formule del secondo ordine, sostituisce alla funzione di assegnazione f una *relazione di assegnazione* R, che associa alle variabili del secondo ordine zero, uno o più individui di D_1. L'interpretazione plurale boolosiana per la quantificazione del secondo ordine, quindi, consta di una coppia $< R, D_1 >$, in cui scompare la necessità di avere un dominio del secondo ordine apposito.

Le clausole di soddisfacibilità delle formule del linguaggio della logica del secondo ordine, quindi, sono fornite da Boolos (1985) nei termini di una relazione di assegnazione R e di una funzione di valutazione f relativamente al dominio del primo ordine D_1—dove $\mathscr{F}$, a, b e β sono metavariabili, rispettivamente, per variabili del secondo ordine, variabili del primo e formule del linguaggio della logica dei predicati del secondo ordine:

(a) R e f soddisfano $a = b$ se, e solo se, $f(a) = f(b)$;

[18]Dato che si sta parlando di semantica standard, in realtà, l'indicazione del dominio D_2 è oziosa: il lettore non si stupisca, quindi, se in alcuni manuali o articoli su questi temi non dovesse trovare riferimento a esso. In questa sede, tuttavia, ho ritenuto più utile esplicitarlo.

[19]Nel caso limite in cui $D_2^* = D_2$, si parla di modelli *pieni*, i.e. "*full*".

(b) R e f soddisfano $\mathscr{F}a$ se, e solo se, $R < \mathscr{F}, f(a) >$;

(c) R e f soddisfano $\exists a\beta$ se, e solo se, $\exists x \exists f^*((f^*$ è una funzione di valutazione $\wedge f^*(a) = x) \wedge \forall u(u$ è una variabile del primo ordine $\wedge u \neq a \rightarrow f^*(u) = f(u)) \wedge R$ e f^* soddisfano $\beta)$;

(d) R e f soddisfano $\exists \mathscr{F} \beta$ se, e solo se, $\exists F \exists R^*(\forall x(Fx \equiv R^* < \mathscr{F}, x >) \wedge \forall U(U$ è una variabile del secondo ordine $\wedge U \neq \mathscr{F} \rightarrow \forall x(R^* < U, x > \equiv R < U, x >) \wedge R^*$ e f soddisfano $\beta)$.

2.3 Dalla semantica plurale alla logica plurale

A seguito dell'interesse suscitato dalla semantica plurale di Boolos e nonostante le inevitabili critiche che questa proposta ha attirato[20], si è assistito a un interesse sempre crescente nei confronti di questa semantica, tanto da inaugurare la costruzione di una notazione apposita, incamerata in un sistema formale a sé stante, che passa sotto il nome di *logica plurale*. Dalla mera possibilità di utilizzare una semantica alternativa a quella tradizionale per la quantificazione al secondo ordine, la semantica plurale di Boolos dà adito a un vero e proprio sistema formale, con notazione, risorse quantificazionali e assiomi precipui, atto a catturare il discorso plurale e, per queste ragioni, considerato, quanto meno dai sostenitori della logica plurale, come pienamente indipendente dalla logica dei predicati del primo e del secondo ordine.

La nuova notazione prevede che il vocabolario del nuovo linguaggio consti di: una lista infinita di variabili singolari $x, y, z, \ldots$ che variano singolarmente sul dominio del primo ordine D_1; una lista infinita di variabili plurali $xx, yy, zz, \ldots$ che variano pluralmente sul dominio D_1; una constante a due posti $\prec$ utilizzata per formare formule ben formate della forma $y \prec xx$— che esprimono il fatto che *y è uno degli xx*; i connettivi logici usuali, e.g. $\neg, \rightarrow$; quantificatori (esistenziali) $\exists$ per ciascun tipo di variabile[21]. L'assioma che governa la quantificazione plurale è *l'assioma di comprensione plurale* (PLC):

[20]Alcune di esse, quelle fondamentali, verranno trattate in §3.

[21]Come d'uso, i quantificatori universali per ciascun tipo di variabile possono essere definiti tramite negazione e quantificatori esistenziali. Inoltre, anche in questo caso, ometto la considerazione delle costanti individuali.

(PLC) $\exists xx \forall y (y \prec xx \leftrightarrow \phi y)$[22],

che stabilisce che esistono degli *xx* tali che ogni *y* è uno di essi se, e solo se, *y* soddisfa una arbitraria formula ϕ del linguaggio della logica plurale.

3. Problemi logici e filosofici

Come accennato in precedenza, la semantica plurale di Boolos ha attirato sia interesse, tanto da inaugurare una nuova formalizzazione, quanto aspre critiche. In questa sezione, prenderò in considerazione le questioni più spinose relative sia alla semantica boolosiana sia alla logica plurale, che ne è diretta erede.

3.1 Arietà della logica plurale

Notoriamente, uno dei difetti più vistosi della logica plurale sta nel fatto che essa è in grado di modellare solo una parte della logica dei predicati del secondo ordine: la sua parte monadica[23]. Si consideri infatti il principio di comprensione CA^n della logica del secondo ordine

(CA^n) $\exists R \forall x_1, \ldots, x_n (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \phi(x_1, \ldots, x_n))$.

Ebbene, la semantica plurale di Boolos e la stessa logica plurale di PLC non sono in grado di esprimere relazioni *n*-arie fra individui del dominio del primo ordine.
Secondo la semantica tradizionale, una formula che esprima una relazione, e.g., diadica $R(a,b)$ risulta essere vera in una interpretazione I se, e solo se,

[22] Si noti che l'assioma PLC non è ristretto in alcun modo—tranne per l'ovvia restrizione che *xx* non compaia in ϕ. Una istanza valida di PLC sarebbe dunque $x \prec xx \leftrightarrow x \neq x$, sarebbe cioè un'istanza che garantisce l'esistenza della pluralità vuota. Alcuni, si veda Linnebo (2017), ritengono che la vacuità non faccia parte della nozione di pluralità intuitivamente intesa e, dunque, appongono delle restrizioni a PLC tali da non poter ottenere l'esistenza della pluralità vuota. Ad esempio, è possibile riformulare PLC tramite l'assioma $\exists x \phi x \rightarrow \exists xx \forall y (y \prec xx \leftrightarrow \phi y)$, in cui l'antecedente del condizionale richiede che la formula ϕ sia soddisfatta almeno da un individuo *x*. In alternativa, è possibile aggiungere a PLC un ulteriore assioma, $\forall xx \exists y (y \prec xx)$, che garantisce che tutte le pluralità che PLC può introdurre debbano essere istanziate da almeno un individuo.

[23] In particolare, Boolos (1984, 1985) dimostra che la semantica plurale è un modello del frammento monadico della logica dei predicati del secondo ordine. La logica plurale, a sua volta, è equivalente al frammento monadico di quest'ultima.

la coppia di individui costituita da a e b è un elemento dell'insieme denotato dalla costante predicativa diadica R. In questo caso, la semantica di Boolos e la logica plurale non sono in grado di rendere conto del fatto che gli individui a e b devono essere considerati "due alla volta" per dar luogo a una pluralità di oggetti fra loro in relazione, cioè R stessa, in modo tale da fornire un modello per la formula $R(a,b)$. Per essere considerati due alla volta e, quindi, soddisfare la relazione R o il suo presunto correlato plurale, la coppia contenente a e b andrebbe intesa in uno dei modi seguenti: $i)$ (a,b) dovrebbe essere un individuo, cui riferirsi tramite un termine singolare del linguaggio che denoti una coppia; $ii)$ oppure dovrebbe essere un particolare tipo di pluralità, i.e. la pluralità che consiste nella coppia di a e b. Relativamente al caso $i)$, tuttavia, il linguaggio della logica dei predicati del secondo ordine (pura) con semantica plurale e il linguaggio della logica plurale stessa non contengono termini singolari primitivi per le coppie, poiché essi, di per sé, mancano di questo strumento linguistico. La strategia $ii)$, invece, avrebbe il difetto di non poter rendere la formula $R(a,b)$ pluralmente, tramite, ad esempio, $(a,b) \prec rr$, per il fatto che, essendo (a,b) un termine plurale primitivo, rr dovrebbe essere una pluralità di pluralità, cosa che nella semantica boolosiana e nella logica plurale non è permessa.

Né la semantica di Boolos né la logica plurale, quindi, sono in grado di esprimere relazioni, come ad esempio "essere amico di"[24]. Inoltre, *a fortiori*, la semantica boolosiana e la logica plurale non sono in grado di esprimere che due o più individui soddisfano una certa relazione *in un certo ordine* e non in un altro: se $R(a,b)$ esprime una relazione ordinata, come ad esempio "essere più alto di" o "essere maggiore di", non solo gli individui a e b dovrebbero darsi due alla volta, ma inoltre dovrebbero darsi esattamente nell'ordine espresso dalla relazione R.

A questa limitazione espressiva della semantica di Boolos e, dunque, della logica plurale è possibile ovviare in modi diversi: tramite l'affermazione che l'ordinalità è una caratteristica inerente di alcune pluralità oppure attraverso l'aggiunta di un apposito assioma che garantisca l'esistenza di coppie ordinate (si veda la sezione 3.1.1); tramite l'appello alle pluralità di ordine superiore, le cosiddette *super-pluralità* (si veda la sezione 3.1.2); aggiungendo una ulteriore teoria, la mereologia, in modo tale da poter considerare pluralità di appropriate somme mereologiche per poter esprimere, nel linguaggio della logica plurale, arietà ulteriori rispetto a quella monadica (si veda la sezione

[24] *A fortiori*, così anche per le relazioni n-arie per $n > 2$.

3.1.3). Naturalmente, è necessario valutare ciascuna di queste opzioni in base a una serie di criteri—che vedremo nella sezione 3.2.

3.1.1 Ordinalità e coppie ordinate

Si consideri l'enunciato "Nicola e Giovanni sono arrivati a casa in quest'ordine". Come detto, viste le sue limitazioni espressive, la logica plurale non è in grado di fornirne una traduzione. Recentemente, Hewitt (2012) e Ben-Yami (2013) hanno proposto di ovviare a questo problema considerando l'ordinalità come una caratteristica inerente di alcune pluralità, modellata tramite, rispettivamente, la nozione di *riferimento seriale* e di *riferimento articolato*.
Partiamo dal primo. Secondo Hewitt (2012), il contributo semantico delle espressioni plurali non è necessariamente esaurito dal riferimento a più oggetti, ma può codificare ulteriori informazioni, come ad esempio l'ordine in cui ci si riferisce a quegli oggetti—i.e. riferimento seriale. Questo, inevitabilmente, influenza anche le condizioni di verità degli enunciati contenenti predicati che siano sensibili all'ordine con cui vengono elencati i loro argomenti. Ad esempio, consideriamo l'enunciato "Sono arrivata a Milano passando, nell'ordine, da Venezia, Verona e Brescia"[25]. L'espressione "Venezia, Verona e Brescia" si riferisce a quelle tre città nell'ordine in cui sono elencate e l'enunciato risulta vero solo nel caso in cui io sia effettivamente arrivata a Milano passando da quelle tre città proprio in quell'ordine—modificarne l'ordine implicherebbe la falsità dell'enunciato stesso.
Un'ulteriore proposta di soluzione si trova in Ben-Yami (2013). Il riferimento articolato caratterizza il modo in cui un'espressione si riferisce a una pluralità di individui. In particolare, ci si riferisce alla pluralità in questione in modo articolato, se lo si fa attraverso il riferimento a sue specifiche sotto-pluralità. Ad esempio, "Nicola e Giovanni" si riferisce in modo articolato alla pluralità formata da Nicola e Giovanni, in forza del riferimento a Nicola e del riferimento a Giovanni. In questo senso, il riferimento articolato permette di tradurre nel linguaggio della logica plurale espressioni del linguaggio naturale che siano sensibili all'ordine, in base al fatto che l'ordine di articolazione fa parte dell'articolazione stessa. Ad esempio, "Nicola e Giovanni" e "Giovanni e Nicola" sono espressioni co-referenziali e articolano i loro rispettivi riferimenti nelle stesse sotto-pluralità. Tuttavia, non li articolano allo stesso modo, dato che lo fanno secondo ordini diversi. Questo permette di rendere conto

[25] Un esempio simile si trova in Hewitt (2012, 301).

del fatto che l'inter-sostituzione di espressioni co-referenziali possa rendere false certe predicazioni e vere altre: se è vero che Nicola e Giovanni sono tornati a casa in quest'ordine, sarà falso che Giovanni e Nicola siano tornati a casa in quest'ordine.

Come messo in evidenza da Florio e Nicolas (2015), tuttavia, queste soluzioni non riescono a rendere conto di *tutte* le espressioni plurali che richiedono si tenga in considerazione l'ordinalità. Ad esempio, nell'enunciato "Nicola e Giovanni sono arrivati a casa nell'ordine in cui li hai chiamati al telefono", gli ordini rilevanti sono due—l'ordine in cui Nicola e Giovanni sono arrivati a casa e l'ordine in cui sono stati chiamati al telefono. Tuttavia, Florio e Nicolas (2015) notano, sia il riferimento articolato sia il riferimento seriale impongono all'espressione plurale "Nicola e Giovanni" un solo ordine per volta. Florio e Nicolas (2015) offrono una possibile soluzione: l'ordinalità è espressa tramite una funzione che va da indici di qualche tipo, correlati a un ordine saliente (e.g. l'ordine di arrivo a casa oppure l'ordine di chiamata al telefono), agli elementi di una pluralità, rendendo, così, autonoma la semantica delle espressioni plurali rispetto alla nozione di ordinalità. Chiariamo con un esempio. Come dicevamo sopra, nell'enunciato "Nicola e Giovanni sono arrivati a casa nell'ordine in cui li hai chiamati al telefono", gli ordini rilevanti sono due: l'ordine di arrivo a casa e l'ordine di telefonata. Inoltre, affinché l'enunciato sia vero, questi due ordini devono essere, in un certo senso, identici. L'ordine di arrivo a casa è catturato da una funzione f che prende un indice temporale i come argomento e Nicola come valore e prende un indice temporale i' come argomento e Giovanni come valore—dove i e i' stanno fra loro in una appropriata relazione d'ordine come ad esempio $<$. L'ordine di telefonata è espresso da una funzione g che prende, nuovamente, un indice temporale i'' come argomento e Nicola come valore e prende un indice temporale i''' come argomento e Giovanni come valore—dove $i'' < i'''$[26]. Per stabilire che l'ordine di arrivo a casa e di chiamata al telefono è il medesimo, Florio e Nicolas (2015) forniscono un criterio di identità formulato in termini di isomorfismi.

Un'ulteriore alternativa consiste nell'assumere un assioma della coppia ordinata, utilizzato e.g. da Hewitt (2018) per scopi fondazionali relativi alla riformulazione in termini plurali del progetto neologicista in filosofia della

[26]Si noti che questo vale anche per indici non temporali. Ad esempio, in "Nicola e Giovanni mi hanno telefonato nell'ordine in cui erano in fila al botteghino del cinema", i due indici rilevanti sono l'uno temporale e l'altro spaziale. La proposta di Florio e Nicolas (2015), essendo generale, rende conto anche di questi casi.

matematica. L'assioma in questione:

(CO) $(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$[27],

garantisce che la coppia (a,b) e la coppia (c,d) siano identiche se, e solo se, il primo individuo della prima coppia è identico al primo individuo della seconda e il secondo individuo della prima è identico al secondo individuo della seconda. Come dicevo, Hewitt (2018) utilizza questo principio per scopi fondazionali all'interno del dibattito sul programma neologicista in filosofia della matematica. I dettagli dell'utilizzo che Hewitt (2018) fa di questo assioma in ambito fondazionale, in questa sede, sono irrilevanti. Quello che interessa è il fatto che la sua assunzione fornisce poliadicità alla logica plurale.

Un'ulteriore strategia sta nell'ammettere una appropriata logica monadica del *terzo* ordine, che dunque quantifichi su relazioni di relazioni, e che sia intesa come puramente logica, e.g. Lewis (1991), Hazen (1997, 2000). In questo caso, naturalmente, ci si può chiedere in che modo debba essere interpretata la quantificazione al terzo ordine, accompagnata a una interpretazione plurale delle variabili del secondo. Le strategie sono sostanzialmente due. La prima che analizzerò sarà quella fornita nei termini di pluralità di ordine superiore, i.e. i cosiddetti *super-plurali*; la seconda è, invece, fornita dalla mereologia classica di Lewis riassunta in 3.1.3.

3.1.2 Pluralità di ordine superiore

Come accennato, è possibile caratterizzare la nozione di n-upla ordinata e dare così poliadicità alla logica plurale, utilizzando il fatto che la logica monadica dei predicati del terzo ordine è in grado di esprimere la nozione di n-upla di individui. Alcuni autori, e.g. Hazen (1997), Linnebo (2003) e Rayo (2006), riscrivono questo frammento di logica del terzo ordine attraverso la nozione di *super-pluralità*—o *pluralità di secondo livello*, in base alla quale è possibile formare, parlare di e quantificare su pluralità di pluralità. Trattando, quindi, le coppie di individui come pluralità di individui e introducendo la nozione di pluralità di secondo livello, è possibile esprimere nella logica super-plurale la nozione di coppia di individui—e, conseguentemente, la nozione generale di n-upla. In base a questa concezione, quindi, nelle formule del linguaggio della logica super-plurale, le pluralità di individui possono comparire anche in posizione di argomento e non solo di predicato: è sufficiente aggiungere

[27]Questo assioma esprime la legge fondamentale delle coppie ordinate.

al linguaggio della logica plurale una lista infinita di variabili super-plurali xxx, yyy, zzz, e così via, e fornire regole di buona formazione per le formule super-plurali attraverso l'introduzione di un'ulteriore costante binaria $\prec_2$: le formule super-plurali saranno, quindi, della forma $xx \prec_2 xxx$.

3.1.3 Mereologia

Una terza strategia per sopperire alla mancanza di poliadicità della logica plurale sta nell'utilizzo della *mereologia*, come ad esempio in Lewis (1991) e Burgess and Rosen (1997). In particolare, in Lewis (1991)[28], la nozione di *fusione mereologica* è fornita in termini pluralità:

> Una fusione di alcune cose è tale se, e solo se, ha tutte queste cose come parti e nessuna sua parte è distinta da ognuna di esse[29].

Per le fusioni vale la composizionalità non ristretta, i.e. ≪[o]gniqualvolta ci siano alcune cose, allora esiste una fusione di queste cose≫[30]. Dati il singoletto di x e il singoletto di y, abbiamo garanzia dell'esistenza della loro fusione, vale a dire la coppia (non ordinata) $\{x,y\}$. In base all'introduzione della nozione di coppia non ordinata come fusione mereologica, possiamo inoltre definire la nozione di coppia ordinata (x,y) come fusione mereologica del singoletto di x e della coppia non ordinata $\{x,y\}$—vale a dire $\{\{x\},\{x,y\}\}$.

Naturalmente, il fatto che la nozione di singoletto sia intesa come primitiva può risultare sospetto. A questo proposito, si veda la sezione 4.4.

3.2 Logicità della logica plurale

Lo scopo fondamentale di Boolos nell'approntare la sua proposta di semantica plurale per la logica dei predicati del secondo ordine, come accennato, sta nello svincolare la quantificazione al secondo ordine da un presunto e inevitabile impegno ontologico nei confronti di entità matematiche quali gli insiemi. E, di fatto, Boolos era convinto che, utilizzando una semantica plurale per interpretare la quantificazione al secondo ordine, il sistema risultante potesse

[28] Per una panoramica maggiormente dettagliata relativa alla mereologia classica di Lewis, oltre a Lewis (1991), si possono vedere Borghini (2010) e Varzi (2016).

[29] Lewis (1991, 73), traduzione mia.

[30] Lewis (1991, 74), traduzione mia.

essere inteso come un sistema di *logica pura*. Chiaramente, il punto diventa, quindi, stabilire delle condizioni necessarie e, se possibile, sufficienti per fornire un criterio di logicità, in base al quale valutare, *mutatis mutandis*, la purezza della logica plurale, in particolare delle istanze del suo schema di assiomi di comprensione. Le condizioni che alcuni autori[31] solitamente accettano come condizioni necessarie, benché non sufficienti, di logicità sono riassunte dai seguenti requisiti[32]:

(Innocenza ontologica) una teoria logica non può introdurre alcun nuovo impegno ontologico—oltre quello necessario in forza della postulazione del dominio del primo ordine;

(Primato cognitivo) una teoria logica deve contenere esclusivamente nozioni che siano pienamente comprese, in particolare la comprensione di tali nozioni non deve coinvolgere o dipendere dalla comprensione di nozioni extra-logiche;

(Applicabilità universale) una teoria logica è valida in qualsiasi universo di discorso, a prescindere da quali siano gli oggetti che lo abitano;

(Invarianza sotto permutazioni) una teoria logica contiene esclusivamente nozioni che non discriminano fra oggetti di tipo differente—sono cioè *invarianti sotto permutazioni* del dominio[33].

Il requisito di *innocenza ontologica* sembra essere rispettato dalla logica plurale: oltre all'impegno ontologico nei confronti degli individui del dominio del primo ordine, non c'è impegno ontologico a entità di tipo ulteriore. Questo implica che la semantica di Boolos e la logica plurale debbano essere intese in senso prettamente nominalistico: le pluralità non esistono e il riferimento e la quantificazione plurali sono mere *façon de parler*. Questo, però, ammesso e non concesso che la semantica di Boolos e la logica plurale riescano a rendere conto della natura del riferimento e della quantificazione plurali.

[31]Ad esempio, si vedano Frege (1884) per l'applicabilità universale; Boolos (1997) e Field (1984) per l'innocenza ontologica; McGee (1996) e Tarski (1986) per l'invarianza sotto permutazioni.

[32]Si veda Linnebo (2003, 2017).

[33]Il requisito di invarianza sotto permutazioni viene chiaramente soddisfatto dai quantificatori plurali, quindi, nel prosieguo non ne terrò conto.

Infatti, alcuni autori hanno sollevato delle critiche a questa assunzione[34]. Ad esempio, Resnik (1988) afferma che non è possibile interpretare enunciati contenenti espressioni plurali senza l'appello a collezioni e, in particolare, si chiede: ≪In che modo dovremmo intendere l'espressione 'uno di essi' se non come facesse riferimento a una qualche collezione e come dicesse che il riferimento di 'uno' appartiene a essa?≫[35]. D'altro canto, Parsons (1990) critica la semantica di Boolos e, *a fortiori*, la logica plurale, ritenendo che l'interpretazione appropriata della quantificazione plurale non possa che essere ontologicamente impegnata. Ad esempio, l'espressione "Ci sono degli xx", secondo Parsons, non può che essere interpretata dall'espressione "C'è una pluralità xx", la quale svela il reale impegno ontologico implicito della quantificazione plurale. In particolare, Parsons ritiene che il valore della variabile plurale xx ad essa assegnato dalla relazione di interpretazione R sia la pluralità $\lambda xR(xx,x)$[36]: R, quindi, altro non è che la codifica di una funzione che assegna ogni variabile plurale a una pluralità di individui, dove quest'ultima deve essere un'entità di qualche tipo. Linnebo (2003), infine, afferma che, mentre la comprensione di una espressione plurale specifica, come ad esempio "i libri sulla mia scrivania", non richiede impegno ad altro che agli individui che la compongono, la comprensione della quantificazione plurale, invece, richiede la comprensione della nozione di pluralità arbitraria, per ottenere la quale è necessario fare uso di risorse combinatorie e insiemistiche. In sostanza, la nozione di sotto-pluralità richiede una precedente comprensione di cosa sia un sottoinsieme.
Una ulteriore complicazione relativa al requisito di innocenza ontologica riguarda quelle estensioni della logica plurale che servono a garantirne la poliadicità. Consideriamo l'assioma CO. Introdurre un assioma apposito per le coppie ordinate sembra indurre una forzatura relativamente al dominio del primo ordine: oltre a contenere individui qualsiasi, esso dovrebbe contenere individui con una natura peculiare, i.e. le coppie ordinate. Se, dunque, l'operatore di coppia $(,)$ aggiunge un impegno ontologico ulteriore alla logica plurale, ma, al contempo, l'interesse della logica plurale sta nella sua innocen-

[34] Resnik (1988), Parsons (1990) e, abbastanza sorprendentemente, Linnebo (2003).

[35] Resnik (1988, 77), traduzione mia.

[36] L'operatore di astrazione λ può essere utilizzato per ottenere nomi di proprietà a partire da predicati. Ad esempio, a partire dal predicato Fx, e.g. "x è rosso", tramite l'applicazione dell'operatore λ si ottiene il nome "$[\lambda x.Fx]$" della proprietà corrispondente, e.g. "[l']essere rosso". Nel caso della critica di Parsons, applicando l'operatore λ alla formula $R(xx,x)$, si ottiene il nome di una pluralità.

za ontologica, la soluzione di Hewitt (2018) potrebbe risultare inaccettabile. Affermare, invece, che esistano pluralità inerentemente ordinate, come fanno Ben-Yami (2013) e Hewitt (2012), sembra aumentare il peso metafisico almeno di alcune pluralità, quelle cioè che prevedono che i propri elementi siano presentati in un certo ordine, aggiungendo alle pluralità un carico che nel frammento monadico esse non hanno—senza contare il fatto che parlare di proprietà inerenti di una pluralità potrebbe indurre il sospetto di una presunta e implicita reificazione della stessa. D'altro canto, i super-plurali sono stati a loro volta contestati: le pluralità, si dice, sono semplicemente pluralità di oggetti, ma non c'è alcun tipo di oggetto che sia una pluralità. Ora, i super-plurali si basano crucialmente sulla legittimità della iterazione dell'operazione "pluralità di", la quale a sua volta sembra avere senso solo nel caso in cui le pluralità siano concepite come entità di qualche tipo, contro la visione nominalista di Boolos—il quale infatti sosteneva che non ci fossero pluralità di pluralità. Oltre a questa preoccupazione, se ne dà una ulteriore. Assumendo anche che fosse pienamente innocente ontologicamente introdurre i super-plurali per garantire la poliadicità della logica plurale, come i sostenitori dei super-plurali affermano, non è chiaro che sia altrettanto non problematico parlare di pluralità di oggetti *organizzati in un certo modo*, i.e. di n-uple ordinate[37]. Nella logica super-plurale, infatti, le super-pluralità sono introdotte come primitive. Si potrebbe, quindi, obiettare che la nozione di ordine sia data per assunta. Il punto non è solo garantire che le pluralità ordinate esistano, ma anche garantire che la nozione di ordine sia una nozione logica e non matematica, altrimenti la logicità dei super-plurali risulta solo apparente[38]. Se, quindi, la nozione di ordine e di pluralità ordinata non sono chiarite, difficilmente la nozione di super-pluralità potrà essere intesa come logica tanto quanto la nozione standard di pluralità (monadica) della logica plurale. Infine, aggiungere la mereologia (classica) alla logica plurale, quanto meno per lo scopo di poter introdurre le coppie ordinate, sembra a sua volta aggravare la posizione ontologica della nozione di pluralità: non solo si danno pluralità di fusioni mereologiche, ma anche si formano fusioni mereologiche

[37] Linnebo (2003), ad esempio, pensa che non sia affatto problematico utilizzare pluralità di oggetti organizzati in un certo modo.

[38] Se, inoltre, si giustificasse la nozione di pluralità ordinata attraverso un appello al linguaggio naturale, allora sarebbe necessario garantire che il frammento del linguaggio naturale utilizzato per giustificare l'introduzione delle super-pluralità non facesse uso, a sua volta, di una qualche nozione di ordine più o meno implicita, per quanto ordinaria, che fosse di natura matematica.

di pluralità: quest'ultima ipotesi sembra, a sua volta, reificare le pluralità—oltre ad aggiungere tutto il peso ontologico della mereologia classica a una teoria di cui si sta cercando di affermare l'innocenza.

La critica che Linnebo (2003) muove alla semantica di Boolos e che è applicabile anche alla logica plurale, come vedevamo, riguarda la nozione di sotto-pluralità, per comprendere la quale saremmo inevitabilmente compromessi all'esistenza di insiemi. Questa critica ha conseguenze anche per il secondo requisito per la logicità di una teoria, vale a dire il requisito di *primato cognitivo*: una teoria logica deve contenere esclusivamente nozioni che siano pienamente comprese, in particolare la comprensione di tali nozioni non deve coinvolgere o dipendere dalla comprensione di nozioni extra-logiche. Per comprendere, infatti, la nozione di sotto-pluralità, è necessario, secondo Linnebo (2003), avere una qualche comprensione anche di nozioni combinatorie e insiemistiche. Se, quindi, la nozione di sotto-pluralità è necessaria per comprendere lo schema di comprensione PLC e tale nozione, per essere compresa, richiede una qualche comprensione di nozioni combinatorie e insiemistiche, chiaramente il principio di comprensione, che regola la quantificazione plurale, non può dirsi cognitivamente prioritario.

Inoltre, secondo Linnebo (2003), l'ammissione della nozione di sotto-pluralità permetterebbe l'introduzione di ulteriori livelli di pluralità, aprendo così la quantificazione plurale alla possibilità di essere iterata indefinitamente, fino a costituire una intera gerarchia tipata di super-plurali. Dato che tale gerarchia sarebbe indefinitamente estendibile, la logica plurale mancherebbe, quindi, di soddisfare il requisito di *applicabilità universale*, dato che, ammettendo pluralità di ordine superiore, non sarebbe possibile quantificare in modo non ristretto su tutte le pluralità[39].

4. Applicazioni

In questa sezione, vedremo che, nonostante le critiche mosse alla semantica plurale di Boolos possano essere rivolte anche alla logica plurale, entrambe hanno trovato interessanti applicazioni[40].

[39] Per delle contro-obiezioni, si veda Boccuni, Carrara e Martino (2016), in particolare per la tesi che le critiche di Linnebo (2003) sono efficaci solo sotto l'assunzione che le pluralità siano entità di qualche tipo, *contra* l'affermazione boolosiana che le pluralità non sono entità. Si veda inoltre Linnebo (2017) per alcuni argomenti a favore dell'innocenza ontologica della logica plurale.

[40] In questa sede, mi limiterò a considerare la logica plurale: le considerazioni che valgono

4.1 Teoria degli insiemi

Notoriamente, l'enunciato

(7) Esiste l'insieme che contiene tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi

porta a contraddizione, una volta accompagnato da un principio di comprensione ingenuo per l'esistenza di insiemi[41]: in base a (7), è sufficiente chiedersi se l'insieme di cui si assume l'esistenza appartenga o meno a se stesso per costruire una formulazione del paradosso di Russell. Tuttavia, la situazione cambierebbe nel momento in cui affermassimo che

(8) Esiste la classe che contiene tutti gli insiemi che non sono elementi di se stessi.

Sotto alcune assunzioni aggiuntive riguardanti le classi, e.g. sotto l'assunzione di un principio di comprensione per queste entità, l'enunciato (8) è vero. Nel caso in cui si esprimessero verità generali sugli insiemi della forma di (8), si farebbe appello all'esistenza di entità simili agli insiemi, i.e. le classi, che, tuttavia, insiemi non sono. L'uso della logica plurale, in questo contesto, permette di esprimere verità della forma di (8) senza aggiungere alcun importo esistenziale a una ontologia meramente insiemistica. Infatti, tramite l'uso della logica plurale, è possibile rendere la quantificazione su classi in modo tale che essa non comprometta all'esistenza di entità ulteriori rispetto agli insiemi. Una pluralità, a differenza di una classe, non è un'entità di alcun tipo; il discorso plurale è semplicemente uno strumento ampiamente utilizzato nel linguaggio naturale, che può essere tradotto in un linguaggio formale e che non implica la compromissione a entità ulteriori rispetto agli individui che fossero elementi del dominio del primo ordine—nel caso di una traduzione di (8) nel linguaggio della logica plurale, gli individui del primo ordine sono insiemi: oltre a questo impegno ontologico, non ce ne sarebbero altri.[42]

4.2 Quantificazione non ristretta

per essa valgono anche per la semantica boolosiana.

[41] Formalmente, $\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow \phi y)$, per qualsiasi condizione ϕ che non contenga x libera. Questo principio garantirebbe che l'insieme la cui esistenza è affermata da (7) debba esistere.

[42] Cfr. e.g. Boolos (1984, 1985) e Uzquiano (2003).

In connessione con quanto detto nel paragrafo precedente, la logica plurale è stata utilizzata anche per fornire uno strumento per quantificare in modo non ristretto. In base ai paradossi insiemistici e semantici, alcuni autori ritengono che non sia possibile quantificare in modo non ristretto su tutto ciò che esiste: ogniqualvolta, infatti, quantifichiamo su un certo universo di discorso, siamo sempre in grado di estendere questo universo, i.e. il dominio di quantificazione, a un dominio più comprensivo, contenente cioè individui non contenuti nel dominio di quantificazione da cui eravamo partiti. Questo stabilirebbe, secondo questi autori, che la quantificazione che assumevamo inizialmente essere non ristretta, dopo tutto, non lo era, dando inoltre adito a continue estensioni del dominio di partenza, potenzialmente indefinitamente estendibile[43].

Questa argomentazione, tuttavia, sembra prendere le mosse da un assunto relativo alla nozione di dominio: nel momento in cui si quantifica su un dominio di entità, queste devono essere elementi di una ulteriore entità, il dominio appunto, che, se esiste, costituisce una collezione di tipo insiemistico. Si consideri un dominio di quantificazione D sugli elementi del quale sia imposta una condizione qualsiasi $\phi(x)$: la collezione degli elementi di D che soddisfano $\phi(x)$ può essere intesa come un dominio ristretto di quantificazione—relativamente a D. Ora, assumiamo che D contenga tutto ciò che esiste e che, dunque, la quantificazione su di esso sia genuinamente non ristretta. Inoltre, predichiamo degli elementi di D la condizione $x \notin x$ e chiamiamo R il dominio ristretto relativamente a D che contiene tutti quei suoi elementi che non appartengono a se stessi. Ora, il dominio R non può essere un elemento di D, pena la contraddizione: difatti, in caso R lo fosse, potremmo chiederci se esso appartenga o meno a se stesso, dando adito così una formulazione del paradosso di Russell. Tuttavia, se R non è un elemento di D, allora D non contiene tutto ciò che esiste e, dunque, la quantificazione su di esso non è genuinamente non ristretta. Gli avversari della quantificazione non ristretta concludono, quindi, che non è possibile quantificare in modo non ristretto su tutto ciò che esiste.

L'assunto in base al quale un dominio di quantificazione è dato in forma di insieme è chiamato da Cartwright (1994) *All-in-One principle*. Lo stesso Cartwright (1994) propone di abbandonare l'All-in-One principle e di interpretare il riferimento al dominio di quantificazione non come riferimento singolare a una entità di qualche tipo, bensì come una forma di riferimento plurale direttamente ai suoi elementi. Parlare di un dominio di oggetti significa sem-

[43] Si vedano, ad esempio, Dummett (1981), Glanzberg (2004), Parsons (1974, 1977) e Williamson (2003).

plicemente parlare di questi oggetti singolarmente oppure di pluralità degli stessi.

4.3 Strutturalismo eliminativo

Un'ulteriore applicazione della logica plurale alla filosofia della matematica è lo *strutturalismo eliminativo* di Hellman (1989, 1996).

In termini molto generali, lo strutturalismo in filosofia della matematica[44] si basa sull'assunto che la matematica sia una scienza di strutture: essa cioè non tratta di oggetti matematici, bensì di proprietà e relazioni di natura matematica—come ad esempio, la relazione "essere minore di". Gli oggetti matematici, lungi dall'essere entità con una natura precipua e autonoma, dipendono per la loro esistenza ed essenza dalla struttura matematica che li ospita. Si consideri, ad esempio, l'aritmetica dei numeri naturali: questa teoria riguarda una certa struttura matematica e i suoi oggetti, i.e. i numeri naturali, altro non sono che posizioni nella struttura determinata dagli assiomi. Così, ad esempio, il numero 1 non ha una natura autonoma in quanto oggetto, ma ha una natura che dipende ed è esaurita dal fatto di occupare una certa posizione nella struttura dei numeri naturali, cioè la posizione determinata da "essere il successore di 0". Naturalmente, è possibile declinare il discorso sulle strutture in modi molto diversi. Ad esempio, si può affermare che le strutture matematiche esistono platonisticamente—così come le posizioni in esse[45]; oppure se ne può avere una considerazione di tipo nominalistico, come ad esempio quella sottesa allo strutturalismo eliminativo di Hellman.

Secondo la proposta di Hellman, gli enunciati matematici che comportano l'esistenza di strutture matematiche astratte e di oggetti astratti possono essere eliminati a favore di enunciati che affermano, rispettivamente, l'esistenza possibile di *sistemi* matematici (ad esempio, il sistema matematico espresso dalla assiomatizzazione di Peano) e l'esistenza possibile di oggetti concreti. Quindi, quando si crede di parlare della struttura dei numeri naturali, in realtà, si stanno considerando tutti i possibili sistemi che sono soddisfatti dai medesimi modelli[46]. Tuttavia, in questo modo, per quanto si possa eliminare

[44]Lo strutturalismo matematico è stato declinato in diverse accezioni nel corso degli anni. Per una efficace panoramica, si veda Reck e Schiemer (2019).

[45]Un autore che sposa questa linea è Stewart Shapiro. Si veda Shapiro (1997).

[46]In forza dell'uso che Hellman fa delle nozioni modali, il suo approccio viene anche denominato *strutturalismo modale*.

il riferimento a oggetti astratti, non è affatto detto che sia possibile eliminare il riferimento anche a entità di ordine superiore, quali ad esempio classi, collezioni, relazioni o proprietà—cioè quel tipo di entità che sono cruciali per gli approcci strutturalisti. Ad esempio, per esprimere che, nella aritmetica di Peano, esiste una collezione infinita di oggetti astratti, cioè la collezione dei numeri naturali, che soddisfano gli assiomi di Peano, Hellman afferma che può esistere una collezione infinita di oggetti concreti, fra loro relati in modo tale da soddisfare gli assiomi di Peano. Chiaramente, pur non parlando più di oggetti astratti, Hellman è comunque costretto a parlare di entità presumibilmente astratte come le collezioni di oggetti concreti. A questo problema, Hellman ovvia facilmente utilizzando la logica plurale—in particolare, la semantica boolosiana per la logica dei predicati del secondo ordine, ritenuta da Hellman nominalisticamente accettabile.

4.4 Meghetologia

L'ultima applicazione della logica plurale alle teorie matematiche che intendo riassumere è proposta da Lewis (1993). Lewis fornisce una ricostruzione strutturalista della teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZFC) basata sulla mereologia classica e la logica plurale[47]. Lewis stesso chiama questa ricostruzione *meghetologia*.

In questa teoria, si possono formulare assunzioni molto forti della teoria degli insiemi, che, in particolare, corrispondono all'esistenza di cardinali inaccessibili. Questo rende possibile derivare gli usuali assiomi di ZFC dalla meghetologia lewisiana. D'altro canto, la meghetologia permette di sviluppare una formulazione strutturalista della teoria degli insiemi ZFC, in cui il ruolo degli insiemi è giocato da fusioni di individui, dato che essa è in grado di esprimere la quantificazione su relazioni, modulo alcune assunzioni sulla nozione di singoletto.

Come anticipato, il fatto che quest'ultima sia intesa come primitiva può indurre sospetti—come lamentato da Lewis stesso. Tuttavia, per gli scopi di Lewis, quello che conta di questa nozione sono esclusivamente le sue proprietà strutturali. Trasformando, quindi, la funzione di singoletto in una relazione S, è possibile, tramite ramsificazione[48], rinunciare all'idea dell'esisten-

[47] Per una panoramica su ZFC, si veda Bagaria (2019).

[48] In base alla ramsificazione, alcuni termini $t_1, \ldots, t_n$ del linguaggio di una teoria possono essere definiti, in base a generalizzazione, tramite le relazioni che intercorrono fra loro e con

za di una specifica relazione di questo tipo e accontentarsi di una qualsiasi relazione che abbia le giuste caratteristiche. Naturalmente, ora il peso della strategia di Lewis si sposta sulla possibilità di quantificare su relazioni. In questa sede, non è utile ripercorrere il percorso argomentativo lewisiano dettagliatamente: il lettore è rimandato a Carrara e Mancini (2020), che offre una introduzione alla meghetologia, e a Lewis (1993) stesso. Sia qui sufficiente indicare che ≪la quantificazione su relazioni è una quantificazione plurale su cose che codificano coppie ordinate tramite strumenti mereologici≫[49].

Grazie, quindi, all'unione di mereologia e logica plurale, oltre a una fortissima capacità espressiva, la meghetologia di Lewis riduce il discorso sugli insiemi al discorso su meri individui, dato che Lewis accetta l'assunto boolosiano in base al quale la logica plurale non introduce ulteriori impegni ontologici.

5. Conclusioni

Nel presente articolo, sono stati illustrati il razionale che sottende alla logica plurale di derivazione boolosiana e la sua resa formale e semantica (§2). Il dibattito attorno a questa logica è ancora vivissimo. Ciò, credo, è dovuto almeno a due fattori, che permettono di trarre un bilancio generale tanto negativo quanto, al contempo, positivo. Da un lato, infatti, ancora non si sono fornite soluzioni chiare e soddisfacenti ai problemi più rilevanti che la logica plurale incontra (§3)—siano essi di natura formale (ad esempio, la sua intrinseca incapacità di interpretare frammenti più ampi della mera logica del secondo ordine monadica) o di natura filosofica (in particolare, il suo statuto logico). Dall'altro, tuttavia, questa logica ha offerto e ancora offre delle applicazioni filosoficamente piuttosto interessanti nell'ambito della filosofia della matematica e della logica—alcune delle quali sono state oggetto della sezione 4. Non sembra quindi essere peregrina l'ipotesi che, al netto della disponibilità di soluzioni alle problematicità riscontrate, la logica plurale rappresenti uno strumento piuttosto proficuo per modellare questioni filosoficamente rilevanti.

Ringraziamenti. Vorrei innanzitutto ringraziare la redazione di APhEx per avermi proposto di scrivere questo contributo. In secondo luogo, ringrazio

i termini già compresi del linguaggio stesso.

[49] Lewis (1993, 222), traduzione mia.

sinceramente due revisori anonimi, i cui commenti sono stati utili a migliorare l'articolo.

Bibliografia

Bagaria J., 2019, ≪Set Theory≫, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Online: https://plato.stanford.edu/entries/set-theory.

Ben-Yami H., 2013, ≪Higher-Level Plurals versus Articulated Reference, and an Elaboration of *Salva Veritate*≫, *Dialectica* 67(1): 81–102.

Boolos G., 1984, ≪To Be Is To Be The Value of a Variable≫, *Journal of Philosophy* 81: 430–49. Ristampato in Boolos, G. (1998), *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press: Cambridge, MA, London, UK.

Boolos G., 1985, ≪Nominalist Platonism≫, Philosophical Review, 94: 327–344. Ristampato in Boolos, G. (1998), *Logic, Logic, and Logic*, Harvard University Press: Cambridge, MA, London, UK.

Boccuni F., Carrara M., Martino, E., 2016, ≪The Logicality of Second-Order Logic. An Analysis in Terms of Plural Arbitrary Reference and Acts of Choice≫, in M. Carrara, A. Arapinis, F. Moltmann (a cura di), *Unity and Plurality. Philosophy, Logic, and Semantics*, OUP: 70–89.

Borghini A., 2010, ≪David K. Lewis≫, *Aphex* 2.

Burgess J. P., Rosen G., 1997, *A Subject with No Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Carrara M., Mancini F., 2020, ≪Meghetologia≫, *Aphex* 21.

Cartwright R., 1994, ≪Speaking of Everything≫, *Noûs*, 28(1): 1–20;

Dummett M., 1981, *Frege. Philosophy of Language*, Harvard University Press, Cambridge, MA, seconda edizione.

Field H., 1984, ≪Is Mathematical Knowledge Just Logical Knowledge?", *Philosophical Review* 93(4): 509–552.

Frege G., 1884, *Foundations of Arithmetic*, traduzione di J.L. Austin, Evanston, IL: Northwestern University Press.

Frege G., 1914, ≪Logic in mathematics≫, in H. Hermes, F. Kambartel, & F. Kaulbach (a cura di), (1979), *Posthumous Writings*, Oxford, Blackwell: 203–50.

Frigerio A., 2012, ≪Riferimento plurale≫, *Aphex* 6.

Florio S., Nicolas D., 2015, ≪Plural Logic and Sensitivity to Order≫, *Australasian Journal of Philosophy* 93(3): 444–464.

Glanzberg M., 2004, ≪Quantification and Realism≫, *Philosophy and Phenomenological Report*, 69: 541–572.

Hazen A.P., 1997, ≪Relations in Lewis's Framework without Atoms≫, *Analysis*, 57(4): 243–248.

Hazen A.P., 2000, ≪Relations in Lewis's Framework without Atoms: a Correction≫, *Analysis*, 60(4): 351–353.

Hellman G., 1989, *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford: Clarendon Press.

Hellman G., 1996, ≪Structuralism without Structures≫, *Philosophia Mathematica* 4(2): 100–123.

Henkin L., 1950, ≪Completeness in the Theory of Types≫, *Journal of Symbolic Logic* 15(2): 81–91.

Hewitt S., 2012, ≪The Logic of Finite Order≫, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 53(3): 297–318.

Hewitt S., 2018, ≪T-uples all the Way Down≫, *Thought* 7: 161–169.

Lewis D., 1991, *Parts of Classes*, Oxford: Blackwell.

Lewis D., 1993, ≪Mathematics is Megethology≫, *Philosophia Mathematica* 1(1): 3–23.

Linnebo Ø., 2003, ≪Plural Quantification Exposed≫, *Noûs* 37(1): 71–92.

Linnebo Ø., 2017, ≪Plural Quantification≫, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. On-line: https://plato.stanford.edu/entries/plural-quant/.

McGee V., 1996, ≪Logical Operations≫, *Journal of Philosophical Logic* 25(6): 567–580.

Quine W.V.O., 1948, ≪On What There Is≫, *The Review of Metaphysics* 2(1): 21–38.

Quine W.V.O., 1956, ≪Quantifiers and Propositional Attitudes≫, *The Journal of Philosophy* 53(5): 177–187.

Quine W.V.O., 1969, *Ontological Relativity and Other Essays*, New York: Columbia University Press.

Quine W.V.O., 1970, *Philosophy of Logic*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

Quine W.V.O., 1973, *Roots of Reference*, La Salle, IL: Open Court.

Quine W.V.O., 1982, *Methods of Logic*, quarta edizione, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Parsons C., 1974, ≪Sets and Classes≫, *Noûs* 8: 1–12.

Parsons C., 1977, ≪What is the Iterative Conception of Set?≫, in Butts, R. & Hintikka, J. (a cura di), *Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory*, Reidel, Dordrecht.

Parsons C., 1990, ≪The Structuralist View of Mathematical Objects≫, *Synthese* 84: 303–46.

Rayo A., 2006, ≪Beyond Plurals≫, in Rayo A. e Uzquiano G. (a cura di), *Absolute Generality*, 2006, Oxford: Oxford University Press: 220–254.

Reck E., Schiemer G., 2019, ≪Structuralism in the Philosophy of Mathematics≫, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. On-line: https://plato.stanford.edu/entries/structuralism-mathematics.

Resnik M., 1988, ≪Second-Order Logic Still Wild≫, *The Journal of Philosophy* 85: 75-87.

Shapiro S., 1991, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, New York: Oxford University Press.

Shapiro S., 1991, *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press.

Tarski A., 1986, ≪What Are Logical Notions?≫, *History and Philosophy of Logic* 7(2): 143–154.

Uzquiano G., 2003, ≪Plural Quantification and Classes≫, *Philosophia Mathematica* 11(1): 67–81.

Varzi A., 2016, ≪Mereology≫, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. On-line: https://plato.stanford.edu/entries/mereology.

Williamson T., 2003, ≪Everything≫, *Philosophical Perspectives* 17(1): 415–465.