DOI: 10.13137/2039-8646/13933

Trasformazioni isometriche: un percorso didattico basato sulla manualità

LOREDANA ROSSI[*]
Liceo Scientifico "G. Galilei"
Trieste
rossilori1959@gmail.com

SUNTO

Una passeggiata fra i fiori può rappresentare un'occasione per scoprire le regole dell'armonia estetica e delle simmetrie delle figure, punto di partenza per un'esplorazione significativa delle isometrie.

PAROLE CHIAVE

SCUOLA SECONDARIA / SECONDARY SCHOOL; MATEMATICA / MATHEMATICS; DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; SIMMETRIA / SYMMETRY.

1. PREMESSA

In questo contributo esporrò brevemente un'esperienza didattica da me svolta più volte nel biennio del liceo scientifico, alla fine della classe prima o all'inizio della seconda. Tratta di un tema, le *simmetrie*, che in vario modo viene esaminato, nella scuola italiana, in tutti i segmenti di istruzione scolastica.

Per anni, consapevole delle esperienze degli anni precedenti, ho ritenuto che gli studenti avessero chiari i concetti basilari di *centro di simmetria* e *asse di simmetria di una figura* e fossero, quindi, in grado di affrontare questo tema anche da un punto di vista più generale e analitico, ragionando sulla composizione di *isometrie*, determinandone le equazioni sul piano cartesiano, esplorando il concetto di *figura invariante* rispetto a determinate trasformazioni.

[*] Componente del Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica e Geoscienze dell'Università di Trieste.

Invece ciò che ho potuto constatare è che le loro conoscenze erano deboli, insicure e anche errate. A riprova di ciò, ho potuto verificare, nella *Prova Invalsi* del 2015, che l'unica domanda alla quale tutti gli allievi di una mia classe seconda avevano risposto erroneamente riguardava proprio le *isometrie*.

Per affrontare questo tema, avendo constatato che, di fatto, è un punto di debolezza della didattica, negli anni ho sperimentato diverse metodologie, lavorando soprattutto con *software* di geometria dinamica, proponendo una serie di attività in laboratorio di informatica che consistevano nel costruire le simmetriche di determinate figure mediante opportuni comandi del software, nel comporre le *trasformazioni geometriche* osservando le figure ottenute, ciò con lo scopo di pervenire allo studio delle *isometrie del piano* a partire dal concetto di *applicazione* (*funzione*), che si affronta al biennio. Tutto questo, però, senza ottenere i risultati sperati, vale a dire senza che questa attività di fatto rinforzasse in loro il significato di isometria e di simmetria di una figura.

La proposta dell'Università di Trieste e del Civico Orto Botanico del Comune di Trieste «*Una passeggiata matematica*», elaborata da Carlo Genzo e Luciana Zuccheri[1], a cui ho aderito con i miei studenti nel 2006 e che ho riproposto anche in anni successivi, è riuscita a dare una svolta al mio approccio alla materia, evidenziando il fatto che per questo argomento è fondamentale partire da esperienze interdisciplinari che coinvolgano la manualità e che possibilmente stimolino i diversi sensi, come in questo caso, in cui si esalta il piacere per il bello attraverso l'osservazione dei fiori.

A partire da questa esperienza, in seguito in una classe ho svolto anche un percorso di approfondimento sul tema dei *gruppi* di trasformazioni, facendo riferimento al Programma di Erlangen di Klein e ricercando figure *unite* rispetto a certi gruppi finiti di isometrie. In questo contributo mi soffermerò, tuttavia, solo sui punti salienti della prima parte del lavoro.

[1] Per la proposta didattica interdisciplinare "Una passeggiata matematica", principalmente rivolta agli allievi della scuola del primo ciclo si veda: GENZO, ZUCCHERI 2006.

2. Dalle simmetrie di una figura alle isometrie

Cogliendo gli spunti dell'esperienza svolta nell'Orto Botanico, ho trattato in classe il tema delle *isometrie piane*[2], partendo dal concetto di *simmetrie di una figura*. Ho preso in esame innanzitutto le osservazioni e le intuizioni dei miei studenti, mettendo a nudo le loro misconcezioni e proponendo loro strumenti di indagine sempre più sofisticati, senza offrire soluzioni precostituite.

Come anticipato, ho iniziato il percorso didattico chiedendo loro di individuare le simmetrie assiali, centrali e rotazionali di immagini bidimensionali, quali quelle di fiori e figure geometriche.

Sono poi passata alle definizioni delle *isometrie piane* (in seguito, anche come composizioni di *simmetrie assiali* definite su tutto il piano) attraverso attività manuali (piegatura del foglio, uso degli spilli e di fogli per lucidi) e, infine, con software di geometria dinamica (Cabri Géomètre o Geogebra[3]).

Sono infine ritornata a definire la *simmetria di una figura* come *l'invarianza della figura stessa rispetto a determinate isometrie*. Alla fine del percorso, si è rifatto il lavoro di riconoscimento delle simmetrie anche esaminando dipinti di pittori contemporanei.

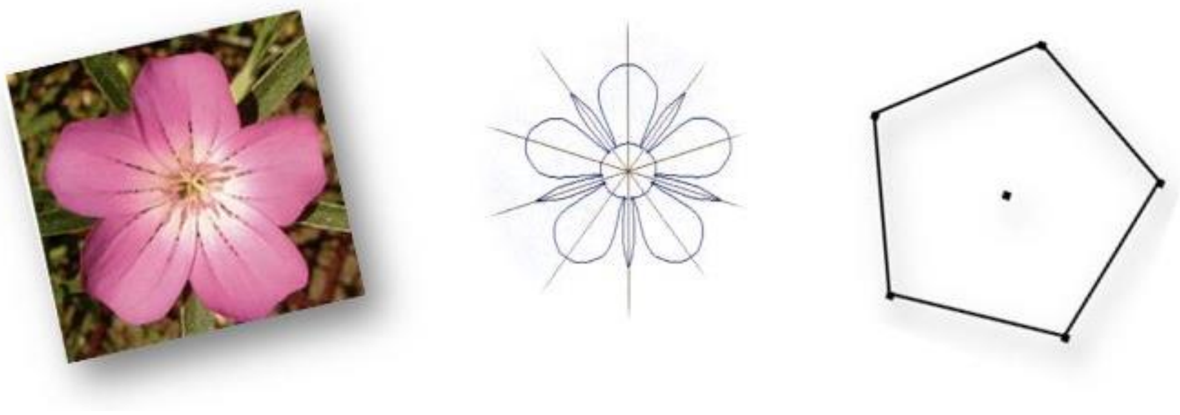

Figura 1. Esempi di immagini utilizzate per lo studio delle simmetrie. Da sinistra: una corolla dotata di *simmetria rotazionale* ma senza assi di simmetria; una corolla stilizzata, dotata di cinque assi di simmetria; una figura geometrica con cinque assi di simmetria (per le prime due da sinistra, cfr. Genzo, Zuccheri 2006).

[2] Si ricorda che un'isometria piana è una corrispondenza biunivoca del piano in se stesso, che conserva le distanze fra punti corrispondenti, cioè se $A' = f(A)$ *e* $B' = f(B)$, *allora* $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

[3] Il *software* Geogebra è gratuitamente scaricabile dal sito: <http://www.geogebra.org>.

Nell'attività di riconoscimento di simmetrie in alcune immagini riproducenti fiori e figure geometriche (v. ad es. la Figura 1) sono state usate, *senza definirle*, le parole chiave: *asse di simmetria*, *simmetria rotazionale*, *centro di simmetria*; tutto ciò doveva essere ricercato in ogni immagine.
Per lo studio dei fiori[4] sono stati forniti alcuni spunti, quali immagini stilizzate che evidenziavano - di fatto - gli assi di simmetria. Sono stati inoltre forniti, come strumenti, lucidi e spilli per verificare l'esistenza di simmetrie rotazionali. Sulle figure geometriche proposte, se si trattava di poligoni regolari, era evidenziato il centro.
Alla fine dell'attività si è chiesto agli studenti di formulare una *prima* definizione di *asse di simmetria* e *centro di simmetria*. Nessuno ha dato una risposta corretta e completa. Gli esempi più emblematici delle loro risposte sono i seguenti:

L'asse di simmetria è una retta che divide la figura geometrica in due parti uguali.

Il centro di simmetria è il punto per cui passano tutti gli assi di simmetria.

Tali definizioni, oltre a essere primitive e semplicistiche, non fanno riferimento alle trasformazioni geometriche corrispondenti, cioè la simmetria assiale e centrale[5].
Gli allievi, tra l'altro, hanno individuato assi di simmetria (in realtà inesistenti) nel parallelogramma. Errori analoghi hanno caratterizzato anche l'osservazione di altre figure.
Le loro risposte e i loro tentativi di definizione hanno rilevato soprattutto:

- la mancanza di chiarezza nella comprensione dei concetti base: *asse di simmetria* e *centro di simmetria di una figura*;
- una maggiore competenza per quanto riguarda la ricerca di *simmetrie rotazionali*, unica attività che era stata accompagnata da una verifica manuale, con l'uso dei lucidi e degli spilli.

[4] GENZO ZUCCHERI 2006, pp. 15-37.
[5] Si ricorda che, nel piano, la simmetria centrale corrisponde a una rotazione di 180° intorno a un punto *O* detto *centro di simmetria*.

A questa attività è seguita una restituzione del loro lavoro, svolto in gruppo, in cui venivano segnalati gli errori, ma non presentate le correzioni.

Ragionando con gli allievi sulla necessità di associare, come per la simmetria rotazionale, anche al concetto di *simmetria assiale* un movimento, modellizzato da un processo concreto di trasformazione, sono partita dalla *piegatura del foglio e dall'uso degli spilli* per determinare i corrispondenti dei punti delle figure, allo scopo di scoprire/riscoprire il concetto di asse di simmetria. Per questo lavoro mi sono ispirata a un percorso didattico per la scuola media inferiore elaborato da Giordana Rudes e descritto in RUDES 1984.

Partendo dalla trasformazione manuale (*piegatura del foglio lungo una linea*) si possono infatti sviluppare numerose attività di gruppo per stimolare lo studio della simmetria assiale. Inoltre, tutte le congetture che si possono trarre da questa attività sono facilmente dimostrabili e ciò è importante perché provare qualcosa che si scopre sperimentalmente ha più significato che in altri contesti, in quanto l'attività pratica stimola idee, ma non certezze, e ciò induce l'esigenza di dover provare in modo più astratto, ma anche più sicuro, quanto si ritiene corretto.

Ecco alcuni esempi di risposte dei ragazzi alle domande che ho proposto, dopo aver svolto l'attività di piegatura del foglio lungo l'asse *a* di una simmetria assiale e aver individuato il corrispondente A' di un punto A, banalmente, con lo spillo:

Congiungendo A con il suo simmetrico A' cosa noti?
- A e A' si trovano alla stessa distanza dall'asse;
- AA' è perpendicolare all'asse della simmetria;
- AA' è «bisecato» dall'asse a.

Cosa rappresenta a rispetto al segmento AA'?
- a rispetto al segmento AA' è perpendicolare e divide il segmento in parti uguali;
- a è «mediana» del segmento AA';
- a è asse di simmetria del segmento AA'.

In generale come pensi si determini il corrispondente di un punto qualsiasi P?
- È l'unico punto per cui d(A, P) = d(A, P') e PP'$\perp$ *a.*

Com'è il segmento A'B', simmetrico di AB, rispetto ad AB?
- Il segmento A'B' ha inclinazione opposta;
- A'B' è congruente al segmento AB;
- La simmetria assiale è un'isometria perché mantiene le distanze.

Come si evince, rispondendo alle domande, gli allievi hanno acquisito via via sempre maggior rigore e precisione. In questo processo non ho criticato le loro risposte, potremmo dire più ingenue, considerandolo didatticamente più opportuno: ho ritenuto, invece, importante strutturare il loro lavoro, guidandoli verso l'acquisizione del concetto e poi alla formulazione corretta dello stesso. In questo senso, il lavoro di gruppo è una buona metodologia, perché dà loro questa libertà.
Analogamente ho proceduto per altre trasformazioni isometriche del piano (*rotazioni*, *simmetria centrale* e *traslazioni*), proponendo anche la composizione di più *simmetrie assiali*, prima come attività manuale (piegature e spilli) e poi facendosi supportare in questa esplorazione dai *software* di geometria dinamica, come Cabri o Geogebra.

2.1 LA «PAGELLA» DELL'ISOMETRIA

Per giungere allo studio delle proprietà delle isometrie, riprendendo tutta una serie di conoscenze geometriche e collegandole al concetto di *funzione*[6], ho fatto costruire agli allievi una *pagella* per ogni tipo di isometria, composta, da queste indicazioni:

- *definizione/i;*
- *l'isometria è diretta o inversa;*
- *conserva ...;*
- *sono uniti i punti ...;*
- *sono unite le rette ...;*
- *vengono trasformate in se stesse le figure ...*

I miei studenti hanno proposto diverse definizioni possibili per la simmetria assiale di asse *a*; le seguenti sono alcune fra quelle da loro formulate:

> *Definizione geometrica: Dato un punto P, il suo simmetrico P' rispetto a una retta **a** è il punto P' che giace sulla perpendicolare ad **a** passante per P e considerando O il punto di intersezione tra le due rette si ha che PO ≅ P'O.*
>
> *Definizione come funzione: È una trasformazione*[7] *del piano in se stesso, dato un punto P, il suo simmetrico P' si individua nel seguente modo:*

[6] *Funzione* è il termine comunemente usato nei manuali scolastici per *applicazione*; si tratta di una corrispondenza fra due insiemi A e B in cui a ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B.

se $P \in a$, $P' \equiv P$;
se $P \notin a$, P' appartiene al semipiano opposto, $PP' \perp a$, $PP' \cap a = Q$ t.c. $QP \cong QP'$.

Ecco come hanno risposto agli altri quesiti:

In una simmetria assiale sono uniti/e[8]:
- i punti dell'asse della simmetria;
- le rette perpendicolari all'asse della simmetria.

Una simmetria assiale conserva:
- l'ampiezza degli angoli, le distanze (è infatti un'isometria);
- il parallelismo fra le rette, la direzione dell'asse[9] e della perpendicolare all'asse.

Vengono trasformate in se stesse le figure:
- che hanno tale retta come asse di simmetria.

Allo stesso modo sono state trattate la *simmetria centrale*, la *rotazione* e la *traslazione*. Infine, dopo aver corretto autonomamente i risultati del primo lavoro di gruppo, gli studenti hanno recuperato il concetto di *asse di simmetria* e *centro di simmetria* (rispetto a una simmetria centrale) di una figura, ridefinendoli nel seguente modo:

Una retta è asse di simmetria di una figura se la simmetria assiale che ha questa retta come asse trasforma la figura in se stessa.

Un punto è centro di simmetria di una figura se la simmetria centrale che ha questo punto come centro trasforma la figura in se stessa.

Come è evidente, si tratta di definizioni complesse, che rimandano a concetti altrettanto difficili, nient'affatto "costruttive", come si aspettano sempre gli studenti e come del resto avevano tentato di fare nelle loro precedenti proposte a livello "ingenuo". Per questo motivo ritengo non sia semplice la comprensione di questi concetti, nonostante la loro familiarità e il loro utilizzo nel linguaggio comune.

2.2 Come si riconosce un'isometria

Lo studio delle isometrie è proseguito con un'attività in cui, date due figure congruenti, bisognava riconoscere in che modo può aver luogo la loro trasformazione. Tale

[7] Una *trasformazione geometrica* nel piano è una *corrispondenza biunivoca* del piano in se stesso.
[8] Elemento *unito* di una trasformazione è un elemento che ha se stesso come corrispondente.
[9] Le rette parallele all'asse di simmetria si trasformano in rette a esse parallele, mantenendo perciò la stessa *direzione*.

approccio permette di vedere le cose da un altro punto di vista, riuscendo a cogliere altri aspetti che contraddistinguono le trasformazioni isometriche.

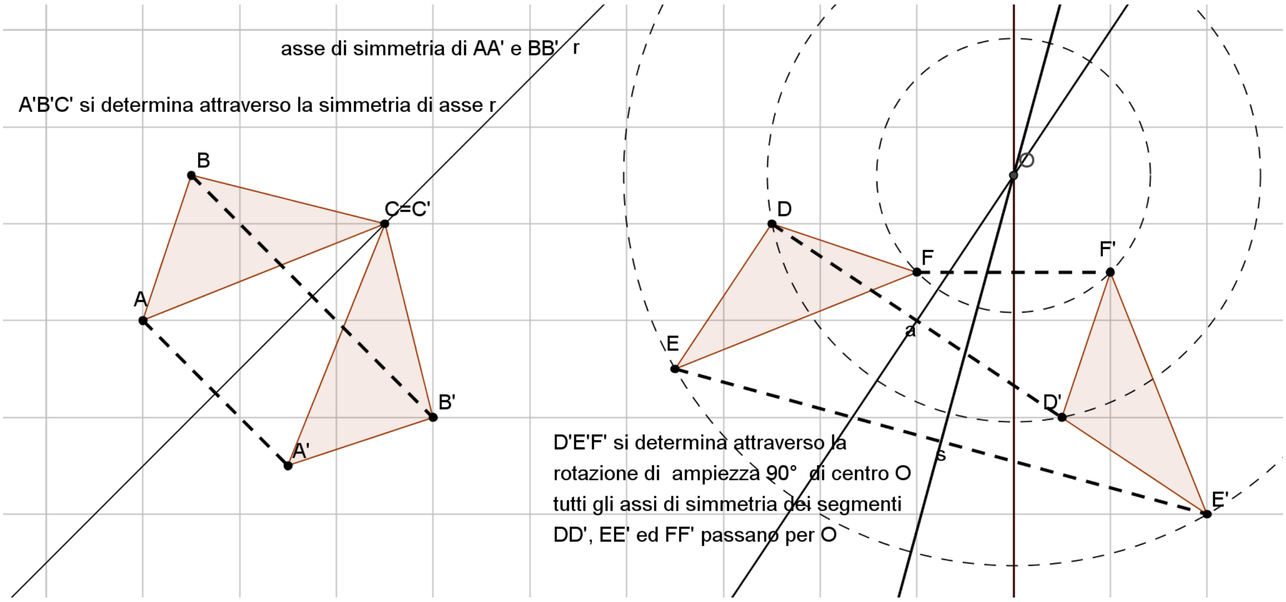

Figura 2. Esempi di figure isometriche.

Partendo da semplici esempi (v. Figura 2), il suggerimento per il riconoscimento dell'isometria è stato quello di congiungere le coppie di punti corrispondenti e osservare se *questi segmenti*:

- *sono paralleli;*
- *sono incidenti;*
- *sono congruenti;*
- *hanno assi di simmetria incidenti tutti in uno stesso punto.*

Sono state poi prese in esame situazioni più complesse, per le quali si doveva osservare prima di tutto se l'isometria era *diretta* o *inversa*[10] e osservare quante simmetrie assiali erano state composte per ottenere quella trasformazione.

Si è infine trattato il "teorema delle tre simmetrie assiali", che afferma che ogni isometria piana si può ottenere componendo al più tre simmetrie assiali; ciò è stato

[10] Per capire se un'isometria è *diretta* o *inversa* bisogna confrontare il verso di rotazione dei vertici di un triangolo e del suo trasformato. La simmetria assiale è un'isometria inversa; componendo due isometrie inverse si ottiene un'isometria diretta.

verificato sperimentalmente con un software di geometria dinamica. Questo teorema evidenzia anche che l'insieme delle isometrie ha come *generatori* le simmetrie assiali.

3. POSSIBILI SVILUPPI

In questo articolo è presente solo una traccia di un possibile percorso didattico. Basandosi sulle simmetrie, si possono ridefinire molte figure geometriche: ad esempio, la riclassificazione dei quadrilateri sulla base delle loro simmetrie potrebbe essere un utile esercizio di approfondimento geometrico da far svolgere agli studenti del biennio.

Può essere anche interessante individuare le figure *unite* rispetto a un gruppo di trasformazioni, cioè le figure che vengono trasformate in se stesse da tutte le trasformazioni del gruppo. Da questo punto di vista i *poligoni regolari* rivestono un ruolo importante; per esempio rispetto agli elementi del gruppo $R_{(O,60°)}$: *rotazioni di centro O di 0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°,* cioè rotazioni di centro O di ampiezza multipla di 60° ($R_{(O,60°)}$), i poligoni regolari trasformati in se stessi da tali rotazioni sono gli esagoni, i dodecagoni, ... di centro O, quindi in generale *poligoni regolari con un numero di lati multiplo di 6.*

Il concetto stesso di *trasformazione* si può orientare verso molteplici direzioni, si possono, ad esempio, considerare le permutazioni dei vertici di un poligono per identificare le trasformazioni isometriche della figura stessa. Ragionando, ad esempio, sulle permutazioni dei vertici di un quadrato che trasformano il quadrato in se stesso, si individuano otto permutazioni che corrispondono ad otto isometrie di vario tipo: ci sono fra queste sia rotazioni che simmetrie assiali.

Inoltre, si può ampliare il significato stesso di trasformazione, prendendo ad esempio in esame come *trasformatori di numeri* le funzioni del *gruppo ciclico infinito* $(F_q,\circ)$, generato da $f_q: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che: $f_q(x) = x + q \quad (q \in \mathbb{Z} - \{0\})$. Gli elementi di questo gruppo sono del tipo seguente:

$$f_q \circ f_q \circ \ldots \circ f_q(x) = f_q^n(x) = x + n \cdot q$$

Partendo da questo esempio, si può anche analizzare come tutte queste trasformazioni agiscono su un qualunque numero a, ritrovando la *progressione aritmetica*[11] in $\mathbb{Z}$ di valore iniziale a e ragione q.

4. CONCLUSIONI

In merito a quanto descritto e proposto nel corso del presente contributo, ancora alcune piccole riflessioni. Di *trasformazioni geometriche* si parla nelle linee guida di tutti i cicli scolastici, è un tema verticale, che non riesce, nonostante tutto, a diventare una certezza a livello conoscitivo dello studente medio e non solo.

È un argomento probabilmente lasciato a margine o trattato solo superficialmente (anche da me purtroppo qualche volta), pur essendo estremamente duttile, capace cioè di stimolare esplorazioni in tante direzioni diverse, di agganciarsi in maniera significativa a molti temi che vengono trattati. Tralasciare questo argomento rappresenta, perciò, anche la perdita di uno strumento importante, per creare significativi collegamenti fra vari segmenti della disciplina.

Inoltre, come ho cercato di evidenziare, è un argomento che più di altri ha bisogno di una trattazione di tipo laboratoriale, intendendo con tale termine non il banale utilizzo di un laboratorio informatico, ma piuttosto l'attuazione di una didattica basata sulla costruzione manuale e virtuale, sull'osservazione e sulla collaborazione fra pari, attraverso un lavoro dialettico, finalizzato a condurli a un'autentica consapevolezza nei confronti di certi concetti base che sono intuitivi, ma al contempo complessi.

Come ultima considerazione, vorrei porre l'accento sul fatto che questo argomento è aperto, lascia intravedere diversi scenari, stimolando molte domande, quesiti a cui non sempre si dà una risposta (anche per mancanza di tempo), ma questo aspetto, al contrario di ciò che si pensa, è importante soprattutto in matematica, materia in cui spesso il nostro insegnamento è volto a togliere ogni dubbio, ad

[11] $\{a + kq : k \in \mathbb{Z}\}$.

offrire solo certezze e situazioni ben determinate, non riuscendo, però, così, a far apprezzare appieno ai nostri studenti la sua incredibile versatilità.

BIBLIOGRAFIA

GENZO C., ZUCCHERI L.
2006, *Una passeggiata matematica,* Trieste, Comune di Trieste - Civico Orto Botanico, Università degli Studi di Trieste - Dipartimento di Matematica e Informatica; edizione 2005, scaricabile dal sito web <http://www.ortobotanicotrieste.it/bookshop/>.

RUDES G.
1982, *Elementi di geometria piana presentati attraverso lo studio della simmetria assiale,* «L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate» (5), 1-2, pp. 29-55.

PER APPROFONDIRE

PERMUTTI R.
1978*, Lezioni di algebra,* Trieste, Tipografia Moderna Editrice.

PRODI G.
1975*, Matematica come scoperta – per il biennio delle scuole superiori,* vol. 1, Messina-Firenze, G. D'Anna.
1977*, Matematica come scoperta – per il biennio delle scuole superiori,* vol. 2, Messina-Firenze, G. D'Anna.