DOI: 10.13137/2039-8646/34173

Probabilità: che problema![*]

LOREDANA ROSSI
Liceo Scientifico "G. Galilei"
Trieste
rossilori1959@gmail.com

ABSTRACT

The following article illustrates a workshop presentation that focuses on Probability Calculus, but not only. The problem presents itself as a sort of enigma and develops as an open problem situation in which it is necessary to find out how to optimize the result and therefore proceed by trial and error and subsequent generalizations. The enigma is eventually revealed, but like all enigmas, it still remains partly mysterious.

PAROLE CHIAVE

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ / PROBABILITY CALCULUS; GIOCO MATEMATICO / MATHEMATICAL GAME; FUNZIONE / FUNCTION; SUCCESSIONE / SEQUENCE.

1. PREMESSA

L'attività descritta nel presente contributo è parte di un Laboratorio del Piano Lauree Scientifiche a. a. 2018-2019 - progetto Matematica dell'Università di Trieste - dal titolo «Probabilità e azzardo», con referente il Prof. Lucio Torelli (cfr. Siti web). Il Liceo Scientifico "G. Galilei" di Trieste ha aderito a questo Laboratorio, che è stato svolto da quattro docenti ed era rivolto a due gruppi di allievi volontari, uno con studenti delle classi seconde (22 allievi di 15-16 anni) e uno con studenti delle classi quarte (24 allievi di 17-18 anni).

Lo scopo era quello di presentare ai partecipanti una ricca panoramica di situazioni (tipicamente scolastiche, o reali, o di gioco) in cui il calcolo delle probabilità svolge un ruolo importante. Per quanto riguarda il gruppo di studenti di quarta, ogni insegnante ha focalizzato l'attenzione su diversi temi legati al calcolo della probabilità, come ad esempio il gioco d'azzardo e relativi rischi, pericoli e misconcezioni, oppure sui

[*] *Title: Probability: what a problem!*

numerosi quesiti su tali argomenti presenti negli Esami di Stato. In particolare, nel corso di quattro incontri di due ore con gli studenti, io mi sono concentrata su alcuni problemi e interrogativi, per lo più legati a giochi d'azzardo di un tempo, che sono stati da stimolo allo sviluppo di questa disciplina[1], oltre che su alcuni giochi, come si vedrà. Nel gruppo con gli studenti di seconda si è invece lavorato maggiormente sulle basi del calcolo delle probabilità. Il prof. Torelli ci ha guidato nella progettazione generale del percorso e il Laboratorio si è concluso con un suo intervento alla presenza di tutti gli studenti, sul ruolo fondamentale della statistica e della probabilità nella medicina.

Tornando al presente contributo, l'attività esposta - che ho presentato al gruppo di studenti di quarta - consiste in un problema aperto che si presenta come un rompicapo. Spesso i problemi di calcolo delle probabilità offrono l'opportunità di mostrare situazioni che ci portano a fare delle previsioni di tipo erroneo, la scoperta di queste misconcezioni può essere sorprendente e creare quello stimolo ad andare oltre le apparenze, a scoprire quello che sta dietro e a giocare con gli elementi a disposizione.

Gli allievi coinvolti in questa attività erano studenti che avevano già appreso nel percorso curricolare tutta la teoria del calcolo delle probabilità necessaria alla risoluzione elementare di questo problema e possedevano già gli strumenti per analizzarlo, approfondirlo ed elaborarlo, tranne che per l'ultima parte.

L'attività qui descritta è stata svolta in modalità laboratoriale, nel corso di due incontri di due ore; gli allievi erano stati suddivisi in 7 gruppi di 3-4 componenti ciascuno. Una parte del tempo, alla fine, è servita a una breve presentazione delle *distribuzioni di probabilità*. Gli allievi avevano a disposizione dei computer, in cui esaminare grafici realizzati con *Geogebra* e costruire tabelle con un foglio di calcolo.

Il percorso è stato suddiviso in cinque tappe, in ognuna delle quali gli studenti dovevano presentare i risultati, fare congetture, argomentare le proprie valutazioni. Fra una tappa e l'altra, si confrontavano le elaborazioni di ogni gruppo e si discuteva collettivamente:

[1] Per alcuni esempi, cfr. VOLČIČ 2019 e ROSSI 2003.

– sulle nuove domande da porsi;
– sulle nuove variabili da utilizzare per le funzioni probabilità da definire.

2. Il problema del condannato

Si tratta di un problema di ottimizzazione, in cui si possono generalizzare con facilità i risultati particolari esprimendoli come funzioni probabilità, fino ad allargare il discorso in maniera naturale alle *distribuzioni di probabilità*[2].

Tutto questo prende spunto da un "problemino" letto in un testo di scuola media di cui ho perso la memoria, moltissimi anni fa. Problema di cui solo quando ho cominciato a insegnare al Liceo ho compreso il potenziale, dopo averlo rielaborato e trasformato in un «gioco matematico».

Un *gioco matematico* dovrebbe avere le seguenti caratteristiche:
– essere formulato in un linguaggio che escluda il più possibile il ricorso a un vocabolario matematico specialistico;
– avere un enunciato che susciti interesse e ponga una sfida per chi lo legge;
– avere una soluzione divertente.

E anche questo, come tutti i giochi, ha un enunciato molto semplice, ma le domande che suscita sono la chiave di tutto:

> *A un condannato viene data la possibilità di essere graziato nel caso in cui estragga, a occhi bendati, da un'urna che contiene 10 palline bianche e 10 nere, una pallina bianca. Il condannato chiede di avere 2 urne in cui siano distribuite in qualche modo tutte le palline e di poter scegliere l'urna da cui estrarre.*

La probabilità di avere la grazia è palesemente pari a 1/2, ma *perché chiedere 2 urne*?

Si tratta perciò di un *enigma* la cui domanda implicita è:

Può avvantaggiarlo questa situazione? E, se sì, come e quanto?

3. Prima Tappa

Ci sono perciò:
– 2 urne;
– 10 palline bianche e 10 palline nere.

[2] Per approfondire tale argomento si rimanda ad esempio a Rossi 2003.

È ovvio che il detenuto voglia mettersi nelle condizioni di migliorare le sue possibilità di avere la grazia.

Analizzando l'evento salvezza, esso è l'unione di due eventi incompatibili legati alla scelta di una delle due urne, e ciascuno di essi è un evento composto.

Se gli eventi da considerare sono:

- U_1: «viene scelta la prima urna»
- B_1: «viene estratta una pallina bianca dalla prima urna»
- U_2: «viene scelta la seconda urna»
- B_2: «viene estratta una pallina bianca dalla seconda urna»,

l'evento «Salvezza» $\boldsymbol{S}$ è dato da: $S = (U_1 \cap B_1) \cup (U_2 \cap B_2)$.

Visto che la probabilità di scegliere la pallina bianca dipende dalla distribuzione delle palline bianche fra le due urne, gli eventi composti in questa unione sono dipendenti. Conviene perciò indicare con B l'evento «viene estratta una pallina bianca» e considerare i seguenti eventi subordinati:

- B/U_1: «viene estratta una pallina bianca, avendo scelto la prima urna»
- B/U_2: «viene estratta una pallina bianca, avendo scelto la seconda urna».

Da ciò si ottiene la seguente valutazione di probabilità per *S*:

$$P(S) = P(U_1) \cdot P(B/U_1) + P(U_2) \cdot P(B/U_2)$$

Essendo la scelta delle urne casuale, possiamo porre:

$$P(U_1) = P(U_2) = 1/2$$

Qualora si distribuiscano in ugual modo le palline fra le due urne, la situazione, però, non è diversa da quella in cui ci sia un'urna soltanto, poiché risulta:

$$P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ed ecco la prima domanda che è sorta spontaneamente tra gli allievi:

Distribuendo in modo diverso le palline fra le due urne, la probabilità di S si modifica?

A questo punto i ragazzi, suddivisi in piccoli gruppi, sono stati invitati a provare liberamente a determinare la probabilità di salvezza con diverse combinazioni, in modo tale che, confrontando i tentativi di ciascuno gruppo, si potesse dedurre una legge generale per ottimizzare il risultato. Infatti, come si vedrà, in questo problema non è solo importante il modo in cui si distribuiscono le palline bianche fra le due urne, ma è altrettanto importante il modo in cui si distribuiscono quelle nere fra le due urne e quindi le prove devono essere numerose.

I ragazzi hanno presto notato che si possono inserire più palline bianche in uno dei due contenitori, ad esempio: 6 palline bianche e 4 palline nere nella prima urna e il contrario nell'altra, ma così si ottiene ancora $1/2$ come probabilità e lo stesso accade, in generale, se la distribuzione è simmetrica. Hanno quindi intuito che, perché cambi qualcosa, è necessario che il numero totale delle palline nelle due urne sia diverso.

Lasciati liberi di esplorare le varie possibilità, alcuni gruppi sono giunti a ipotizzare delle situazioni per le quali *P(S)* risultava ben superiore a $1/2$, ma per capire se si è giunti effettivamente alla combinazione che individua la probabilità massima è necessario, però, *generalizzare* il problema, considerando variabili, ad esempio, il numero delle palline bianche nella prima urna e il numero di palline totali inserite nella prima urna.

In questo caso l'esigenza di generalizzare è sorta spontaneamente e così anche la necessità di dimostrare quanto ipotizzato. In questa prima fase, la scelta delle variabili è stata veicolata da me, perché questa scelta rende più chiari i ragionamenti successivi sull'ottimizzazione delle funzioni.

Se n è il numero di palline bianche della prima urna, su un totale di d palline in questo contenitore, si ottiene:

$$P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{d} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10-n}{20-d}$$

dove si ha: $0 \leq n \leq 10,\ 1 \leq d \leq 19,\ n \leq d, 10-n \leq 20-d$.

Tale probabilità è una somma di numeri positivi e, per rendere massimo il primo addendo, d deve essere uguale a n, così il loro rapporto è 1 e quell'addendo è pari a $1/2$.

Ponendo $d = n$, il secondo addendo diventa $\frac{1}{2} \cdot \frac{10-n}{20-n}$.

Per trovare il massimo di questo fattore, si possono calcolarne tutti i valori possibili, tenendo conto contemporaneamente dei limiti di n e d, e facendo variare, perciò, n tra 1 e 10. I ragazzi hanno usato un foglio di calcolo Excel (vedi la Tabella 1), determinando il massimo in corrispondenza di $n(= d) = 1$.

Tabella 1

n	*(10-n)/(20-n)*
1	0,473684211
2	0,444444444
3	0,411764706
4	0,375
5	0,333333333
6	0,285714286
7	0,230769231
8	0,166666667
9	0,090909091
10	0

Ma si può anche osservare e dimostrare più in generale[3] che entro tali valori la successione ottenuta è decrescente, quindi il massimo si ha in corrispondenza del valore minimo di n, cioè 1.

[Questa osservazione è importante perché in un contesto finito e semplice si introduce quella regola generale per cui se la funzione è decrescente il massimo si ottiene per il valore minimo del dominio, se esiste].

Quindi la probabilità massima in tale contesto si ha per $d = n = 1$, *1 singola pallina bianca nella I urna e tutte le altre nella II*, ed è:

$$P(S)_{MAX} = \frac{1}{2} + \frac{9}{38} = \frac{28}{38} \cong 0{,}737$$

Come si vede, questa distribuzione delle palline nelle due urne è tutt'altro che neutra,

[3] La dimostrazione nel caso generale è importante perché si può facilmente generalizzare a sua volta in altri contesti e può offrirci lo spunto, successivamente, di procedere per analogia.
Bisogna dimostrare che: $\frac{10-n}{20-n} > \frac{10-(n+1)}{20-(n+1)}$. Si può moltiplicare per $(20-n)(19-n)$, visto che tale prodotto è positivo. Si ottiene che:

$$(10-n)(19-n) > (9-n)(20-n) \Leftrightarrow 190 - 10n - 19n + n^2 > 180 - 9n - 20n + n^2 \Leftrightarrow 190 > 180$$

Visto che la conclusione è vera, rifacendo i passaggi all'inverso si ottiene quanto voluto.

perché la probabilità di salvezza per il condannato aumenta moltissimo.

Quindi, in qualche modo è stato svelato l'arcano, cioè se il condannato avesse effettivamente l'opportunità di distribuire in tal modo le palline, pur scegliendo a occhi bendati l'urna, le sue possibilità di salvezza diventerebbero sorprendentemente più elevate.

Sembra tutto concluso, ma a questo punto si apre una nuova sfida:

Quale richiesta ulteriore potrebbe fare il condannato?

Si può ragionevolmente supporre che ulteriori cambiamenti della probabilità si potrebbero determinare variando forse il numero delle palline o il numero delle urne.

È nata perciò una discussione fra gli studenti che, da subito, hanno ritenuto molto più vantaggioso aumentare il numero delle urne, ma io ho veicolato il percorso chiedendo loro di considerare come tappa intermedia il calcolo della probabilità massima avendo a disposizione più palline, ovviamente sempre equamente distribuite fra bianche e nere, perché era importante al fine della completezza del ragionamento, come si vedrà poi. Quindi la prima domanda a cui si è data una risposta è la seguente:

Si potrebbe migliorare la situazione avendo a diposizione più palline?

4. SecondaTappa

Per stabilire se la situazione possa migliorare avendo a disposizione più palline, è importante partire subito individuando le variabili in gioco e generalizzando il problema. Questa volta la scelta delle variabili poteva essere più scontata, gli studenti hanno proposto come variabile il numero delle palline bianche e nere; non si poteva usare la lettera n (utilizzata precedentemente con un altro significato), si è utilizzata, perciò, la "m".

Se ci sono a disposizione T palline $(T = 2m, m \geq 1)$ e si hanno quindi m palline bianche ed m palline nere, mettendo a frutto le valutazioni precedenti, che sono valide anche in un contesto più generale (come si può dimostrare[4]), per ottenere la probabilità massima si è proceduto come segue. Posto:

– I urna, 1 pallina bianca;
– II urna, $(m-1)$ palline bianche e m palline nere.

Si è osservato che:

$$P(S)_{MAX} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{m-1}{2m-1} = \frac{3m-2}{4m-2}$$

All'aumentare di m si è esaminato l'andamento della successione così ottenuta, considerando anche la funzione di sostegno a valori in $\mathbb{R}$:

$$y = \frac{3x-2}{4x-2}\,(\text{con } x \geq 1)$$

che è una *funzione omografica*[5] con asintoto orizzontale $y = \frac{3}{4}$ e in questo ramo è crescente e sempre al di sotto dell'asintoto, come si vede nella Figura 1.

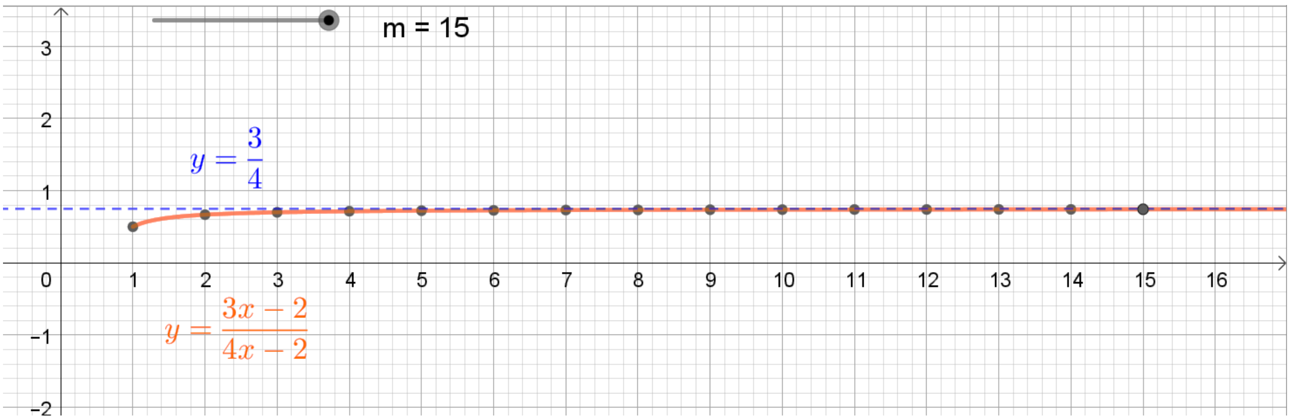

Figura 1. Grafico della funzione omografica $y = \frac{3x-2}{4x-2}$ per $x \geq 1$ e confronto con i valori della successione.

[4] La generalizzazione della dimostrazione precedente cioè che $\frac{10-n}{20-n} > \frac{10-(n+1)}{20-(n+1)}$ deve prendere in esame al posto di "10" – numero delle palline bianche e nere nel caso precedente – l'equivalente generale T/2, mentre al posto di "20" – n totale delle palline – l'equivalente generale T. Ora bisogna, perciò, dimostrare che $\frac{\left(\frac{T}{2}\right)-n}{T-n} > \frac{\left(\frac{T}{2}\right)-(n+1)}{T-(n+1)}$. Si può moltiplicare per $(T-n)(T-1-n)$ essendo tale prodotto positivo:

$$\left(\frac{T}{2}-n\right)(T-1-n) > \left(\frac{T}{2}-1-n\right)(T-n) \Leftrightarrow \frac{T^2}{2}-\frac{T}{2}-\frac{T}{2}n-Tn+n+n^2 > \frac{T^2}{2}-\frac{T}{2}n-T+n-Tn+n^2 \Leftrightarrow T > \frac{T}{2}$$

Visto che la conclusione è vera ed equivalente alla disuguaglianza iniziale, è vera anche la relazione da dimostrare.

[5] Una *funzione omografica* è una funzione del tipo $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Al variare dei quattro coefficienti a, b, c, d si possono ottenere come grafici rette o iperboli equilatere che hanno come asintoti le rette $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ come in questo caso.

A questo punto, su mio invito, utilizzando il software *Geogebra*, gli studenti, divisi in gruppi, hanno dapprima rappresentato la successione, cioè i punti di coordinate $\left(m, \frac{3m-2}{4m-2}\right)$ del grafico - utilizzando lo *slider* (m) con valori interi fra 1 e un valore massimo a loro scelta - e poi la funzione omografica di sostegno, nel tratto che a noi interessava.

Mettendo a confronto le esigenze del problema, cioè trovare un massimo, e dall'altro ciò che loro sapevano sulle caratteristiche delle funzioni omografiche, i ragazzi hanno potuto consapevolmente affermare che il valore limite (non raggiungibile) della probabilità di salvezza è 3/4, ovvero 0,75, e che non si supererà mai tale valore. La prossima domanda che gli allievi erano già pronti a considerare è quindi:

Avendo a disposizione più urne, la probabilità di salvezza migliora? E, se sì, quanto?

5. Terza Tappa

Avendo a disposizione ad esempio 3 urne e un totale T di 20 palline, con le ovvie generalizzazioni dei simboli prima usati l'evento salvezza diventa:

$$S = (U_1 \cap B_1) \cup (U_2 \cap B_2) \cup (U_3 \cap B_3)$$

Operando come nei casi precedenti, cioè distribuendo una sola pallina bianca nelle prime due urne e tutto il resto nell'ultima, è possibile massimizzare la probabilità. Gli studenti lo hanno dimostrato calcolando la probabilità di salvezza in tutti i casi possibili, non con un procedimento generale.
Si è ottenuto il seguente valore per la probabilità massima:

$$P(S)_{MAX} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{18} = \frac{22}{27} \cong 0{,}81$$

e raggiungendo addirittura un risultato migliore del valore limite individuato precedentemente con due urne.
Si è poi generalizzato, considerando però al massimo 10 urne (e sempre 20 palline).
Fissato u il numero delle urne, con $2 \leq u \leq 10$, e considerando T=20, la probabilità massima è:

$$P(S)_{MAX} = \frac{1}{u} \cdot 1 + \frac{1}{u} \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{u} \cdot \frac{10-(u-1)}{20-(u-1)} = \frac{-u^2+21u-10}{u(21-u)}$$

La successione così ottenuta, per $u = 3$ ci fornisce il valore prima calcolato.

Tutte le probabilità, anche intese come funzioni, fino a questo punto erano sempre state calcolate dai gruppi di studenti in modo corretto e condiviso, questa funzione, invece, aveva un'espressione analitica un po' più complessa e la sua elaborazione è stata collettiva, con il mio aiuto. Poi gli studenti con un foglio di calcolo hanno potuto esaminare, in questo contesto finito, cosa succede al variare del numero delle urne, tenendo conto che ha senso considerare al massimo 10 (=T/2) urne, altrimenti nelle urne oltre alla decima ci sarebbero solo palline nere con relativa probabilità di estrazione di una pallina bianca uguale a 0. Hanno così riscoperto ciò che avevano intuito nella discussione, cioè che i valori sono crescenti.

Si osservano, infatti, in questo caso valori crescenti della successione, all'interno di questo intervallo, per cui il massimo si ottiene in corrispondenza del numero massimo di urne (vedi Tabella 2). Volendo, anche questa volta, approfondire le caratteristiche della funzione di sostegno, bisognerebbe mettere in campo conoscenze di analisi che in quarta gli studenti non avevano, ma il fatto che il valore massimo della probabilità si ottiene per u uguale a 10 si può facilmente capire tenendo conto della configurazione che si ottiene in questo caso: in tutte le 10 urne c'è una pallina bianca, solo nell'ultima ci sono anche le 10 nere.

Tabella 2

u	(-u^2+21u-10)/[u(21-u)]
2	0,736842105
3	0,814814815
4	0,852941176
5	0,875
6	0,888888889
7	0,897959184
8	0,903846154
9	0,907407407
10	0,909090909

Si è provato, poi, a calcolare anche per altri valori di u maggiori di 10 l'espressione che produce P(S) (vedi grafico in Figura 2).

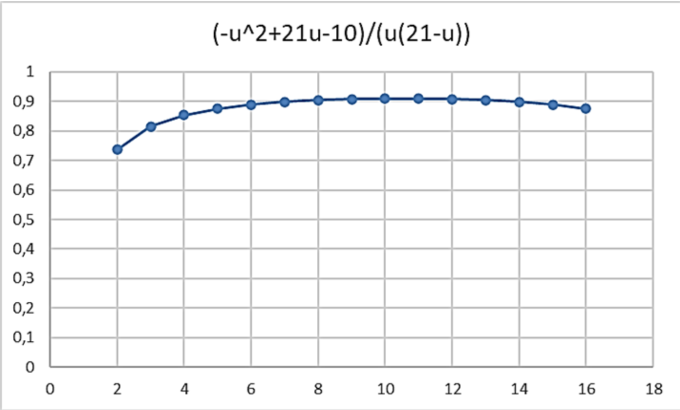

Figura 2. Grafico della funzione $f(u) = \frac{-u^2+21u-10}{u(21-u)}$ per $2 \leq u \leq 16$.

Come si vede nella Figura 2, con 20 palline e potendo utilizzare più di 10 urne, $P(S)_{MAX}$ ha un valore massimo per $u = 10$ e si ha:

$$P(S)_{MAX} = \frac{10}{11} \cong 0{,}90$$

Lo stesso valore si ottiene anche utilizzando 11 urne, mettendo nell'ultima urna solo palline nere (per cui la probabilità di estrarre da essa una pallina bianca è 0). Procedendo con un numero maggiore di urne, il valore di $P(S)_{MAX}$ diminuisce. Alcuni studenti ritenevano migliore la configurazione con 11 urne, per la quale l'espressione della probabilità massima è:

$$P(S)_{MAX} = \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{11} + \frac{0}{11} = \frac{10}{11}$$

perché ciò ci riconduce direttamente alla funzione finale, come si vedrà in seguito.
La domanda successiva d'obbligo è stata la seguente:
Avendo la massima disponibilità di palline e urne, è possibile aumentare ancora la probabilità?

6. Quarta Tappa

Per generalizzare il problema, sono state considerate m palline bianche, m palline nere e u urne. Mettendo a frutto tutte le valutazioni precedenti si è concluso che la massima probabilità di salvezza si ottiene prendendo un numero di urne pari a m ($u = m$). Si poteva utilizzare come variabile, indifferentemente, il numero delle urne o quello delle palline bianche e nere; i ragazzi hanno ritenuto opportuno considerare la variabile m e, ponendo nelle prime $(u-1)$ urne 1 pallina bianca e nell'ultima le restanti, hanno ottenuto:

$$P(S)_{MAX} = \frac{1}{m} \cdot 1 + \frac{1}{m} \cdot 1 + \cdots + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2m-(m-1)} = \frac{m^2-1+1}{m(m+1)} = \frac{m}{m+1}$$

All'aumentare di m, variabile ora illimitata, si può esaminare l'andamento della successione considerando la funzione di sostegno

$$y = \frac{x}{x+1} \ (\text{con } x \geq 1)$$

che è una funzione omografica con asintoto orizzontale $y = 1$, crescente per $x \geq 1$ e con valori ovviamente minori di 1, essendo $x < x + 1$. Anche in questa occasione gli studenti hanno, quindi, costruito la successione e il grafico della funzione omografica corrispondente dando un senso anche grafico alle conclusioni di questo lungo percorso di analisi del problema.

Perciò, come si vede nel grafico in Figura 3, all'aumentare di x la probabilità tende verso 1 (valore limite, non raggiungibile), ma già con 19 palline bianche, 19 nere e 19 urne supera 0,95.

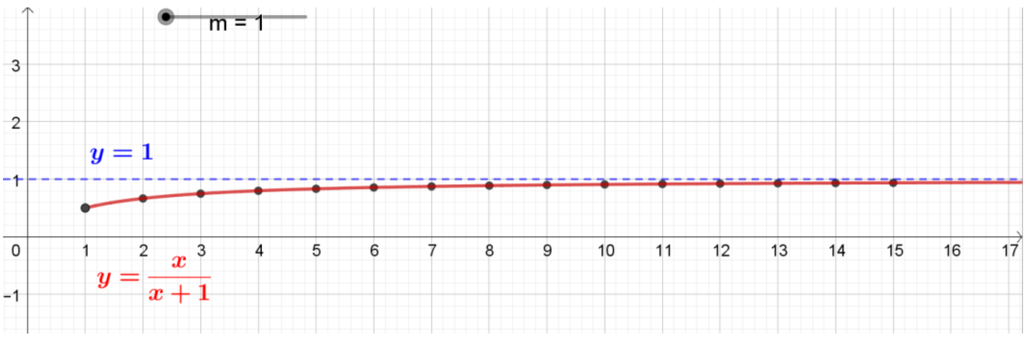

Figura 3. Grafico della funzione $y = \frac{x}{x+1}$ *per* $x \geq 1$.

Per quanto finora visto, dunque, se il condannato potesse distribuire secondo un suo criterio le palline nelle urne, avrebbe modo di avvantaggiarsi e anche molto. Non c'è la certezza della salvezza, ma si può ben sperare.

Si era concluso così il primo dei due incontri, la situazione poteva essere già soddisfacente, ma qualche ragazzo ha dichiarato che tutto questo non era credibile, perché era poco realistico pensare che un condannato potesse avere tale possibilità. E che quindi in realtà l'enigma non era stato ancora svelato.
Ci si è posti quindi questa ulteriore domanda:
Se i secondini sono molto sospettosi (o esperti di calcolo delle probabilità) e non accettano che il condannato applichi una qualsiasi strategia nella distribuzione delle palline e pretendono che la distribuzione delle 20 palline nelle urne sia del tutto casuale, è sempre vantaggioso chiedere 2 urne?

7. QUINTA TAPPA

Nel secondo incontro si è cercato di affrontare il problema più in generale, quindi, niente trucchi per migliorare la situazione, ma un esame complessivo di tutte le situazioni che si potevano presentare con gli elementi di partenza. In questa fase è stato necessario, da una parte introdurre brevemente alcuni nuovi concetti, come *variabile aleatoria* e *distribuzione di probabilità*[6], collegandoli agli studi di statistica che avevano fatto al biennio, dall'altra, essendo ora l'uso del foglio di calcolo molto più impegnativo, guidarli nella costruzione delle tabelle, passo a passo. Quindi, nel corso dell'incontro, i gruppi si sono focalizzati sulla costruzione delle varie tabelle e la discussione si è svolta solo alla fine ed è stata collettiva.
Riprendiamo in esame il caso di due urne.
Per rispondere al quesito posto alla fine del precedente paragrafo, l'impostazione qui cambia completamente, bisogna ragionare nuovamente sulle formule che esprimono, al variare della ripartizione delle palline, la relativa probabilità e confrontare questa ripartizione con la situazione di base. Tutto ciò si può fare mettendo in campo anche nuovi strumenti matematici tipici del calcolo delle probabilità (*variabile aleatoria* e *speranza matematica*, *varianza*, *scarto quadratico medio* di una *variabile aleatoria*[7]). [È

[6] Ricordiamo qui solo che, in generale, possiamo definire variabile aleatoria X una funzione che a ogni evento elementare dello spazio degli eventi associa un numero reale, cioè $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; la probabilità che la variabile aleatoria assuma valori fissati è determinata dalla probabilità dei corrispondenti eventi elementari. Per tutti gli altri concetti di calcolo delle probabilità di seguito menzionati si rimanda a un testo di base di calcolo delle probabilità, come quelli suggeriti nel § *Per approfondire*.
[7] Vedi nota precedente.

fondamentale in questo caso utilizzare un foglio di calcolo, non avrebbe senso procedere in altro modo a questo livello scolare].

Bisogna, infatti, considerare in questo caso la *variabile aleatoria discreta* i cui valori sono le probabilità di salvezza relative ad ogni suddivisione delle palline fra le due urne. Queste probabilità si possono ricavare utilizzando le formule individuate nella prima tappa del percorso. Se n è il numero di palline bianche della prima urna, su un totale di d palline in questo contenitore, si ottiene:

$$P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{d} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10-n}{20-d}$$

Ogni gruppo ha costruito con un foglio di calcolo una tabella a doppia entrata in cui si è calcolata la probabilità di salvezza relativa a ogni ripartizione delle palline nelle due urne. Tali ripartizioni sono state ora considerate assolutamente casuali e quindi equiprobabili.

Nello stabilire i limiti di variabilità di n e d si è tenuto conto di alcuni aspetti, affinché i due addendi nell'espressione di $P(S)$ abbiano un senso per il problema posto:

- $n \leq d$
- $10 - n \leq 20 - d \implies d - n \leq 10$
- $0 \leq n \leq 10$
- $0 < d < 20$

L'ultima limitazione è necessaria perché in questa situazione è implicito il fatto che il condannato debba avere la possibilità di estrarre una pallina da una delle due urne, scelte a caso, e ciò comporta che entrambe le urne non possano essere vuote.

Nella Tabella 3 sono riportati i valori delle probabilità $P(S)$ relative ai valori di d e n considerati. Da un esame di questi dati, si nota subito che ci sono tante situazioni che danno lo stesso esito probabilistico pari al 50% ($P(S) = 0{,}5$), ma che ci sono anche tante situazioni in cui si supera il 50% e altrettante in cui invece si rimane sotto al 50%.

Come si può osservare nella Tabella 3, il numero totale delle ripartizioni delle palline nelle due urne così considerate è 119. Essendo ogni configurazione equiprobabile, ciascuna delle ripartizioni ha probabilità $1/119$ di verificarsi.

Tabella 3

d \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,26316	0,73684									
2	0,27778	0,5	0,72222								
3	0,29412	0,43137	0,56863	0,70588							
4	0,3125	0,40625	0,5	0,59375	0,6875						
5	0,33333	0,4	0,46667	0,53333	0,6	0,666666667					
6	0,35714	0,40476	0,45238	0,5	0,54762	0,595238095	0,64286				
7	0,38462	0,41758	0,45055	0,48352	0,51648	0,549450549	0,58242	0,61538			
8	0,41667	0,4375	0,45833	0,47917	0,5	0,520833333	0,54167	0,5625	0,58333		
9	0,45455	0,46465	0,47475	0,48485	0,49495	0,505050505	0,51515	0,52525	0,53535	0,54545	
10	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
11		0,54545	0,53535	0,52525	0,51515	0,505050505	0,49495	0,48485	0,47475	0,46465	0,45455
12			0,58333	0,5625	0,54167	0,520833333	0,5	0,47917	0,45833	0,4375	0,41667
13				0,61538	0,58242	0,549450549	0,51648	0,48352	0,45055	0,41758	0,38462
14					0,64286	0,595238095	0,54762	0,5	0,45238	0,40476	0,35714
15						0,666666667	0,6	0,53333	0,46667	0,4	0,33333
16							0,6875	0,59375	0,5	0,40625	0,3125
17								0,70588	0,56863	0,43137	0,29412
18									0,72222	0,5	0,27778
19										0,73684	0,26316

Una volta faticosamente raggiunto questo risultato, ai ragazzi è stato chiesto di calcolare la media aritmetica di tutti i 119 valori V_i della tabella che è:

$$M = \frac{1}{119}\sum_{i=1}^{119} V_i = \frac{59{,}5}{119} = \frac{1}{2}$$

come ci si aspettava.

Inoltre, nella tabella gli studenti hanno osservato una ovvia simmetria: infatti, ogni valore di probabilità diverso da 0,5 si ottiene nelle due situazioni simmetriche che corrispondono alle ripartizioni: (d, n) e $(20 - d, 10 - n)$.

L'obiettivo quindi è stato quello di riordinare i dati della Tabella 3, andando così a definire una *variabile aleatoria*[8] X che ha come determinazioni X_i i valori (distinti) della probabilità di salvezza prima tabulati.

Considerando, per ognuno dei valori numerici distinti X_i della Tabella 3, la frequenza fx_i

[8] In questo caso Ω è l'insieme di tutte le configurazioni delle palline nelle due urne a cui corrisponde una precisa probabilità di salvezza. Nel riordinare i dati è stato possibile associare a ogni valore distinto della variabile X la relativa probabilità, andando così a individuare una distribuzione di probabilità.

con cui appare e la probabilità che la variabile X assuma tale valore, si è ottenuta la Tabella 4, nella quale la fascia colorata in verde evidenzia l'intervallo di variabilità di X dove sono concentrati maggiormente i valori di X, mentre sommando le probabilità evidenziate in arancione si ottiene la probabilità che X sia maggiore o uguale a 0,5, ovvero P(X≥0,5).

Tabella 4

i	X_i	fx_i	$P(X=X_i)$	*i*	X_i	fx_i	$P(X=X_i)$	*i*	X_i	fx_i	$P(X=X_i)$
1	0,263158	2	2/119	18	0,464646	2	2/119	35	0,545455	2	2/119
2	0,277778	2	2/119	19	0,458333	2	2/119	36	0,547619	2	2/119
3	0,294118	2	2/119	29	0,466667	2	2/119	37	0,549451	2	2/119
4	0,3125	2	2/119	21	0,474747	2	2/119	38	0,5625	2	2/119
5	0,333333	2	2/119	22	0,479167	2	2/119	39	0,568627	2	2/119
6	0,357143	2	2/119	23	0,483516	2	2/119	40	0,582418	2	2/119
7	0,384615	2	2/119	24	0,484848	2	2/119	41	0,583333	2	2/119
8	0,4	2	2/119	25	0,494949	2	2/119	42	0,59375	2	2/119
9	0,404762	2	2/119	26	0,5	19	19/119	43	0,595238	2	2/119
10	0,40625	2	2/119	27	0,505051	2	2/119	44	0,6	2	2/119
11	0,416667	2	2/119	28	0,515152	2	2/119	45	0,615385	2	2/119
12	0,417582	2	2/119	29	0,516484	2	2/119	46	0,642857	2	2/119
13	0,431373	2	2/119	30	0,520833	2	2/119	47	0,666667	2	2/119
14	0,4375	2	2/119	31	0,525253	2	2/119	48	0,6875	2	2/119
15	0,450549	2	2/119	32	0,533333	2	2/119	49	0,705882	2	2/119
16	0,452381	2	2/119	33	0,535354	2	2/119	50	0,722222	2	2/119
17	0,454545	2	2/119	34	0,541667	2	2/119	51	0,736842	2	2/119

Si è quindi introdotta la *speranza matematica* (o *valor medio*) $E(X)$ di questa variabile aleatoria, data da:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{51} X_i \cdot P(X = X_i) = \frac{1}{2}$$

Nel calcolo della speranza matematica, i dati, essendo stati aggregati, sono moltiplicati ciascuno per la relativa probabilità di verificarsi. Si tratta, a differenza di prima, di una media ponderata, e, come prevedibile, si è constatato che tale valore corrisponde a quanto prima calcolato come media.

Si è poi calcolato, sempre utilizzando il foglio di calcolo, lo *scarto quadratico medio*

sqm[9] della variabile aleatoria X, trovando così che è circa del 10% (sqm=0,101618). Da ciò si è desunto che i valori delle probabilità di salvezza oscillano per lo più fra il 40% ed il 60%.
In pochi sono riusciti, nel tempo disponibile, a costruire passo a passo la tabella necessaria al calcolo dello *scarto quadratico medio*, altri si sono arenati, tentando inutilmente di utilizzare le funzioni del foglio di calcolo.
Si è infine calcolata la probabilità che «*la probabilità di salvezza sia non inferiore al 50%*», cioè $P(X \geq 1/2)$, e si è trovato che questa[10] è circa del 58% (69/119).

Quindi ci si è chiesti:

Quale scelta fare? È effettivamente più conveniente avere a disposizione 2 urne?

Nuovamente ci si è soffermati sul perché il condannato avesse chiesto due urne. Su questo punto si è accesa un'ampia discussione che metteva in relazione tutti i dati raccolti: alcuni studenti evidenziavano il fatto che ci sono situazioni veramente molto sfavorevoli (si parte infatti da un 26% di probabilità di salvezza), altri ribattevano che bisognava correre il rischio, perché "erano molte le situazioni favorevoli (50)".
Alla fine ognuno ha sviluppato una sua opinione a riguardo.
Dopo tutto, bisogna tener presente che i valori considerati sono solo delle probabilità, non danno la certezza di pescare effettivamente la pallina bianca!

8. Conclusioni

Il problema che gli studenti hanno affrontato in tutte le sue sfaccettature ha rappresentato a tutti gli effetti un *ambiente di lavoro* in cui applicare le tecniche di calcolo delle probabilità note, ma non solo, hanno esplorato ogni situazione utilizzando diversi linguaggi, diversi strumenti matematici e, dovendosi misurare con calcoli impegnativi, hanno anche sviluppato maggiori capacità nell'uso dei software.

---

[9] sqm= $\sqrt{\sum_i \left(X_i - E(X)\right)^2 \cdot P(X_i)}$

[10] Si è così introdotta in modo naturale la funzione di ripartizione di una distribuzione di probabilità.

Questo ambiente è stata l'occasione per costruire formule, funzioni, grafici, tabelle, per esaminare dati, per *approssimare*, *ottimizzare soluzioni*, per *generalizzare e verificare risultati*, attraverso un utilizzo sapiente delle potenzialità offerte da certi software. Inoltre, questo problema ha anche rappresentato un'occasione per creare un ponte verso l'analisi matematica che è l'argomento chiave su cui si fonda lo studio della classe quinta: si è parlato, infatti, di massimi, di limite di successioni e funzioni in modo intuitivo, ma dando a questi concetti un significato concreto; si è poi fatto un passo avanti nello studio della probabilità, introducendo le variabili casuali discrete. Si tenga presente che le *Indicazioni Nazionali* per i Licei evidenziano il fatto che la matematica deve essere centrata sui PROBLEMI:

> *questioni autentiche e significative, e ..., rappresentandole in diversi modi, conducendo esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e che si intende trovare, ...*

Questo problema, pur avendo condotto a esplorazioni opportune a cui si è dato il tempo necessario, non si può definire una questione autentica e significativa, è un gioco, ma come tutti i *buoni problemi* ha suscitato molte domande che hanno portato a valorizzare le conoscenze degli studenti e a mettere alla prova le loro competenze. Vorrei sottolineare anche che è stata necessaria una attenta progettazione del percorso, perché il rischio era quello di introdurre troppe variabili, senza che i ragazzi avessero la possibilità di venirne fuori autonomamente, raggiungendo i risultati intermedi e finali con disinvoltura, usando al meglio le proprie conoscenze. Inoltre, l'approfondimento svolto nel secondo incontro è stato suggerito dai ragazzi, non era nelle mie intenzioni iniziali, ma questo elemento di indeterminatezza è l'aspetto più appassionante di un'attività laboratoriale sia per gli studenti che per i docenti.

BIBLIOGRAFIA

ROSSI C.
2003, *La matematica dell'incertezza. Didattica della probabilità e della statistica,* Bologna, Zanichelli.

VOLČIČ A.
2019, «Spunti e riflessioni per l'insegnamento del calcolo delle probabilità*, Quaderni CIRD*, 19 (2019), EUT Edizioni Università di Trieste, Trieste, pp. 46-76.

SITI WEB

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE
2018, *Piano Lauree Scientifiche – Progetto Matematica*,
<www.pls.math.units.it>, sito consultato il 28.7.2022.

PER APPROFONDIRE

HACKING I.
2005, *Introduzione alla probabilità e alla logica induttiva. Teorie e applicazioni*, Milano, Il Saggiatore.

INDIRE M@T.ABEL
2007-2013, *Proposte per la formazione continua dei docenti*,
<http://www.scuolavalore.indire.it/guide/dati-e-previsioni/, sito consultato il 29.7.2022.

TRICARICO M., VISENTIN F.
2019, *Laboratorio di Calcolo Combinatorio e Calcolo delle probabilità,* Università degli Studi di Napoli Federico II – Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Piano Lauree Scientifiche Matematica e Statistica,
<http://www.plsmatematica.unina.it/laboratori-iii-iv.php#cdp>, sito consultato il 28.7.2022.