Che tombola! Così tante soluzioni da essere un problema!

Paola Gallopin
Liceo Scientifico Statale "G. Galilei"
Trieste
pao.ga@libero.it

Sunto
In questo contributo si illustrerà il progetto didattico con il quale si è costruito il laboratorio "Che tombola! Così tante soluzioni da essere un problema!" presentato all'ottava edizione di "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze fra coetanei". Tema centrale è la risoluzione, all'interno dell'insieme degli interi relativi, delle equazioni diofantee di I grado e la possibilità di ragionare attorno a problemi che possono ammettere più di una soluzione o addirittura infinite. Si descriveranno sia il percorso seguito per la realizzazione del laboratorio, sia il percorso proposto agli studenti in visita durante la manifestazione, distinguendo fra i tre livelli scolastici (scuola primaria, scuola secondaria di I e II grado) a cui ci siamo rivolti. In conclusione, si presenteranno alcune osservazioni personali sul lavoro svolto.

Parole chiave
Didattica della matematica / Mathematics education; Scuola secondaria di secondo grado / High secondary school; Algebra / Algebra; Equazioni diofantee di I grado / First degree Diofanto's equations.

1. Premessa

La partecipazione al progetto "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze fra coetanei" mi consente da anni di svolgere con i miei studenti un tipo di attività non sempre effettuabile in orario curricolare, di sperimentare metodologie diverse, come l'apprendimento cooperativo, e di affrontare temi che non riesco a trattare nella normale programmazione didattica. Un'esperienza stimolante non solo per i ragazzi, ma anche per me stessa, coinvolta personalmente in un confronto continuo nell'ambito del Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Trieste[1], promotore e realizzatore della manifestazione, in un'attività di aggiornamento e di ricerca di percorsi nuovi e coinvolgenti.

Ho operato io stessa, come le altre volte, la scelta dell'argomento da presentare nell'ottava edizione di "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze fra coeta-

[1] Dal 2012: Dipartimento di Matematica e Geoscienze.

nei", perché la maggior parte dei miei allievi[2] conosce, riguardo alla matematica, solamente gli argomenti già studiati a scuola e, generalmente, i ragazzi hanno difficoltà a immaginare cosa viene loro richiesto con la costruzione di un laboratorio di matematica.

Per scegliere il tema da proporre, innanzitutto tengo presente la programmazione didattica annuale e cerco di prevedere a quale livello di approfondimento riuscirò a trattare gli argomenti nel corso dell'anno scolastico. La mia scelta si rivolge a quei temi che nel normale orario delle lezioni potranno essere solo sfiorati, mentre meriterebbero un approfondimento, magari solo presentandoli da un punto di vista diverso. Così facendo, nel corso degli anni la partecipazione a "La matematica dei ragazzi" mi ha consentito di approfondire diversi argomenti con classi prime e seconde[3] e di costruire nel contempo un archivio di attività e materiali che ho potuto utilizzare anche negli anni successivi, nella didattica curricolare.

Nell'a. sc. 2009/2010 ho deciso di studiare le *equazioni diofantee* di primo grado, ovvero le equazioni lineari in due incognite (del tipo: ax+by=c) con coefficienti interi[4], delle quali si ricercano solo soluzioni intere (coppie di interi del tipo (x_0,y_0)). Da diverso tempo avevo in mente di proporle ai miei studenti, ma non trovavo un modo adeguato per rendere l'argomento fruibile a livello laboratoriale e, inoltre, volevo lavorare con una classe propositiva, creativa e non particolarmente numerosa, come quella che ha partecipato a questo progetto.

I motivi per cui ritengo che le *equazioni diofantee* di I grado siano interessanti da studiare sono diversi, come molteplici sono gli spunti che da esse si possono trarre. Innanzitutto, i libri di testo dedicano pochissimo spazio a problemi o equazioni risolubili con numeri interi e nella maggior parte dei casi si chiede di risolvere problemi e equazioni direttamente nell'ambito dei numeri reali; talvolta si incontrano dei banali esercizi in cui viene specificato di ricercare le soluzioni intere, ma ciò non scaturisce quasi mai da una situazione problematica.

Inoltre, per lo più, gli studenti ritengono che un'equazione sia risolubile o non risolubile "in assoluto". La ricerca di soluzioni intere di un problema il cui modello matematico è un'equazione diofantea di I grado fa vedere, da un lato, come siano molte-

[2] Insegno da una decina d'anni nel primo biennio del liceo scientifico.

[3] Cfr. Gallopin 2004, 2007a, 2007b, 2009.

[4] Qui e nel seguito, con "interi" si intenderà "interi relativi"; sarà invece precisato quando si vorranno considerare numeri naturali.

plici le situazioni che richiedono soluzioni intere e, d'altro canto, fa capire come sia importante stabilire in quale ambito numerico si ricercano le soluzioni; si forniscono, inoltre, esempi significativi di problemi con più soluzioni, in numero finito o infinito. Nell'affrontare semplici problemi legati alle equazioni diofantee, è possibile anche un approccio "per tentativi", e ciò può favorire negli allievi la formulazione di congetture che essi stessi sono poi stimolati a dimostrare.
Infine, lo studio delle *equazioni diofantee* di I grado consente l'approfondimento di alcuni temi che vengono trattati nel biennio del liceo, come il *massimo comun divisore* e le sue proprietà, l'*aritmetica modulare*, le *strutture algebriche*, e permette di usare un sistema di coordinate cartesiane non continuo (modellizzabile con il cosiddetto *geopiano*).
Sebbene negli anni avessi già iniziato a individuare delle buone attività laboratoriali legate alla risoluzione delle equazioni diofantee di I grado, fruibili a diversi livelli scolastici, mi sono convinta di aver operato una "buona" scelta dell'argomento grazie alla lettura di un articolo di Benedetto Scimemi[5], che mi ha offerto ulteriori spunti di lavoro e di riflessione.

2. Il percorso seguito in classe

La classe con cui ho lavorato era la II A, con indirizzo sperimentale PNI (a. sc. 2009/2010), composta da 19 studenti, 7 ragazze e 12 ragazzi.
La preparazione del laboratorio ha impegnato gli studenti per circa 30 ore, in orario extracurricolare, da metà novembre a metà aprile, con incontri di 2 ore ciascuno a cadenza quasi settimanale. Per un caso fortunato, a differenza delle passate edizioni, l'orario di cattedra dell'insegnante e l'orario settimanale dei ragazzi hanno consentito di lavorare al mattino, alla fine delle lezioni, senza rientro a scuola dopo il pranzo: devo dire che la cosa è stata molto apprezzata dai ragazzi.
Dopo aver illustrato agli allievi le modalità e gli obiettivi generali della partecipazione alla manifestazione "La matematica dei ragazzi", ho preferito, diversamente dalle esperienze precedenti, farli lavorare a gruppi fin dall'inizio, con delle schede che ho predisposto, su una serie di problemi, secondo un percorso uguale per tutti, senza puntualizzare quale fosse la tematica da approfondire nel laboratorio. La cosa li ha lasciati un po' perplessi, anche perché erano piuttosto abituati a lezioni di tipo frontale, in cui si dichiara fin dall'inizio l'argomento trattato.

[5] Scimemi 2009.

Ho iniziato gradualmente con problemi le cui soluzioni erano da ricercare solo nell'ambito dei numeri naturali, per poi estendere la trattazione agli interi relativi.
La prima scheda iniziava richiedendo la risoluzione del seguente problema:

> *Un negoziante acquista un certo numero di maglioni da 40 € e un certo numero di maglioni da 60 €. Ha a disposizione 560 €. Quanti maglioni di un tipo e quanti dell'altro riesce ad acquistare spendendo tutta la cifra a disposizione? E se lo stesso negoziante disponesse di 550 €?*

Tutti gli studenti, in maniera abbastanza naturale, hanno indicato con le incognite x e y, rispettivamente, il numero di maglioni da 40 € e da 60 €, e hanno impostato l'equazione 40x+60y=560. Questa è un'equazione di I grado in due incognite della quale, come gli studenti stessi hanno osservato, si cercano le soluzioni solo tra i numeri naturali. Il problema è capire come individuarle, qualora esse esistano, e, poiché i ragazzi non disponevano di un metodo per risolvere equazioni siffatte, ciascun gruppo ha iniziato a risolvere l'equazione per tentativi. Qualcuno ha notato che i coefficienti numerici presenti nell'equazione erano tutti pari.
Dopo brevissimo tempo, sono state letteralmente "declamate" le soluzioni: (2,8), (5,6), (8,4), (11,2), (14,0). Rincuorati dall'apparente facilità del problema svolto, i ragazzi hanno subito affrontato la sua seconda parte, impostando l'equazione: 40x+60y=550. Immediatamente uno dei gruppi ha osservato che dalla somma di numeri pari non si sarebbe mai potuto ottenere un numero dispari. Nonostante ciò, gli altri gruppi hanno continuato a ricercare delle soluzioni per tentativi, senza peraltro trovarne alcuna, finché si sono convinti che non ce n'erano.
La scheda proseguiva con la seguente domanda:

> *I problemi proposti hanno soluzione? Se sì, essa è unica oppure no?*

I ragazzi hanno risposto tutti correttamente, dicendo che l'unico problema a essere risolubile è il primo, e che la soluzione di tale problema non è unica, ma ce ne sono ben cinque.
In maniera abbastanza naturale qualche ragazzo ha poi osservato che, se invece di cercare le soluzioni tra i numeri naturali le avessimo cercate tra gli interi relativi (Z) o tra i numeri reali (R), la situazione sarebbe cambiata, specificando anche che in Z ci sarebbero state infinite soluzioni e così pure in R, ma, mentre come soluzioni in R

si sarebbero potute prendere tutte le coppie di coordinate (x,y) dei punti della retta avente l'equazione data, in Z ciò non sarebbe stato vero.
I ragazzi stessi hanno poi notato che la ricerca di soluzioni in Z dell'equazione 40x+60y=560, note quelle già trovate, si può fare deducendo "il comportamento di x e y" nelle soluzioni ("la x aumenta di 3 e la y diminuisce di 2"), e che quindi sono soluzioni intere, ad esempio: (-4,12), (-1, 10), (17,-2), (20, -4).
Esse rappresentano i punti di coordinate intere della retta di equazione 40x+60y=560, in un piano cartesiano come quello da loro conosciuto. Quindi, se si volevano le soluzioni intere, esse erano in un numero infinito, ma, se si volevano quelle reali, esse erano infinite, ma "di più".
Solo a questo punto ho fornito ai ragazzi del materiale informativo sulle equazioni diofantee di I grado e ho spiegato che esse sarebbero state oggetto di studio e spunto per il nostro laboratorio, perché ci consentivano di ragionare sul fatto che non sempre un problema ammette soluzione e che, se ammette soluzione, non è detto che questa sia unica (inoltre, possono essercene infinite); si intendeva anche ricercare come si fa a trovare una soluzione (ed eventualmente tutte le altre) senza procedere per tentativi.
Il materiale fornito a tutta la classe era sui seguenti argomenti:

1. Definizione di equazione diofantea di I grado e aspetti storici collegati (Diofanto d'Alessandria, decimo problema di Hilbert).

2. Risoluzione di un'equazione diofantea di I grado, utilizzando l'algoritmo di Euclide per il calcolo del massimo comun divisore e il teorema di Bézout.

3. Risoluzione di un'equazione diofantea di I grado, utilizzando l'aritmetica modulare; strutture algebriche.

Per mancanza di tempo, ho dovuto tralasciare il metodo di risoluzione delle equazioni diofantee di I grado con le frazioni continue.
Abbiamo dedicato diversi incontri allo studio di quanto proposto: i quattro gruppi sono stati creati dai ragazzi in maniera autonoma e, dopo una fase iniziale di analisi del materiale fornito, i ragazzi si sono suddivisi i compiti; durante lo studio collettivo spesso e volentieri gli studenti di gruppi diversi hanno interagito fra loro, soprattutto per aiutarsi nei passaggi più difficili.

Alla fine, ciascun gruppo ha relazionato agli altri su quanto studiato e, senza il mio intervento, ha deciso di proporre ai compagni di classe dei problemi risolubili con equazioni diofantee di I grado, chiedendo di usare un procedimento o l'altro, per consolidare quanto appreso.
Tale parte di preparazione del laboratorio non ha presentato particolari problemi e ha sollevato molta curiosità dal punto di vista storico e stupore nei confronti dell'utilizzo del massimo comun divisore (MCD), che gli studenti vedono sempre in secondo piano rispetto al minimo comune multiplo, nonché piacere nel ritrovare l'aritmetica modulare già studiata nella classe prima.
I ragazzi dovevano pensare quindi a un modo accattivante di proporre quanto studiato ai visitatori della manifestazione "La matematica dei ragazzi" e fare delle scelte non solo sulle modalità di esposizione e di coinvolgimento, ma anche sull'opportunità o meno di presentare l'argomento nella sua totalità. Questa è sempre la parte più difficile da realizzare, perché credo che i nostri studenti vedano spesso la matematica come una serie di vuoti esercizi ripetitivi e non riescano a immaginare con facilità situazioni problematiche o di gioco che li giustifichino.
I ragazzi hanno inizialmente proposto di spiegare ai visitatori per prima cosa gli aspetti teorici e poi di far fare loro esercizi applicativi: ci si poteva limitare allo studio delle equazioni diofantee di I grado, con la sola strategia risolutiva dell'uso del MCD e dell'algoritmo di Euclide, perché altrimenti sarebbe stato necessario spiegare anche l'aritmetica modulare. Insomma, quello che hanno proposto era la classica struttura "lezione frontale/esercizi".
Ho allora invitato tutta la classe a leggere assieme l'articolo "Francobolli, tombole e scacchi"[6], che ha rappresentato anche per gli studenti una lettura divertente, stimolante e ricca di spunti. Ed ecco cosa ne è uscito...

3. Il percorso proposto nella manifestazione

Il laboratorio proposto alla manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei" prevedeva tre percorsi diversi, a seconda del livello scolare dei visitatori. Elemento comune ai tre percorsi era il gioco della tombola, opportunamente modificato come in Scimemi (2009).

[6] Scimemi 2009.

3.1 Percorso per la scuola primaria

Ai bambini della scuola primaria venivano proposti due giochi: il gioco della "Tombola in cucina" e il gioco dei "Pacchi da spedire".

Nella "Tombola in cucina" si utilizzavano due tipi di pasta alimentare secca (farfalline e ditalini). Dapprima venivano spiegate ai bambini le regole del gioco, con l'ausilio di un cartellone: a ciascuno di loro veniva assegnata una cartella (con numeri compresi fra 1 e 50), venivano estratti dei numeri (come nell'usuale gioco della Tombola) e chi trovava nella sua cartella il numero chiamato doveva comporlo, sommando un numero opportuno di farfalline (di valore 2) e/o un numero opportuno di ditalini (di valore 8). Ad esempio, il numero 22 si poteva ottenere utilizzando 3 farfalline e 2 ditalini. Solo i numeri così composti erano validi per ottenere le usuali combinazioni vincenti della "Tombola".

Ogni cartella era accompagnata da una scheda di lavoro sulla quale i bambini segnavano il numero di farfalline e di ditalini utilizzati. Le cartelle della tombola erano di due tipi: uno di questi non consentiva di fare tombola, perché conteneva il numero 9 (non scomponibile nel modo richiesto), l'altro invece consentiva di fare tombola. Obiettivo di questo gioco era non solo far risolvere con numeri naturali delle semplici equazioni diofantee di I grado, esercitando nel contempo le capacità di calcolo, ma anche mostrare che ci sono numeri che non è possibile comporre nel modo previsto "con le farfalline e i ditalini".

Nel gioco dei "Pacchi da spedire" (cfr. Figura 1) i bambini dovevano risolvere i due problemi seguenti:

> *Problema 1. Franco deve spedire un pacco a suo zio Bollo. Il costo di spedizione è di 3,40 €. A casa sua ci sono 20 francobolli da 0,20 € e 10 da 0,50 €. Quanti e quali ne deve usare per spedire il pacco?*

> *Problema 2. Franco deve spedire un pacco alla sua fidanzatina. Il costo di spedizione è di 3,70 €. Lui possiede 20 francobolli da 0,20 € e 10 da 0,60 €. Quanti e quali ne deve usare per spedire il pacco?*

Ai bambini venivano forniti "francobolli" da 0,20 €, da 0,50 € e da 0,60 € e dei pacchi regalo da spedire. Anche in questo caso si tratta di risolvere delle equazioni diofantee di I grado: nel problema 1 si hanno soluzioni, nel problema 2 non ce ne sono. Una piccola difficoltà in più è data dai numeri decimali, ma si passa subito ai numeri interi se si considerano i centesimi di Euro.

Figura 1. Il gioco dei "Pacchi da spedire".

Con l'ausilio di un cartellone si spiegava poi il concetto di MCD fra due numeri naturali non nulli: individuati i divisori del primo e del secondo e sottolineati quelli comuni, si cerchiava quello maggiore, che è il MCD dei due numeri considerati.
Si analizzavano, quindi, assieme, i problemi proposti e si concludeva rispondendo alle seguenti domande:

1. Quali dei problemi presentati si possono risolvere?
2. Quelli che si possono risolvere hanno solo una soluzione?
3. Che relazione c'è fra i numeri presenti nei problemi che abbiamo potuto risolvere?

3.2 Scuola secondaria di primo grado

Anche per i ragazzi della scuola secondaria di primo grado il percorso partiva dal gioco della "Tombola in cucina". Con un cartellone preparato ad hoc si spiegavano le regole del gioco: per questi ragazzi ciascuna farfallina valeva 5 e ciascun ditalino 6, e i numeri nelle cartelle erano compresi fra 1 e 90. Come per i bambini della scuola primaria, ciascuna cartella era accompagnata da una scheda di lavoro, nella quale si scrivevano le varie combinazioni utilizzate (e quindi le soluzioni nell'ambito dei numeri naturali di equazioni diofantee di I grado). Erano state predisposte cartelle con cui si poteva fare tombola e altre cartelle con cui ciò era impossibile.

L'attività successiva voleva condurre i visitatori alla ricerca di soluzioni anche tra gli interi relativi. Il problema proposto era il seguente:

> *Lucia è una bambina golosa. Dopo aver risparmiato un po' di soldi ha a disposizione 23 € per comperare le sue caramelle preferite, che costano 3 € al pacchetto e i cioccolatini che costano 4 € al pacchetto. Quanti pacchetti di caramelle e di cioccolatini riesce a comprare Lucia spendendo tutti i soldi?*

L'equazione risolvente è 3x+4y=23, dove x indica il numero di pacchetti di caramelle e y quello di pacchetti di cioccolatini; le soluzioni si ricercano tra i numeri naturali. Per risolvere quest'equazione veniva proposto l'utilizzo di un sistema di riferimento cartesiano a coordinate intere, detto "geopiano"[7] (cfr. Figura 2).

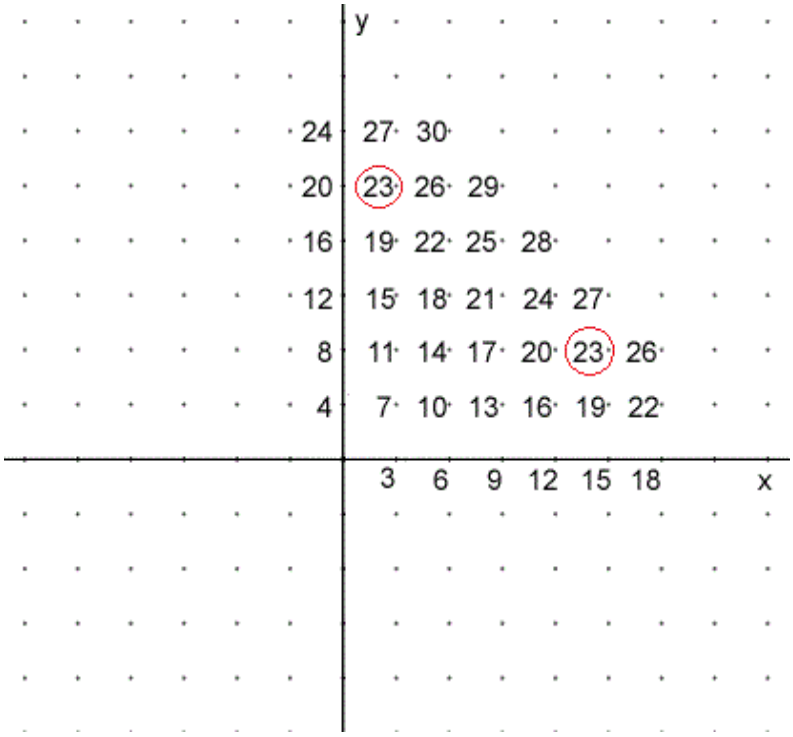

Figura 2.

In esso, sull'asse delle x si segnavano solo i multipli di 3 e sull'asse y solo i multipli di 4. All'intersezione delle rette di equazione x=h e y=k (con h=1,2,3,... e k=1,2,3,...) si scriveva il numero n=3h+4k. Si osservava quindi che, ad esempio, 23=3+20, ovvero 23=3·1+4·5. Ma si ha anche 23=15+8, ovvero 23=3·5+4·2. Si otteneva così che le coppie (1,5) e (5,2) sono soluzioni del problema.

[7] Scimemi 2009, p. 725.

Si poneva poi il nuovo problema:

> *Lucia si ripresenta dal negoziante con altre caramelle e altri cioccolatini da barattare. Come variano le quantità acquistabili se Lucia vuole spendere sempre 23 €?*

Si ricercavano ora le soluzioni tra gli interi relativi: il geopiano veniva utilizzato estendendolo anche ai multipli negativi di 3 e di 4 (cfr. Figura 3).

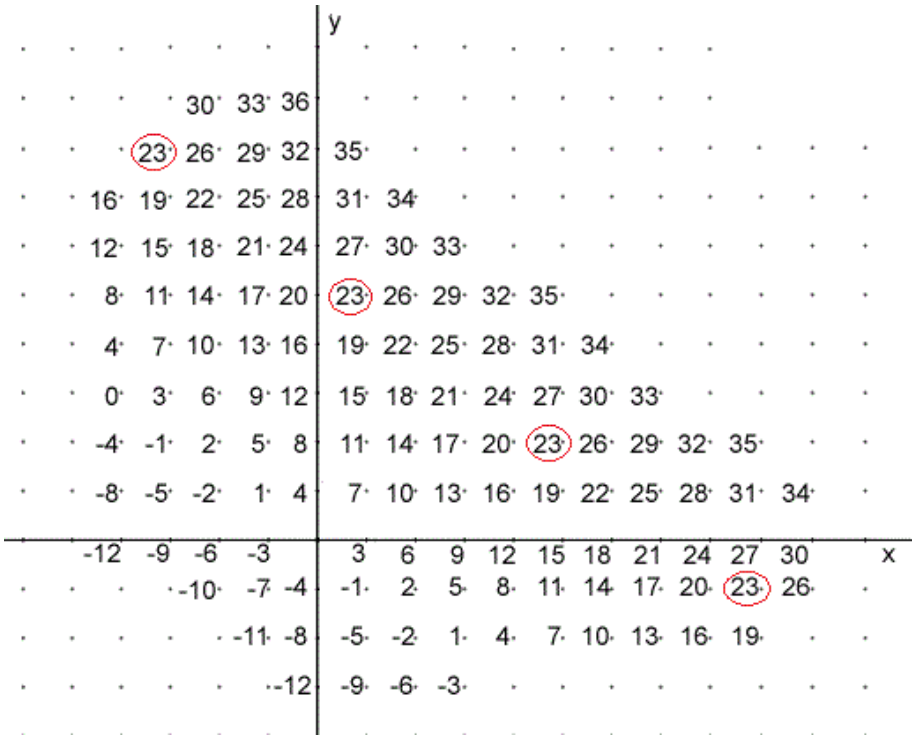

Figura 3.

Si trovava così: 23=-9+32, ovvero 23=3·(-3)+4·8. Ma anche: 23=27+(-4), ovvero 23=3·9+4·(-1). Si determinavano le soluzioni intere (-3,8) e (9,-1), che andavano ad aggiungersi a quelle già trovate tra i numeri naturali.

Si osservava inoltre che tutti i "23" individuati sul geopiano giacciono sulla stessa retta, di equazione 3x+4y=23, e che ne rappresentano punti di coordinate intere.

Ai ragazzi visitatori venivano poi proposte delle schede di lavoro con problemi risolubili mediante il geopiano, come i seguenti:

> *Lucia è al mare con 29 € a disposizione e vuole spenderli tutti comprando delle conchiglie per i suoi amici. Le conchiglie rosse costano 2 € ciascuna, mentre quelle blu 3 € ciascuna. Quante conchiglie rosse e quante blu riesce a comprare Lucia? E se potesse poi barattare le conchiglie rosse con le blu, o viceversa?*

Maria deve comprare delle camicie per lo spettacolo di fine anno spendendo tutti i 65 € che ha a disposizione. Le camicie verdi costano 6 € ciascuna, mentre quelle azzurre 8 € ciascuna. Quante camicie riesce a comprare Maria? E se poi cambiasse idea e volesse restituirne alcune per barattarle con altre?

Alla fine, anche in questo caso si ragionava assieme sulle seguenti questioni:

— Un problema è sempre risolubile?

— Se il problema è risolubile, la soluzione è necessariamente unica?

— Trovata una soluzione con il nostro geopiano, è facile trovarne altre? Come?

— Alcuni dei nostri problemi erano risolubili con numeri interi e altri no. Cosa possiamo dire dei numeri coinvolti in questi problemi?

3.3 Scuola secondaria di secondo grado

Il percorso progettato per i ragazzi della scuola secondaria di secondo grado seguiva maggiormente gli schemi tradizionali, ponendo, però, alla fine il gioco della "Tombola in cucina".
Inizialmente veniva proposto ai ragazzi di risolvere in maniera autonoma il seguente problema:

Alberto va a comprare delle magliette. Gli piacciono particolarmente le magliette rosse e quelle gialle. Se Alberto ha 54 € in tasca e li vuole spendere tutti, quante magliette può comprare sapendo che quelle rosse costano 15 € e quelle gialle 9 €?

Nella scheda di lavoro allegata si invitavano i visitatori a impostare un'opportuna equazione e a rispondere alle seguenti domande:

1. Esistono soluzioni?
2. Se esistono soluzioni, ce ne sono altre accanto a quelle facili da trovare?
3. Esistono finite o infinite soluzioni?
4. È possibile trovare una lista delle soluzioni?
5. Come faccio per calcolare le soluzioni?

A queste domande si è cercato di dare una risposta assieme. Dopo aver ricordato il significato della divisione intera è stata proposta una definizione di massimo comun divisore (MCD) fra due numeri naturali diversa da quella che solitamente i ragazzi conoscono, e sono stati forniti le seguenti definizioni e i seguenti teoremi[8].

Teorema della divisione intera (T1)

Per ogni coppia di numeri naturali (a,b), con $b\neq0$, esiste ed è unica la coppia (q,r) di numeri naturali tale che $a=b\cdot q+r$, con $0\leq r<b$.

Definizione di massimo comun divisore.

Dati a e b numeri naturali non nulli, d=MCD(a,b) se e solo se:

1. d divide a (d|a) e d divide b (d|b);

2. ogni numero c che divide a e b divide anche d.

Teorema (T2)

Dati i numeri naturali a, b, y (con $a>b$ e $y\neq0$), si ha che, se y divide a e y divide b, allora y divide a-b.

Un cartellone illustrava come segue, con un esempio numerico, l'*algoritmo di Euclide per il calcolo del MCD fra due numeri naturali* (nell'esempio, 99 e 78).

Per (T1): $99=78\cdot1+21$

Per (T2): d|99 e d|78, quindi d|(78·1) e d|(99-78), ovvero d|21

Allora: MCD(99,78)=MCD(78,21)

Per (T1): $78=21\cdot3+15$

Per (T2): d|78 e d|21, quindi d|(21·3) e d|(78-21·3), ovvero d|15

[8] Nella fase di preparazione del laboratorio questi teoremi (e gli altri necessari, come il teorema di Bézout) sono stati dimostrati, ed è stata provata l'equivalenza della nuova definizione di MCD e di quella già nota, passando poi alla divisione tra interi relativi. Per la parte teorica è stato seguito il testo di Bazzini e Ferrari (Bazzini, Ferrari 1987). Non essendoci tempo per presentare le dimostrazioni, ai visitatori sono stati illustrati solo esempi numerici come qui descritto e sono state consegnate delle fotocopie con la parte teorica, da leggere in seguito per conto proprio.

Allora: MCD(78,21)=MCD(21,15)

Per (T1): 21=15·1+6

Per (T2): d|21 e d|15, quindi d|(15·1) e d|(21-15·1), ovvero d|6

Allora: MCD(21,15)=MCD(15,6)

Per (T1): 15=6·2+3

Per (T2): d|15 e d|6, quindi d|(6·2) e d|(15-6·2), ovvero d|3

Allora: MCD(15,6)=MCD(6,3)

Per (T1): 6=3·2

Il resto è uguale a 0, quindi 3=MCD(6,3)=...= MCD(99,78)

Dopo qualche informazione su Diofanto d'Alessandria, si procedeva a illustrare il metodo per trovare una soluzione particolare dell'equazione diofantea: 99x+78y = 3. Ripercorrendo a ritroso i passaggi seguiti per determinare il massimo comun divisore di 99 e 78, si scriveva:

3=15-2·6
6=21-1·15
15=78-3·21
21=99-1·78

Per sostituzione, si otteneva quanto segue:

3=15-2·6=15-2·(21-1·15)=15-2·21+2·15=3·15-2·21=3·(78-3·21)-2·21=
=3·78-9·21-2·21=3·78-11·21=3·78-11·(99-1·78)=3·78-11·99+11·78=14·78-11·99
Da qui si ricavava una soluzione particolare dell'equazione diofantea, ossia:

$$x_0=-11 \qquad y_0=14$$

L'ultimo passo per i visitatori era quello di capire come ottenere la soluzione generale dell'equazione diofantea partendo da quella particolare appena trovata.
Si passava agli interi relativi. Dopo aver spiegato molto brevemente la definizione di divisione intera e di MCD in Z, si enunciava il seguente teorema:

Sia (x_0,y_0) soluzione particolare dell'equazione diofantea $ax+by=c$, e sia $d=MCD(a,b)$, con a, b, c, x_0, y_0 appartenenti a Z.

Allora ogni altra soluzione (x',y') dell'equazione è del tipo:

$$x'=x_0+(b/d)\cdot t$$

$$y'=y_0-(a/d)\cdot t \qquad (\text{con } t \text{ appartenente a } Z)$$

A questo punto, i visitatori disponevano di tutto ciò che serve per risolvere un'equazione diofantea di primo grado, del tipo ax+by=c, con a, b e c in Z, di cui si ricercano le soluzioni tra gli interi relativi.
Nel caso in esame, si otteneva:

$x'=-11+(78/3)\cdot t=-11+26\cdot t$
$y'=14-(99/3)\cdot t =14-33\cdot t$

Con l'aiuto di una scheda guidata, i visitatori venivano invitati a risolvere nuovamente il problema iniziale e un'altra serie di equazioni diofantee ripercorrendo quanto loro spiegato. L'attività si concludeva con il gioco della "Tombola in cucina", come già proposto per la scuola secondaria di primo grado.

4. Conclusioni

Le considerazioni che seguono si basano sull'osservazione diretta da me effettuata, sia durante la fase di preparazione del laboratorio, sia durante le giornate della manifestazione, e sul questionario di valutazione proposto alla fine dell'attività.

Durante la fase di studio e analisi delle problematiche e degli argomenti proposti, ciò che è subito emerso con chiarezza è stata la competizione che si è creata fra i gruppi: fino a quando essi hanno lavorato sullo stesso materiale non c'era affatto collaborazione, sembrava piuttosto una gara in cui dovesse venire proclamato un vincitore. Solo in un secondo momento i ragazzi si sono resi conto che il modo competitivo di procedere non li avrebbe portati a nulla e nella fase di studio hanno creato autonomamente dei gruppi più equilibrati, che hanno pure interagito fra loro.
Devo dire che c'è stata partecipazione attiva alla costruzione del laboratorio da parte di quasi tutta la classe: in generale, i ragazzi hanno lavorato bene assieme, sfruttando intelligentemente le abilità di ciascuno, e solo due studenti, particolarmente timidi, hanno avuto difficoltà a trovare un loro ruolo – credo più per timore di ciò che li aspettava durante la manifestazione che per disinteresse verso quanto si stava facendo.
La classe ha poi deciso come organizzarsi per la manifestazione e direi che in questo caso i gruppi si sono creati basandosi più sul profitto scolastico in matematica che su altre attitudini e abilità: così gli studenti con un ottimo profitto si sono dedicati ai contenuti per la scuola secondaria di secondo grado e quelli con profitto inferiore a quelli per la scuola secondaria di primo grado e per la scuola primaria, con qualche rara eccezione. Non ho voluto modificare questa loro scelta, da un lato, per non metterli in difficoltà durante l'esposizione ai visitatori e, dall'altro, perché ho notato con piacere che gli studenti meno dotati, dedicandosi a problemi che ritenevano più semplici, si sentivano maggiormente liberi di presentare e sperimentare e si divertivano a fare matematica.
Durante le giornate della manifestazione, i ragazzi si sono subito proposti in maniera coinvolgente nei confronti dei visitatori: in effetti, sono stati aiutati dal fatto che le prime classi che hanno visitato il nostro laboratorio erano composte da studenti della scuola secondaria di primo grado e del loro stesso liceo, che quindi conoscevano.
Fra una classe di visitatori e l'altra, i ragazzi decidevano come migliorare la loro esposizione e modificavano quanto necessario in corso d'opera, e ciò ha messo in evidenza una certa capacità di osservazione e di attenzione al riscontro ricevuto – specie da parte dei relatori che si occupavano del percorso per la scuola primaria e secondaria di primo grado – e anche buona dimestichezza con gli argomenti trattati. Il percorso per la scuola secondaria di secondo grado è rimasto invece piuttosto invariato: in effetti, le capacità comunicative e la voglia di confrontarsi non sempre sono, per gli studenti di questa età, direttamente proporzionali al profitto scolastico.

Tutti gli studenti, alla fine del lavoro, sono stati concordi nel ritenere che è molto più facile e appagante lavorare con alunni più piccoli e che, certe volte, gli studenti di classi della scuola secondaria di secondo grado non sono molto disponibili a essere coinvolti in attività di laboratorio e ascoltano disinteressati quanto viene loro proposto. Come ha notato una studentessa, ciò può dipendere dal fatto che:

Gli argomenti proposti possono essere difficili da capire in mezz'ora... in fondo noi ci abbiamo messo molto di più!

Oppure, come ha notato uno studente:

Se neanche la tua prof. ascolta, perché dovresti farlo tu?

In effetti, la proposta per gli studenti della scuola secondaria di secondo grado, avendo la pretesa di illustrare in un tempo ristretto un argomento molto articolato, non ha lasciato ai visitatori il tempo di comprendere il "perché" di quanto stessero facendo, mostrando loro solo come utilizzare gli strumenti della matematica "a scatola chiusa": cosa che a volte si può fare e si fa (specie in ambito applicativo), ma con scarsa soddisfazione soprattutto da parte dei ragazzi più interessati alla disciplina.
La totalità degli allievi ha espresso comunque la propria soddisfazione per il lavoro fatto e ha trovato la manifestazione interessante; purtroppo solo pochi fra loro sono riusciti a visitare altri laboratori, anche se sarebbero stati curiosi di farlo, specie per vedere quali argomenti avessero approfondito le altre classi o per fare un po' di laboratorio di matematica.
Come insegnante sono rimasta soddisfatta del lavoro svolto e dell'atteggiamento degli studenti nei confronti di quanto loro proposto: anzi, in seguito essi si sono subito dimostrati entusiasti di riproporre il laboratorio, nell'anno scolastico successivo, nelle manifestazioni pubbliche "Notte dei Ricercatori" (Trieste, settembre 2010) e "Giochi di Scienze" (Muggia, TS, ottobre 2010).

Bibliografia

Bazzini L., Ferrari M.
1987, *Il mondo dei numeri naturali*, Torino, SEI.

Gallopin P.
2003, *A mathematical project realised in a non formal environment: learning as a social event*, in Mariotti M. A. (a cura di), «Cerme3 Proceedings», Edizioni Plus2, p. 2.
2004, *Matematica tra i fiumi*, in Zuccheri L., Gallopin P. (a cura di), «La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2000-2002», Trieste, EUT, pp. 165-182.
2007a, *Pitagoricamente parlando*, in Zuccheri L., Gallopin P., Zudini V. (a cura di), «La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2004-2006», Trieste, EUT, pp. 87-105.
2007b, *A tutto cerchio!*, in Zuccheri L., Gallopin P., Zudini V. (a cura di), «La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 2004-2006», Trieste, EUT, pp. 188-199.
2009, *Poliedrilandia*, in Zuccheri L., Gallopin P., Rocco M., Zudini V. (a cura di), «La matematica dei ragazzi: scambi di esperienze tra coetanei. Edizione 2008», Trieste, EUT, pp. 95-106.

Scimemi B.
2009, *Francobolli, tombole e scacchi*, in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», vol. 32 A-B, n. 6, pp. 718-733.

Per approfondire

Courant R., Robbins H.
2000, *Che cos'è la matematica?*, Torino, Bollati Boringhieri.