PRINCIPIO DI LIEBNIZ E FORMULE ILLIMITATE.
STAR-CONCETTI (*)

di LUCIO CRISMA e SILVANO HOLZER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Con una opportuna estensione dei monomorfismi si ottiene una trasformazione dei predicati (concetti) che consente di formulare il principio di Leibniz in forma generalizzata e di agevolare, evitando gravosi problemi di formalizzazione, lo studio dell'analisi non-standard e delle sue applicazioni.*

SUMMARY. - *We obtain a transformation of the meta-predicates (concepts) by means of a suitable extension of the monomorphisms. This transformation allows us to derive a useful generalization of Leibniz's principle and moreover, avoiding heavy formalizations, it makes easier the study of the Non-standard Analysis and its applications.*

1. Premesse.

Impegnati nella stesura di una « Introduzione all'analisi non-standard », al fine di rendere più agevoli le dimostrazioni induttive sulla complessità delle *wff* (well-formed formulae), decidemmo di scegliere come linguaggio base un linguaggio formalizzato del primo ordine, L, con le sole due costanti relazionali: $=, \in$; esso è, come noto, il più « povero » linguaggio possibile per tali sviluppi.

Come s'intende, questa scelta ci ha posto però ben presto gravosi problemi di formalizzazione anche a livello elementare, cioè già quando si è trattato di considerare proprietà coinvolgenti insiemi di s-ple. Per superare tali difficoltà abbiamo allora introdotto una *wff* limitata, pre-

(*) Pervenuto in Redazione il 9 ottobre 1979.
(**)Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università - Piazzale Europa 1-34100 Trieste.

dicato di L, in grado di esprimere il concetto di s-pla; di essa abbiamo studiato il comportamento via trasferimento. Il tutto è stato fatto pensando la detta *wff* come sottoformula di una *wfs* (well-formed sentence), perché come tale sarebbe stata utilizzata nelle successive formalizzazioni. In questo modo, per lo studio del comportamento via trasferimento di metaenunciati che, oltre il concetto di s-pla, facevano intervenire solo i concetti di appartenenza, uguaglianza ed inclusione, ci si è potuti limitare ad una *semiformalizzazione*. Il problema della formalizzazione, però, ritornò gravoso non appena si ebbe a che fare con concetti più complessi di quelli fino allora considerati. Ciò accadde, ad esempio, per lo studio di quelle proprietà che fanno riferimeno ad insiemi di relazioni. A questo punto venne naturale chiedersi se era possibile affrontare il problema della formalizzazione (semiformalizzazione) da un punto di vista più generale. È questo l'oggetto del presente lavoro.

Precisamente: a partire da una acquisita conoscenza del comportamento via trasferimento di certi concetti (riguardati come « formule atomiche » di un linguaggio in evoluzione) si tratta di vedere se è possibile stabilire regole per lo studio del comportamento via trasferimento di nuovi concetti (composti mediante le già acquisite « formule atomiche »), in vista di ottenere un ulteriore arricchimento del nostro linguaggio.

La via che quì seguiremo risolve positivamente il problema ora posto e prende spunto dal precedente studio sulla formalizzazione della s-pla di cui riportiamo qui, senza dimostrazioni, i risultati. Definita per induzione la *wff*:

$$\begin{cases} w_1(x, x_1 \mid c) = (x = x_1), \\ w_s(x, x_1, \dots, x_s \mid c) = \forall y_{y\in c}\,(y \in x \leftrightarrow \forall z_{z\in c}\,(w_{s-1}(z, x_1, \dots, x_{s-1} \mid c) \leftrightarrow \\ \qquad \leftrightarrow w_0(y, z, z \mid c) \vee w_0(y, z, x_s \mid c))), \quad s \geq 2, \end{cases}$$

ove $w_0(x, x_1, x_2 \mid c) = \forall y_{y\in c}\,(y \in x \leftrightarrow y = x_1 \vee y = x_2)$, sussistono i seguenti toremi ai quali è utile premettere la

Definizione: Diremo che α, costante soggettiva o variabile, è *ristretta* a c, costante soggettiva, se α appartiene a c.

Ciò premesso si ha [1]:

[1] Cogliamo qui l'occasione per precisare il significato delle notazioni usate nei prossimi teoremi e di altre che useremo nel seguito.

(1.1) Per α ristretta ad $A_{n+2s-2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ ristrette ad A_n, per ogni $h \geq n+2s-2$, si ha:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \sim i - w_s\ (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \mid A_h).$$

(1.2) Per α ristretta ad $^*A_{n+2s-2}, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ ristrette ad $^*A_n$, per ogni $h \geq n+2\,s-2$, si ha:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \sim i - w_s\ (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \mid {}^*A_h).$$

(1.3) Per ogni n risulta:

$$^*w_s\ (\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s \mid A_n) = w_s\ (^*\alpha, {}^*\alpha_1, \ldots, {}^*\alpha_s \mid {}^*A_n).$$

Da quest'ultima, come corollario otteniamo:

(1.4) Per ogni $a \in A_{n+2s-2}, a_1, \ldots, a_s \in A_n$ e per ogni $h \geq n+2\,s-2$ si ha:

$$i - w_s\ (a, a_1, \ldots, a_s \mid A_h) \sim i - w_s\ (^*a, {}^*a_1, \ldots, {}^*a_s \mid {}^*A_h).$$

Ne segue allora, in particolare, che alla metafrase

$$X\ (x, x_1, \ldots, x_s) = \text{« } x = (x_1, \ldots, x_s) \text{ e } x \in A_{n+2s-2}, x_1, \ldots, x_s \in A_n \text{ »}$$

si può associare la metafrase

$$* -X\ (x, x_1, \ldots, x_s) = \text{« } i - w_s\ (x, x_1, \ldots, x_s \mid {}^*A_{n+2s-2}) \text{ e}$$

$$x \in {}^*A_{n+2s-2}, x_1, \ldots, x_s \in {}^*A_n \text{ »}$$

A_j livello j-simo della sovrastruttura $\hat{A}$ di base $A = A_0$ (secondo H. J, Keisler [1])

$^*a$ immagine di $a \in \hat{A}$ tramite il monomorfismo φ di $\hat{A}$ nella sovrastruttura $\hat{B}$ di base B (monomorfismo stretto secondo E. Zakon [2])

$^*\alpha$ come sopra se α costante soggettiva; α stesso se α variabile

I insieme delle entità interne

L linguaggio formalizzato del primo ordine con costanti relazioni $=, \in$ e insieme delle costanti soggettive $\hat{A}$

L' come sopra con insieme delle costanti soggettive I

L_∞ come L con l'aggiunta della successione di formule atomiche $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$

L'_∞ come sopra con riferimento a L'

$i-$ interpretazione identica

$^*w$ *wff* di L' (o L'_∞) che si ottiene dalla *wff* w L (o L_∞) rimpiazzando *ogni* costante soggettiva con la sua trasformata tramite φ.

in modo tale che per ogni $a, a_1, \dots, a_s \in \hat{A}$ risulti

$$X(a, a_1, \dots, a_s) \sim * - X(*a, *a_1, \dots, *a_s).$$

Questa considerazione suggerisce, ai fini del nostro problema, di ricercare una metodologia generale tale che ad *ogni* metafrase $X(x_1, \dots, x_s)$ associ una metafrase $*-X(x_1, \dots, x_s)$ in modo che sussista la:

(1.5) Per ogni $a_1, \dots, a_s \in \hat{A}$ riesca:

$$X(a_1, \dots, a_s) \sim * - X(*a_1, \dots, *a_s),$$

che può anche esprimersi con la: se $a_1, \dots, a_s \in \hat{A}$ soddisfano al concetto espresso dalla $X(x_1, \dots, x_s)$ (cioè se la $X(a_1, \dots, a_s)$ sussiste), allora le trasformate $*a_1, \dots, *a_s$ soddisfano al concetto «trasformato» ($*$—concetto); $*-X(x_1, \dots, x_s)$; e viceversa.

2. Prolungamento del monomorfismo.

Riprendendo in esame il problema posto al termine del numero precedente, cominciamo con l'osservare che nella (1.5) le metafrasi $X(x_1, \dots, x_s)$ e $*-X(x_1, \dots, x_s)$ intervengono come metaenunciati dopo una preliminare sostituzione delle « variabili » $x_1, \dots, x_s$ con entità di $\hat{A}$ e $\hat{B}$, rispettivamente.

Questo vincolo posto sulla scelta delle variabili conferisce ai concetti espressi dalle due metafrasi un significato restrittivo o, come meglio diremo in seguito, *relativizzato* alle rispettive sovrastrutture. Ora, ogni concetto relativizzato ad una sovrastruttura può essere espresso, equivalentemente, dal concetto di appartenenza ad un suo opportuno sottoinsieme. Infatti, con riferimento ad $\hat{A}$ e a $X(x_1, \dots, x_s)$, poniamo:

$$C = \{(e_1, \dots, e_s) \in \hat{A}^s \mid X(e_1, \dots, e_s)\}.$$

È immediato allora verificare che $C \subset \hat{A}$ (è $C \subset \hat{A}^s \subset \hat{A}$) e che per ogni $a_1, \dots, a_s \in \hat{A}$ riesce:

$$(a_1, \dots, a_s) \in C \sim X(a_1, \dots, a_s).$$

In conclusione: *ogni concetto relativizzato ad* $\hat{A}$ *(a* $\hat{B}$*) trova una sua rappresentazione in un sottoinsieme C; viceversa, ogni sottoinsieme C di* $\hat{A}$ (di $\hat{B}$) *rappresenta un concetto relativizzato (almeno la relazione di appartenenza a C).*

Queste considerazioni lasciano intendere come il problema di associare a $X(x_1, \ldots, x_s)$ una $*-X(x_1, \ldots, x_s)$ in modo che sussista la (1.5) possa essere ricondotto a quello di costruire una applicazione che associ ad ogni sottoinsieme C di $\hat{A}$ un sottoinsieme ${}^{(*)}C$ di $\hat{B}$ (ovvero un'applicazione di $P(\hat{A})$ in $P(\hat{B})$) in modo che, posto $*-(x \in C) = x \in {}^{(*)}C$, sia verificata la (1.5) che ora diventa:

(2.1) Per ogni $a \in \hat{A}$ si ha: $a \in C \sim {}^*a \in {}^{(*)}C$.

Prima di passare alla costruzione dell'applicazione osserviamo che, essendo $\hat{A} - A_0 \subset P(\hat{A})$, la (2.1) deve valere in particolare per ogni *entità propria* di $\hat{A}$. Allora, ad ogni $C \in \hat{A} - A_0$ la nostra applicazione dovrà associare ${}^{(*)}C = {}^*C$; il che vuol dire che essa dovrà essere un *prolungamento del monomorfismo* φ che, come appare ormai naturale, indicheremo nel seguito con ${}^{(*)}\varphi$.

Veniamo ora alla definizione di ${}^{(*)}\varphi$. Sia $C \subset \hat{A}$. In generale C non è un'entità. Tenuto conto, però, che è $\hat{A} = \lim A_n$, posto $C_n = C \cap A_n$, riesce, com'è facile verificare, $C_n \in \hat{A} - A_0$, $C_n \subset C_{n+1}$, e $\lim C_n = C$. L'insieme C è quindi raggiungibile come limite di una successione monotona crescente di entità proprie. Viene naturale a questo punto pensare di raggiungere ${}^{(*)}C$ in modo analogo ponendo ${}^{(*)}\varphi(C) = {}^{(*)}C = \lim {}^*C_n$.

L'esistenza del $\lim {}^*C_n$ è garantita dalla condizione ${}^*C_n \subset {}^*C_{n+1}$ che segue dalla $C_n \subset C_{n+1}$. Si ha poi $C_n \subset A_n$, $(C_{n+h} - C_n) \cap A_n = \phi$ e quindi ${}^*C_n \subset {}^*A_n$, $({}^*C_{n+h} - {}^*C_n) \cap {}^*A_n = \phi$; le entità C_n e ${}^*C_n$ possono allora essere riguardate come le approssimazioni di C e ${}^{(*)}C$ ai livelli A_n e ${}^*A_n$, rispettivamente. È utile, per il seguito, sottolineare ancora che sussiste la

$$(2.2) \qquad {}^*C_n = {}^{(*)}C \cap {}^*A_n$$

come facilmente segue dalle relazioni precedenti.

Osserviamo inoltre che è ${}^{(*)}C \subset I$ e quindi, con la definizione data, la ${}^{(*)}\varphi$ è una applicazione di $P(\hat{A})$ in $P(I) \subset P(\hat{B})$. È facile poi verificare che, come si voleva, la restrizione di ${}^{(*)}\varphi$ su $\hat{A} - A_0$ coincide con il monomorfismo φ. Basta osservare, per questo, che se C è una entità propria riesce $C \in A_m$, per qualche m, e quindi $C_n = C$ definitivamente (per ogni $n \geq m$); è allora definitivamente $^*C_n = {}^*C$, da cui $^{(*)}C = \lim {}^*C_n = {}^*C$.

Rimane ancora da provare la (2.1). Lasciamo al Lettore la sua facile verifica, segnalando qui, piuttosto, che sussiste la seguente proposizione che è importante tener presente per il seguito:

(2.3) Se $C \subset \hat{A}^s$, posto $C_n' = C \cap A_n^s$, riesce: $\lim {}^*C_n' = {}^{(*)}C$.

DIMOSTRAZIONE: Essendo $A_n^s \subset A_{n+2s-2}$ si ha che $C_n' = (C \cap A_n^s) \cap A_{n+2s-2} = C_{n+2s-2} \cap A_n^s$. Trasformando si ottiene $^*C_n' = {}^*C_{n+2s-2} \cap {}^*A_n^s$; tenuto conto che $C_n' \subset C'_{n+1}$, passando al limite, si ha:

$$\lim {}^*C_n' = \bigcup ({}^*C_{n+2s-2} \cap {}^*A_n^s) = (\bigcup {}^*C_{n+2s-2}) \cap (\bigcup {}^*A_n^s) = {}^{(*)}C \cap I^s.$$

Ora, tenuto conto che dalla $C \subset \hat{A}^s$ segue $^{(*)}C \subset I^s$, si ha la tesi.

Osserviamo che le successioni (C_n') e (C_n) convergono allo stesso limite C. La (2.3) dice allora che le corrispondenti successioni trasformate convergono al medesimo insieme $^{(*)}C$. A questo punto può nascere il sospetto che questo risultato sussista in generale, che valga cioè la seguente proposizione: se due successioni convergono ad uno stesso limite in $\hat{A}$, anche le loro successioni trasformate convergono allo stesso limite in I. Il seguente controesempio prova però che ciò non è vero.

Sia A_0 numerabile, cioè sia $A_0 = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Consideriamo le successioni: $D_n = A_0$, $D_n' = \{a_1, \dots, a_n\}$. Riesce ovviamente $\lim D_n = \lim D_n' = A_0$, mentre $\lim {}^*D_n = {}^*A_0$, $\lim {}^*D_n' = \lim \{{}^*a_1, \dots, {}^*a_n\} = \varphi[A_0]$.

Ora è $\varphi\,[A_0] \subset {}^*A_0$. Ne segue l'asserto tutte le volte che il monomorfismo φ è non standard.

3. Alcune proprietà di $^{(*)}\varphi$.

L'applicazione $^{(*)}\varphi$ gode di proprietà analoghe a quelle del monomorfismo φ. Riportiamo in questo numero quelle che hanno per noi interesse per i successivi sviluppi. Premettiamo al loro elenco la seguente

DEFINIZIONE: Dicesi *cilindro destro in E di tipo s, r e di base $C \subset E$* l'insieme

$$\overset{s,r}{|_{\overline{E}}}(C) = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in E^{s+r} \mid (e_1, \dots, e_s) \in C\}.$$

Analogamente, dicesi *cilindro sinistro in E di tipo r, s e di base* $C \subset E$ l'insieme

$$\overset{r,s}{\overline{\;\;}|}_E(C)=\{(e_1,\dots,e_{s+r})\in E^{s+r}\mid (e_{r+1},\dots,e_{r+s})\in C\}.$$

Ciò premesso, sussistono le seguenti proprietà:

(3.1) $C\in\hat{A}-A_0$ implica ${}^{(*)}C={}^{*}C$.

(3.2) ${}^{(*)}\hat{A}=I$.

(3.3) $C^{(1)}=C^{(2)}\sim{}^{(*)}C^{(1)}={}^{(*)}C^{(2)}$.

(3.4) $C^{(1)}\subset C^{(2)}\sim{}^{(*)}C^{(1)}\subset{}^{(*)}C^{(2)}$.

(3.5) ${}^{(*)}(C^{(1)}-C^{(2)})={}^{(*)}C^{(1)}-{}^{(*)}C^{(2)}$.

(3.6) ${}^{(*)}(C^{(1)}\cap\dots\cap C^{(s)})={}^{(*)}C^{(1)}\cap\dots\cap{}^{(*)}C^{(s)}$.

(3.7) ${}^{(*)}(C^{(1)}\cup\dots\cup C^{(s)})={}^{(*)}C^{(1)}\cup\dots\cup{}^{(*)}C^{(s)}$.

(3.8) ${}^{(*)}(C^{(1)}\times\dots\times C^{(s)})={}^{(*)}C^{(1)}\times\dots\times{}^{(*)}C^{(s)}$.

(3.9) $C\subset\hat{A}^s\sim{}^{(*)}C\subset I^s$.

Posto $\Pi_j^s(C)=\{(e_1,\dots,e_{j-1},e_{j+1},\dots,e_s)\mid$ esiste e_j tale che $(e_1,\dots,e_s)\in C\}$, risulta:

(3.10) ${}^{(*)}\Pi_j^s(C)\supset\Pi_j^s({}^{(*)}C)$.

(3.11) Se per ogni n esiste h tale che

(1) $$A_n^{s-1}\cap\Pi_j^s(C\cap A_h^s)=A_n^{s-1}\cap\Pi_j^s(C),$$

allora si ha:

$${}^{(*)}\Pi_j^s(C)=\Pi_j^s({}^{(*)}C).$$

Vale inoltre il viceversa se φ è non standard.

Si ha poi:

(3.12) ${}^{(*)}|\overset{s,r}{\overline{\;\;}}_{\hat{A}}(C)=|\overset{s,r}{\overline{\;\;}}_{I}({}^{(*)}C)$ e ${}^{(*)}\overset{r,s}{\overline{\;\;}|}_{\hat{A}}(C)=\overset{r,s}{\overline{\;\;}|}_{I}({}^{(*)}C)$.

DIMOSTRAZIONI: La (3.1) è stata dimostrata nel numero precedente. La (3.2) è banale, mentre la (3.3), assicurante l'iniettività della ${}^{(*)}\varphi$, consegue dalla (3.4) seguente.

(3.4) La $C^{(1)} \subset C^{(2)}$ implica ${}^{(*)}C^{(1)} \subset {}^{(*)}C^{(2)}$, segue facilmente una volta osservato che $C_n^{(1)} \subset C_n^{(2)}$.
Proviamo l'implicazione inversa. Sia dunque ${}^{(*)}C^{(1)} \subset {}^{(*)}C^{(2)}$. Prendiamo $e \in C^{(1)}$. Esiste allora n tale che $e \in C_n^{(1)}$ e quindi si ottiene ${}^*e \in {}^{(*)}C^{(1)}$, cioè ${}^*e \in {}^{(*)}C^{(2)}$. Per qualche m è allora ${}^*e \in {}^*C_m^{(2)}$, da cui $e \in C_m^{(2)}$. Ne segue la tesi.

(3.5) Posto $C = C^{(1)} - C^{(2)}$, riesce: $C_n = (C^{(1)} - C^{(2)}) \cap A_n = C_n^{(1)} - C_n^{(2)}$, da cui ${}^*C_n = {}^*C_n^{(1)} - {}^*C_n^{(2)}$.
Ciò premesso cominciamo col provare che:

— ${}^{(*)}C \subset {}^{(*)}C^{(1)} - {}^{(*)}C^{(2)}$. Sia $e \in {}^{(*)}C$. Essendo ${}^*C_n \subset {}^*C_{n+h}$ per ogni n ed h (è infatti $C_n \subset C_{n+h}$), ne segue che se riesce $e \in {}^*C_n = {}^*C_n^{(1)} - {}^*C_n^{(2)}$ è anche $e \in {}^*C_{n+h} = {}^*C^{(1)}_{n+h} - {}^*C^{(2)}_{n+h}$ per ogni h. Pertanto si ha che $e \in {}^{(*)}C^{(1)}$ e $e \notin \bigcup\limits_h {}^*C_{n+h} = {}^{(*)}C^{(2)}$. Cioè $e \in {}^{(*)}C^{(1)} - {}^{(*)}C^{(2)}$.

— Proviamo l'inclusione opposta. Sia $e \in {}^{(*)}C^{(1)} - {}^{(*)}C^{(2)}$. Esiste allora m tale che $e \in {}^{(*)}C_m^{(1)}$, mentre $e \notin {}^*C_n^{(2)}$ qualunque sia n. Pertanto riesce $e \in {}^*C_m^{(1)} - {}^*C_m^{(2)} = {}^*C_m \subset {}^{(*)}C$.
Ne segue la tesi.

(3.6) Per semplicità poniamo $s=2$. Posto $C = C^{(1)} \cap C^{(2)}$, riesce: $C_n = (C^{(1)} \cap C^{(2)}) \cap$ $\cap A_n = C_n^{(1)} \cap C_n^{(2)}$. Trasformando si ottiene:

$$ {}^{(*)}C = \bigcup ({}^*C_n^{(1)} \cap {}^*C_n^{(2)}) = (\bigcup {}^*C_n^{(1)}) \cap (\bigcup {}^*C_n^{(2)}) = {}^{(*)}C^{(1)} \cap {}^{(*)}C^{(2)}. $$

(3.7) La prova è analoga a quella della (3.6).

(3.8) Posto $C = C^{(1)} \times \ldots \times C^{(s)}$, si ha:

$$ C_n' = (C^{(1)} \times \ldots \times C^{(s)}) \cap A_n^s = (C^{(1)} \cap A_n) \times \ldots \times (C^{(s)} \cap A_n) = C_n^{(1)} \times \ldots \times C_n^{(s)}. $$

Trasformando otteniamo: ${}^*C_n' = {}^*C_n^{(1)} \times \ldots \times {}^*C_n^{(s)}$ da cui, per la (2.2),

$$ {}^*C_n' = ({}^{(*)}C^{(1)} \cap {}^*A_n) \times \ldots \times ({}^{(*)}C^{(s)} \cap {}^*A_n) = ({}^{(*)}C^{(1)} \times \ldots \times {}^{(*)}C^{(s)}) \cap {}^*A_n^s. $$

Tenuto conto del teorema (2.3), passando al limite membro a membro, otteniamo:

$$ {}^{(*)}C = ({}^{(*)}C^{(1)} \times \ldots \times {}^{(*)}C^{(s)}) \cap I^s = {}^{(*)}C^{(1)} \times \ldots \times {}^{(*)}C^{(s)}. $$

(3.9) Segue dalla seguente catena di equivalenze che sussistono per i teoremi (3.4), (3.8), (3.2):

$$C\subset\hat{A}^s\sim{}^{(*)}C\subset{}^{(*)}(\hat{A}^s)\sim{}^{(*)}C\subset({}^{(*)}\hat{A})^s\sim{}^{(*)}C\subset I^s.$$

(3.10) Sia $D=\Pi_j^s(C)$. È facile verificare che $\Pi_j^s(C_n)\subset D_n$. Ne segue ${}^*\Pi_j^s(C_n)=$ $=\Pi_j^s({}^*C_n)\subset{}^*D_n$; passando al limite si ottiene la tesi.

(3.11) Per comodità indichiamo con Π la Π_j^s.

Sia intanto $C\subset\hat{A}^s$ e poniamo $D=\Pi(C)$. Per ipotesi, per ogni n esiste $h\geq n$ tale che:

$$D_n'=A_n^{s-1}\cap\Pi(C)=A_n^{s-1}\cap\Pi(C\cap A_h^s)=A_n^{s-1}\cap\Pi(C_h')\ (2).$$

Trasformando si ottiene ${}^*D_n'={}^*A_n^{s-1}\cap\Pi({}^*C_h')$ da cui, passando al limite, otteniamo:

$${}^{(*)}\Pi(C)=I^{s-1}\cap\lim_n\Pi({}^*C_h')=\lim_n\Pi({}^*C_h').$$

Ora, essendo $h\geq n$, per la (2.3) risulta la tesi.

Per C qualunque, osservato che $\Pi(C)=\Pi(C\cap\hat{A}^s)$ e $\Pi({}^{(*)}C)=\Pi({}^{(*)}C\cap I^s)$, la tesi si consegue sfruttando il risultato particolare appena provato ed i teoremi (3.6), (3.8), (3.2).

Passando ora alla necessità, sviluppiamo la dimostrazione nelle sue linee generali. Per maggiori dettagli si veda la dimostrazione rigorosa e puntuale riportata nell'Appendice, curata da S. Holzer.

Sia dunque φ non standard. Supposto ${}^{(*)}\Pi(C)=\Pi({}^{(*)}C)$ esista, per assurdo, n_0 tale che, qualunque sia h, risulti:

$$A_{n_0}^{s-1}\cap\Pi(C\cap A_h^s)\subsetneqq A_{n_0}^{s-1}\cap\Pi(C). \tag{2}$$

— Posto $h=0$, esiste allora $g_0\in A_{n_0}^{s-1}$ e $g_0\in\Pi(C)-\Pi(C\cap A_0^s)$; è possibile pertanto trovare $k_0>0$ tale che $g_0\in\Pi(C\cap A_h^s)$ se e solo se $h\geq k_0$.

— Posto ora $h=k_0$, esiste, sempre per la (2), $g_1\in A_{n_0}^{s-1}$ e $g_1\in\Pi(C)-\Pi(C\cap A_{k_0}^s)$. $g_1\neq g_0$; come in precedenza, anche quì, è possibile trovare un $k_1>k_0$ tale che $g_1\in\Pi(C\cap A_h^s)$ se e solo se $h\geq k_1$.

Iterando il procedimento si viene a determinare una successione (g_n) di entità, a due a due distinte, di $A_{n_0}^{s-1}$ ed una corrispondente successione crescente (k_n) di numeri naturali, in modo che sussista la

$$g_n\in\Pi(C\cap A_h^s)\text{ se e solo se }h\geq k_n. \tag{3}$$

(2) È facile verificare che se, fissato n, sussiste la (1) per un certo h, essa sussiste anche per ogni $k\geq h$. Da qui la possibilità di prendere $h\geq n$.

A partire ora dalla successione di entità (g_n), costruiamo la successione d'insiemi (D_n) ponendo $D_n = \{(e_1, \dots, e_s) \in C \mid (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) = g_n\}$. Si ha: $\varPi(D_n) = \{g_n\}$ e quindi $\varPi(D_n \cap A_h^s)$ vuoto o uguale a $\{g_n\}$. Quest'ultima circostanza implica $g_n \in \varPi(C \cap A_h^s)$ e pertanto, per la (3), essa si verifica se e solo se $h \geq k_n$; cioè $\varPi(D_n \cap A_h^s) = \phi$ per ogni $h < k_n$. Posto $D = \bigcup D_n$, allora si ha:

$$\varPi(D \cap A_h^s) = \bigcup \varPi(D_n \cap A_h^s) = \{g_0, \dots, g_{t_h}\},$$

con t_h naturale opportuno (e t_h divergente al divergere di h). Ne segue che ${}^*\varPi(D \cap A_h^s) = \varPi({}^*D_h') = \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_{t_h}\}$, da cui, passando al limite, $\varPi({}^{(*)}D) = \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_n, \dots\}$.
Essendo poi, evidentemente, $\varPi(D) = \{g_0, \dots, g_n, \dots\} \subset A_{n_0}^{s-1}$ e tenuto conto che φ è non standard si ottiene $\varPi({}^{(*)}D) = \varphi[\varPi(D)] \subsetneqq {}^*\varPi(D) = {}^{(*)}\varPi(D)$. Ciò premesso, dalla $C = (C - D) \cup D$, otteniamo le:

$${}^{(*)}\varPi(C) = {}^{(*)}\varPi(C - D) \cup {}^{(*)}\varPi(D),$$

$$\varPi({}^{(*)}C) = \varPi({}^{(*)}(C - D)) \cup \varPi({}^{(*)}D),$$

che, tenuto anche conto delle $\varPi({}^{(*)}(C-D)) \subset {}^{(*)}\varPi(C-D)$ e ${}^{(*)}\varPi(C-D) \cap \cap {}^{(*)}\varPi(D) = \phi$, assicurano la ${}^{(*)}\varPi(C) \subsetneqq \varPi({}^{(*)}C)$, contro l'ipotesi.

(3.12) Posto $D_n' = \Big|_{\hat{A}}^{s,r}(C) \cap A_n^{s+r} = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in A_n^{s+r} \mid (e_1, \dots, e_s) \in C_{n+2s-2}\}$, è facile provare che

$$D_n' = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in A_n^{s+r} \mid (e_1, \dots, e_s) \in C_{n+2s-2} \text{ e } (e_{s+1} = e_{s+1}) \text{ e} \dots \text{e } (e_{s+r} = e_{s+r})\}.$$

Per la (1.1) si ha:

$$D_n' = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in A_n^{s+r} \mid i - (\exists y_{y \in O_{n+2s-2}} (w_s(y, e_1, \dots, e_s \mid A_{n+2s-2})) \wedge$$
$$(e_{s+1} = e_{s+1}) \wedge \dots \wedge (e_{s+r} = e_{s+r}))\}.$$

Trasformando, tenendo conto delle (1.2) e (1.3), si ottiene:

$${}^*D_n' = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in {}^*A_n^{s+r} \mid (e_1, \dots, e_s) \in {}^*C_{n+2s-2} \text{ e } (e_{s+1} = e_{s+1}) \text{ e} \dots$$
$$\dots \text{e } (e_{s+r} = e_{s+r})\} = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in {}^*A_n^{s+r} \mid (e_1, \dots, e_s) \in {}^{(*)}C\}.$$

Ora per la (2.3) riesce $\lim {}^*D_n' = {}^{(*)}\Big|_{\hat{A}}^{s,r}(C)$, e quindi passando al limite membro a membro si ha:

$${}^{(*)}\Big|_{\hat{A}}^{s,r}(C) = \{(e_1, \dots, e_{s+r}) \in I^{s+r} \mid (e_1, \dots, e_s) \in {}^{(*)}C\} = \Big|_{I}^{s,r}({}^{(*)}C).$$

In modo analogo si consegue la dimostrazione per il cilindro sinistro.

4. Star-concetti. Prime proprietà.

La nozione di star-concetto è già stata delineata nei numeri 1 e 2. Approfondiremo ora l'argomento, trattandolo in modo sistematico, anche ripetendo, ove occorra, per maggior chiarezza, cose già dette in precedenza in modo più o meno esplicito.

Sia dunque $X(x_1, \dots, x_s)$ una proposizione del metalinguaggio, con $x_1, \dots, x_s$ uniche « variabili libere ». È possibile allora isolare in $\hat{A}$ (o equivalentemente in $\hat{A}^s$) l'insieme

$$C = \{(e_1, \dots, e_s) \in \hat{A}^s \mid X(e_1, \dots, e_s)\}$$

che rappresenta il concetto espresso dalla $X(x_1, \dots, x_s)$, relativizzato ad $\hat{A}$; e ciò nel senso che esso è l'insieme di tutti e soli gli elementi di $\hat{A}$ che soddisfano la $X(x_1, \dots, x_s)$.

Poiché la metafrase « $x \in C$ » isola il medesimo insieme C, ne segue che le metafrasi $X(x_1, \dots, x_s)$ e « $x \in C$ », relativizzate ad $\hat{A}$, sono equivalenti. Osserviamo ancora che, essendo C un insieme di s-ple, l'appartenenza a C può essere espressa, equivalentemente, con la metafrase « $(x_1, \dots, x_s) \in C$ ». In conclusione, riesce allora: $X(x_1, \dots, x_s) \sim (x_1, \dots, x_s) \in C$ *relativamente* ad $\hat{A}$.

Tenuto ora conto che ${}^{(*)}C$ è anche un insieme di s-ple, perché tale è C, diamo la seguente

DEFINIZIONE: Dicesi *star-concetto* (*$*$-concetto*) *associato ad* $X(x_1, \dots, x_s)$ il concetto espresso dalla metafrase $*-X(x_1, \dots, x_s) =$ $=$ « $(x_1, \dots, x_s) \in {}^{(*)}C$ ».

Una prima interessante proprietà mette in relazione lo $*$-concetto associato alla proposizione $X(x_1, \dots, x_s)$, $s \geq 2$, con quello associato alla proposizione X' che da essa si ottiene rimpiazzando $r < s$ variabili con altrettante entità di $\hat{A}$. Vale cioè, in proposito, la:

(4.1) Lo $*$-concetto associato a X' si può ottenere dalla metafrase $*-X(x_1, \dots, x_s)$, sostituendo le r variabili rimpiazzate con le trasformate delle relative entità:

DIMOSTRAZIONE: Proviamo il teorema nel caso particolare in cui una sola variabile, x_s, venga rimpiazzata da $a \in \hat{A}$. Riesce allora $X' = X(x_1, \dots, x_{s-1}, a)$. Indicati con C e D, rispettivamente, le rappresentazioni di X e X' in $\hat{A}$, si ha:

$$D_n' = \{(e_1, \dots, e_{s-1}) \in A_n^{s-1} \mid (e_1, \dots, e_{s-1}, a) \in C\}.$$

Sia, ora, $a \in A_m$. Per $n \geq m$ allora si ha, per (1.1):

$$D_n' = \{(e_1, \dots, e_{s-1}) \in A_n^{s-1} \mid i - \exists y_{y \in \sigma_{n+2s-2}} (w_s (y, e_1, \dots, e_{s-1}, a \mid A_{n+2s-2}))\}.$$

Trasformando e tenendo conto che $e_1, \dots, e_{s-1}$, $^*a$ sono ristrette $a\, ^*A_n$ e y è ristretta $a\, ^*C_{n+2s-2} \subset {}^*A_{n+2s-2}$, per la (1.2) e la (1.3), si ottiene:

$$^*D_n' = \{(e_1, \dots, e_{s-1}) \in {}^*A_n^{s-1} \mid (e_1, \dots, e_{s-1}, {}^*a) \in {}^*C_{n+2s-2}\} =$$

$$= \{(e_1, \dots, e_{s-1}) \in {}^*A_n^{s-1} \mid (e_1, \dots, e_{s-1}, {}^*a) \in {}^{(*)}C\}.$$

Passando al limite membro a membro si ha:

$$^{(*)}D = \{(e_1, \dots, e_{s-1}) \in I^{s-1} \mid (e_1, \dots, e_{s-1}\, {}^*a) \in {}^{(*)}C\}.$$

Cioè, come si voleva: $(x_1, \dots, x_{s-1}) \in {}^{(*)}D \sim (x_1, \dots, x_{s-1}, {}^*a) \in {}^{(*)}C$.

Analoga conclusione vale, ovviamente, se si rimpiazza anziché x_s, una qualsiasi variabile x_j. Dopo di ché, la prova si consegue facilmente per induzione.

Un'altra notevole proprietà, conseguenza immediata della (2.1), si ottiene rimpiazzando *tutte* le variabili libere di $X(x_1, \dots, x_s)$ con entità di $\hat{A}$ e quelle di $* - X(x_1, \dots, x_s)$ con le corrispondenti trasformate. Sussiste infatti il seguente teorema, che fornisce una formulazione del principio di Leibniz in termine di $*$-concetti:

(4.2) Siano $a_1, \dots, a_s \in \hat{A}$. Riesce allora:

$$X(a_1, \dots, a_s) \sim * - X({}^*a_1, \dots, {}^*a_s).$$

A parole: se le entità $a_1, \dots, a_s$ di $\hat{A}$ soddisfano alla proposizione $X(x_1, \dots, x_s)$, allora le corrispondenti entità trasformate soddisfano alla proposizione $* - X(x_1, \dots, x_s)$; e viceversa.

Passeremo più sotto alla considerazione di alcune notevoli proprietà, fondamentali per la composizione degli $*$ — concetti. Preliminarmente consideriamo un teorema che riguarda una formulazione equivalente della proprietà espressa come ipotesi nella (3.11), formulazione che interverrà nei due teoremi interessanti le composizioni in cui compaiono quantificatori metalinguistici. Sussiste in proposito la:

(4.3) Le seguenti due proposizioni sono equivalenti:

a. Per ogni n esiste h tale che:

(1) $A_n^{s-1} \cap \Pi_j^s (C \cap A_h^s) = A_n^{s-1} \cap \Pi_j^s (C)$.

b. Per ogni n esiste h tale che, scelte comunque le entità $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s \in A_n$ si ha:

(2) « esiste e_j tale che $(e_1, \dots, e_s) \in C$ » $\sim$ « esiste e_j di A_h tale che $(e_1, \dots, e_s) \in C$ ».

DIMOSTRAZIONE: Per semplicità di scrittura poniamo $j=1$ ed indichiamo Π_j^s con Π.

— *Sussista la a*). Fissato n esiste allora h tale che valga la (1). Scelti $e_2, \dots, e_s \in A_n$ proviamo che la (2) è verificata per tale h.
Supponiamo intanto e_1 tale che $(e_1, \dots, e_s) \in C$. Ne segue $(e_2, \dots, e_s) \in A_n^{s-1} \cap \Pi(C)$ e quindi, per la (1), si ha che $(e_2, \dots, e_s) \in \Pi (C \cap A_h^s)$. Esiste allora e_1' tale che $(e_1', e_2, \dots, e_s) \in C \cap A_h^s$, cioè esiste $e_1' \in A_h$ tale che $(e_1', e_2, \dots, e_s) \in C$. Ciò prova una delle implicazioni della (2). L'implicazione opposta è banale.

— *Sussista la b*). Fissato n esiste h' tale che valga la (2). Proviamo che la (1) sussiste per $h = \max(h', n)$.
Sia $(e_2, \dots, e_s) \in A_n^{s-1} \cap \Pi (C)$. Esiste allora e_1 tale che $e_2, \dots, e_s \in A_n$ e $(e_1, \dots, e_s) \in C$. Ne segue, per la (2), che esiste $e_1' \in A_h$ tale che $(e_1', e_2, \dots, e_s) \in C$. Poiché $e_1', e_2, \dots, e_s \in A_h$, risulta che $(e_1', e_2, \dots, e_s) \in C \cap A_h^s$. Pertanto è $(e_2, \dots, e_s) \in A_n^{s-1} \cap \Pi (C \cap A_h^s)$. Ciò prova che nella (1) il secondo insieme è incluso nel primo. L'inclusione opposta è ovvia.

Passiamo ora ai teoremi riguardanti la composizione degli $*$-concetti. Trattasi di teoremi che consentono di ottenere, a partire da $*$-concetti di noto significato, $*$-concetti via via più complessi. Siano dunque $X(x_1, \dots, x_s)$, $Y(y_1, \dots, y_r;\ x_1, \dots, x_s)$ e $Z(x_1, \dots, x_s;\ z_1, \dots, z_t)$ tre *predicati* metalinguistici con $x_1, \dots, x_s$ *uniche variabili libere comuni* a Y e Z (3). Sussistono allora le:

(4.4) $*-$(non X) $\sim$ non $(*-X)$, x_j interne.

(4.5) $*-(Y$ o $Z) \sim *-Y$ o $*-Z$, y_j e z_j interne.

(4.6) $*-(Y$ e $Z) \sim *-Y$ e $*-Z$.

(3) Va inteso che nelle notazioni Y e Z in assenza di variabili comuni le x_j non compaiono. Analogo discorso vale per le y_j e z_j.

(4.7) $*-(Y$ implica $Z)\sim *-Y$ implica $*-Z, x_j, y_j$ e z_j interne.

(4.8) $*-(Y$ biimplica $Z)\sim *-Y$ implica $*-Z, x_j, y_j$ e z_j interne.

(4.9) Se per ogni n esiste un numero naturale h tale che per ogni $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s \in A_n$, $s \geq 2$, riesca
« esiste e_j tale che $X(e_1, \dots, e_s)$ » $\sim$ « esiste $e_j \in A_h$ tale che $X(e_1, \dots, e_s)$ »,
allora si ha:
$*-$(esiste x_j tale che $X(x_1, \dots, x_s)) \sim$ esiste x_j tale che $*-X(x_1, \dots, x_s)$.

(4.10) Se per ogni n esiste un numero naturale h tale che per ogni $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s \in A_n$, $s \geq 2$, riesca
« qualunque e_j si ha $X(e_1, \dots, e_s)$ » $\sim$ « qualunque $e_j \in A_h$ si ha $X(e_1, \dots, e_s)$ »,
allora si ha:
$*-$(qualunque x_j si ha $X(x_1, \dots, x_s)) \sim$ qualunque x_j *interno* si ha $*-X(x_1, \dots, x_s)$.

Dimostrazioni: Nelle seguenti dimostrazioni saranno indicati con C, D ed E gli insiemi che rappresentano in $\hat{A}$ i concetti espressi da X, Y e Z, rispettivamente.

(4.4) Alla non-X è associato l'insieme $C^{(1)}=\hat{A}^s - C$. Per i teoremi (3.5) e (3.8) si ha allora che ${}^{(*)}C^{(1)}=I^s - {}^{(*)}C$. Ne segue la tesi.

(4.5) Posto $W(y_1, \dots, y_r;\ x_1, \dots, x_s;\ z_1, \dots, z_t) =$ « $Y(y_1, \dots, y_r;\ x_1, \dots, x_s) \circ$ $\circ\, Z(x_1, \dots, x_s;\ z_1, \dots, z_t)$ », sia $C^{(1)}$ l'insieme che rappresenta la W. Si vede facilmente che

$$C^{(1)}=\{(e_1', \dots, e_r';\ e_1, \dots, e_s;\ e_1'', \dots, e_t'')\in \hat{A}^{r+s+t} \mid (e_1', \dots, e_r';\ e_1, \dots, e_s)\in D \circ$$

$$\circ\,(e_1, \dots, e_s;\ e_1'', \dots, e_t'')\in E\} = \overline{|}^{\,r+s,\,t}_{\hat{A}}(D) \cup \overline{|}^{\,r,\,s+t}_{\hat{A}}(E).$$

Per i teoremi (3.7) e (3.12) si ha:

$${}^{(*)}C^{(1)} = \overline{|}^{\,r+s,\,t}_{I}({}^{(*)}D) \cup \overline{|}^{\,r,\,s+t}_{I}({}^{(*)}E) =$$

$$=\{(e_1', \dots, e_r';\ e_1, \dots, e_s;\ e_1'', \dots, e_t'')\in I^{r+s+t} \mid (e_1', \dots, e_r';\ e_1, \dots, e_s)\in {}^{(*)}D \circ$$

$$\circ\,(e_1, \dots, e_s;\ e_1'', \dots, e_t'')\in {}^{(*)}E\},$$

cioè la tesi. La dichiarazione di internalità per le x_j può essere omessa in quanto dichiarata sia in $*—Y$ che in $*—z$.

(4.6) Dimostrazione analoga alla (4.5).

(4.7) Osservato che « Y implica Z » $\sim$ « non Y o Z », la tesi si consegue applicando le (4.5) e (4.4).

(4.8) Segue dalle (4.6) e (4.7).

(4.9) Osservato che la metafrase « esiste x_j tale che $X(x_1, \dots, x_s)$ » è rappresentata in $\hat{A}$ dall'insieme $\Pi_j^s(C)$ e che la condizione posta per ipotesi equivale alla (a) della (4.3), dal teorema (3.11) segue che l'insieme trasformato è dato da $\Pi_j^s({}^{(*)}C) = \{(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) \mid$ esiste e_j tale che $(e_1, \dots, e_s) \in {}^{(*)}C\}$. Ora, essendo ${}^{(*)}C$ un insieme di s-ple, perché tale è C (v. (3.9)), si ha la tesi.

(4.10) Proviamo preliminarmente che dalla nostra ipotesi segue che è verificata quella del teorema (4.9) per la metafrase «esiste x_j tale che non $X(x_1,\dots,x_s)$». Fissato n sia h uno dei naturali verificante l'ipotesi del nostro teorema (4.10). Proviamo che per detta metafrase è verificata l'ipotesi della (4.9) proprio con questo h. Supponiamo intanto che per $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s \in A_n$ esista e_j tale che sussista la « non $X(e_1, \dots, e_s)$ ». Ne segue che è verificata la « non qualunque e_j si ha $X(e_1, \dots, e_s)$ ». Quindi per l'equivalenza ammessa per ipotesi è verificata la « non qualunque e_j di A_h si ha $X(e_1, \dots, e_s)$ », cioè la « esiste e_j di A_h tale che non $X(e_1, \dots, e_s)$ ». Essendo l'implicazione opposta banale ne segue l'asserto.
Ciò premesso, applicando nell'ordine i teoremi (4.4), (4.9) e (4.4), otteniamo:

$*$— (qualunque x_j si ha $X(x_1, \dots, x_s)) \sim$

$*$— (non esiste x_j tale che non $X(x_1, \dots, x_s)) \sim$

non $*$— (esiste x_j tale che non $X(x_1, \dots, x_s)), x_h$ interno e $h \neq j \sim$
non esiste x_j tale che $*$— (non $X(x_1, \dots, x_s)), x_h$ interno e $h \neq j \sim$
non esiste x_j tale che non $*—X(x_1, \dots, x_s), x_1, \dots, x_s$ interni $\sim$
qualunque x_j si ha $*—X(x_1, \dots, x_s), x_1, \dots, x_s$ interni.
Osservando che l'ultima metafrase è equivalente alla « qualunque x_j interno si ha $(x_1, \dots, x_s) \in {}^{(*)}C$ », essendo ${}^{(*)}C \subset I$, ne segue che le variabili libere sono automaticamente interne. Da qui la tesi.

I teoremi appena provati permettono di trarre la seguente importante conclusione. Se $X(x_1, \dots, x_s)$ è una proposizione composta dalle proposizioni $X_1, \dots, X_r$ attraverso connettivi quali « non », « e », « o », « implica », « biimplica » e i quantificatori « esiste » e « qualunque » soddisfacenti alle ipotesi dei rispettivi teoremi, lo $*$-concetto ad essa associato si può esprimere mediante gli $*$-concetti associati alle $X_1, \dots, X_r$, mantenendo inalterati connettivi e quantificatori.

Circa la condizione posta per il quantificatore « esiste » osserviamo poi quanto segue. Fissati $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s \in A_n$, se esiste $e_j \in \hat{A}$ tale che sussista la $X(e_1, \dots, e_s)$, allora esiste certamente un h tale che $e_j \in A_h$. Questo h, però, *dipende* dalle prefissate entità $e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s$ e quindi varia, in generale, al variare di dette entità, anche se ristrette al livello A_n. La condizione del teorema (4.9) appare pertanto come una *condizione di uniformità*, e ciò nel senso che h dipende dal livello A_n (da n), ma non dai particolari elementi in esso scelti in modo che sia verificata la $X(e_1, \dots, e_s)$, per qualche e_j.

Analoghe considerazioni possono essere fatte sulla condizione posta per il quantificatore « qualunque ».

Si rifletta, infine, che, in forza della equivalenza (4.3), il teorema (4.9) non è altro che una riformulazione del teorema (3.11). In quest'ultimo la condizione *a*) della (4.3) ivi richiesta è, per il teorema (3.11), anche necessaria. Ne segue che anche le condizioni di uniformità richieste dai teoremi (4.9) e (4.10) sono condizioni necessarie e sufficienti affinché sia invertibile il simbolo $*$ con i quantificatori.

5. Descrivibilità degli star-concetti.

La nozione di $*$-concetto è stata introdotta, nel numero precedente, facendo in modo che al concetto espresso da $X(x_1, \dots, x_s)$ e rappresentato in $\hat{A}$ dall'insieme C, corrispondesse il concetto rappresentato in $\hat{B}$ dall'insieme ${}^{(*)}C$. Ciò è stato ottenuto associando alla metafrase « $(x_1, \dots, x_s) \in C$ » la metafrase « $(x_1, \dots, x_s) \in {}^{(*)}C$ ». Concetto e $*$-concetto appaiono allora espressi da metafrasi strettamente analoghe.

Va tuttavia sottolineato che tali metafrasi non sono di fatto significative senza che intervenga una preventiva descrizione di C e di ${}^{(*)}C$, cioè senza che sia stato dato esplicito significato mediante metapredicati alla relazione di appartenenza ai rispettivi insiemi. Per l'insieme C questa descrizione è assicurata dalla metafrase $X(x_1, \dots, x_s)$ che sta a monte di tutto il nostro discorso. Il problema riguarda pertanto l'insieme ${}^{(*)}C$. Per quest'ultimo è allora naturale chiedersi se è possibile ottenere una sua descrizione mediante una metafrase, equivalente in $\hat{B}$ alla $*-X =$ « $(x_1, \dots, x_s) \in {}^{(*)}C$ », che presenti analogie con la metafrase di partenza $X(x_1, \dots, x_s)$ e, conseguentemente, che sia di analogo significato.

Una prima, positiva risposta al quesito posto è fornita dal ben noto teorema:

(5.1) Siano $a_1, \dots, a_s$ entità proprie di $\hat{A}$ e $w(x_1, \dots, x_s)$ un predicato s-rio limitato di L. Posto:

$$E = \{(e_1, \dots, e_s) \in a_1 \times \dots \times a_s \mid i - w(e_1, \dots, e_s)\}$$

riesce

$$^*E = \{(e_1, \dots, e_s) \in {}^*a_1 \times \dots \times {}^*a_s \mid i - {}^*w(e_1, \dots, e_s)\}.$$

Si osservi in proposito che esso sussiste con riferimento ad *entità* di $\hat{A}$; più precisamente per quei sottoinsiemi C di una assegnata entità che risultino descrivibili mediante una metafrase del tipo $i - w(x_1, \dots, x_s)$, ove $w(x_1, \dots, x_s)$ indica un *predicato limitato* del linguaggio L. Sotto queste condizioni l'insieme $^{(*)}C$ è descrivibile in $\hat{B}$ con la metafrase $i - {}^*w(x_1, \dots, x_s)$ cioè in modo strettamente analogo a C, visto che la $^*w(x_1, \dots, x_s)$ si ottiene dalla $w(x_1, \dots, x_s)$ con una semplice sostituzione delle costanti soggettive con le loro trasformate.

I risultati ora ricordati sono collegati al monomorfismo φ. Appare naturale a questo punto cercare di ottenere una loro generalizzazione in relazione al prolungamento $^{(*)}\varphi$. È quanto faremo in questo numero, generalizzando il teorema sia nei riguardi dell'insieme C che potrà non essere un'entità, sia in relazione alla formalizzazione della $X(x_1, \dots, x_s)$, che potrà non essere limitata. Tuttavia tale formalizzazione non potrà non tener conto delle condizioni limitative imposte dai teoremi del numero precedente, riguardanti i quantificatori.

Le due definizioni che seguono si inquadrano in questo discorso e sono suggerite proprio da quest'ultima considerazione.

DEFINIZIONE 1: Sia $Qy\, w(y; x_1, \dots, x_s)$ una *wff* di L_∞, con $x_1, \dots, x_s$ uniche variabili libere. Il quantificatore Q dicesi *finitamente limitabile* nella sovrastruttura $\hat{A}$ se, qualunque sia n, esiste h tale che per ogni $e_1, \dots, e_s \in A_n$ risulta:

$$i - Q\, y\, w(y, e_1, \dots, e_s) \sim i - Q\, y_{y \in A_h}\, w(y; e_1, \dots, e_s).$$

DEFINIZIONE 2: Una *wff* di L_∞ dicesi *finitamente limitabile nella* sovrastruttura $\hat{A}$ (la indicheremo nel seguito con $F - wff$) se tutti i suoi quantificatori sono finitamente limitabili nella sovrastruttura $\hat{A}$.

Osserviamo che ogni *wff* priva di quantificatori riesce, banalmente, finitamente limitabile. Inoltre, ogni quantificatore limitato è finitamente limitabile; infatti, se a è il suo dominio, basta prendere h tale che $a \subset A_h$.

È importante osservare, ancora, che la nozione di quantificatore finitamente limitabile, in quanto basata sulla *i*-interpretazione delle *wff*, è una *nozione semantica*. E ciò contrariamente alla nozione di quantificatore limitato che è invece una *nozione sintattica*.

Osserviamo infine che se w è $F-wff$ si ha che per ogni fissato n, restringendo le variabili libere al livello A_n, essa è sostituibile *ai fini semantici* con una *wff* limitata. In queste ipotesi, infatti, è possibile sostituire nella w un quantificatore per volta con uno limitato ottenendo, ad ogni passo, una *wff* equivalente.

Veniamo ora alla generalizzazione del teorema (5.1). Sussiste il seguente:

(5.2) Sia $w(x_1, \ldots, x_s)$ una $F-wff$ di L_∞. Posto:

$$C=\{(e_1, \ldots, e_s)\in \hat{A}^s \mid i-w(e_1, \ldots, e_s)\},$$

riesce

$$^{(*)}C=\{(e_1, \ldots, e_s)\in I^s \mid i-{}^*w(e_1, \ldots, e_s)\}.$$

In altri termini si ha:

$$*-(i-w(x_1, \ldots, x_s))\sim i-{}^*w(x_1, \ldots, x_s).$$

DIMOSTRAZIONE: Procederemo per induzione sui passi costruttivi della formula a partire, ovviamente, dalle formule atomiche.

Base. In forza del teorema (4.1) basta limitarsi alle formule atomiche prive di costanti soggettive.

(*a*) Sia $w(x_1, x_2)=(x_1=x_2)$. Allora riesce: $C_n=\{(e_1, e_2)\in A_n^2 \mid i-(e_1=e_2)\}$. Pertanto si ha: ${}^*C_n=\{(e_1, e_2)\in {}^*A_n^2 \mid i-(e_1=e_2)\}$. Passando al limite si ottiene: $^{(*)}C=\{(e_1, e_2)\in I^2 \mid i-(e_1=e_2)\}$ e quindi l'asserto.

b) In relazione alla $F-wff$ $(x_1 \in x_2)$ la tesi si consegue in modo analogo a quello della *a*).

c) Per la formula atomica di L_∞ $x=(x_1, \ldots, x_s)$ la tesi si ottiene ricorrendo ai teoremi (1.1), (1.2), (1.3), relativi alla formalizzazione della *s*-pla. Tenendo conto di essi si ha infatti:

$$C_n=\{(e, e_1, \ldots, e_s)\in A_n^{s+1} \mid i-(e=(e_1, \ldots, e_s))\}=$$

$$=\{(e, e_1, \ldots, e_s)\in A_n^{s+1} \mid i-w_s(e, e_1, \ldots, e_s \mid A_{n+2s-2})\},$$

da cui:

$${}^*C_n=\{(e, e_1, \ldots, e_s)\in {}^*A_n^{s+1} \mid i-w_s(e, e_1, \ldots, e_s \mid {}^*A_{n+2s-2})\}=$$

$$=\{(e, e_1, \dots, e_s) \in {}^*A_n^{s+1} \mid i-(e=(e_1, \dots, e_s))\}.$$

Passando al limite la tesi.

Passo induttivo. Siano $w(x_1, \dots, x_s)$, $w_1(y_1, \dots, y_r; x_1, \dots, x_s)$ e $w_2(x_1, \dots, x_s; z_1, \dots, z_t)$ $F-wff$ di L_∞ soddisfacenti la tesi del nostro teorema. Tenuto conto delle regole di costruzione delle *wff*, basta evidentemente provare che soddisfano alla tesi del teorema anche le:

$$\neg w, w_1 \vee w_2, w_1 \wedge w_2, w_1 \rightarrow w_2, w_1 \leftrightarrow w_2, \forall x_j\, w(x_1, \dots, x_s) \text{ e } \exists x_j\, w(x_1, \dots, x_s),$$

nell'ipotesi che anche le ultime due siano $F-wff$.

— $\neg w$. Proviamo che $*-(i-\neg w) \sim i-*(\neg w)$. Applicando il teorema (4.4) e l'ipotesi induttiva si ha:

$$*-(i-\neg w) \sim *-(\text{non } i-w) \sim \text{non } (*-(i-w)),\ x_j \text{ interne } \sim$$

$$\sim \text{non } (i-*w),\ x_j \text{ interne } \sim i-(\neg *w) \sim i-*(\neg w).$$

Circa la dichiarazione di internalità, omessa nei due ultimi passaggi, si ricorda che essa è prevista dalla i-interpretazione di L'_∞, le cui costanti soggettive sono gli elementi di I.

— $w_1 \vee w_2, w_1 \wedge w_2, w_1 \rightarrow w_2, w_1 \leftrightarrow w_2$. Per queste $F-wff$ la tesi si ottiene sfruttando l'ipotesi induttiva e applicando i teoremi (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8), rispettivamente. Le facili dimostrazioni sono analoghe. Riportiamo a titolo d'esempio quella relativa alla $w_1(y_1, \dots, y_r; x_1, \dots, x_s) \rightarrow w_2(x_1, \dots, x_s; z_1, \dots, z_t)$. Si ha:

$$*-(i-(w_1 \rightarrow w_2)) \sim *-(i-w_1 \text{ implica } i-w_2) \sim$$

$$\sim *-(i-w_1) \text{ implica } *-(i-w_2), x_j, y_j, z_j \text{ interne } \sim$$

$$i-*w_1 \text{ implica } i-*w_2, x_j, y_j \text{ e } z_j \text{ interne } \sim i-(*w_1 \rightarrow *w_2) \sim i-*(w_1 \rightarrow w_2).$$

— $\forall x_j\, w$, $\exists x_j\, w$. Facile la dimostrazione anche per le $\forall x_j\, w$ e $\exists x_j\, w$, una volta osservato che la condizione che siano $F-wff$, ammessa per ipotesi, consente di applicare i teoremi (4.9) e (4.10). Per la $\forall x_j\, w(x_1, \dots, x_s)$ si ha:

$$*-(i-\forall x_j\, w) \sim *-(\text{qualunque } x_j \text{ si ha } i-w) \sim$$
$$\text{qualunque } x_j \text{ interno si ha } *-(i-w) \sim \text{ qualunque } x_j \text{ interno si ha } i-*w \sim$$
$$\sim i-(\forall x_j\, *w) \sim i-*(\forall x_j\, w).$$

Analoga la prova per la $\exists x_j\, w$, e con ciò il teorema è provato.

6. Alcuni star-concetti fondamentali.

I teoremi stabiliti nei numeri precedenti consentono ora di iniziare e di condurre uno studio sistematico degli $*$-concetti in vista di una più agevole trattazione della analisi non-standard. Ci limitiamo qui a riportare un primo elenco di $*$-concetti fondamentali che si possono stabilire ricorrendo, quasi esclusivamente, al teorema (5.2), e ciò perché i corrispondenti concetti ammettono una facile formalizzazione finitamente limitabile nel linguaggio L_∞.

Si intende poi come a partire da questi $*$-concetti sia possibile ottenerne altri di complessità via via crescente attraverso i teoremi di composizione provati nel numero 4.

Procedendo in questo modo lo studio dell'analisi non-standard e delle sue applicazioni viene condotto evitando le gravose formalizzazioni richieste da una diretta applicazione del principio di Leibniz.

Veniamo ora al preannunciato elenco di $*$-concetti fondamentali, lasciando al Lettore le relative facili dimostrazioni.

(6.1) $*-(x$ è atomo$)$ $\sim$ « x è atomo, x interna »

$*-(x$ è entità propria$)$ $\sim$ « x è entità propria, x interna »

$*-(x_1=x_2)$ $\sim$ « $x_1=x_2$, x_1 interna »

$*-(x_1 \in x_2)$ $\sim$ « $x_1 \in x_2$, x_2 interna »

$*-(x_1 \subset x_2)$ $\sim$ « $x_1 \subset x_2$, x_1 e x_2 interne »

$*-(x=x_1-x_2)$ $\sim$ « $x=x_1-x_2$, x_1 e x_2 interne »

$*-(x=\bigcap x_1)$ $\sim$ « $x=\bigcap x_1$, x_1 interna »

$*-(x=\bigcup x_1)$ $\sim$ « $x=\bigcup x_1$, x_1 interna »

$*-(x=\{x_1, \dots, x_s\})$ $\sim$ « $x=\{x_1, \dots, x_s\}$, x_j interne »

$*-(x=x_1 \cap \dots \cap x_s)$ $\sim$ « $x=x_1 \cap \dots \cap x_s$, x_j interne »

$*-(x=x_1 \cup \dots \cup x_s)$ $\sim$ « $x=x_1 \cup \dots \cup x_s$, x_j interne »

$*-(x=P(x_1))$ $\sim$ « x insieme delle parti interne di x_1, x_1 interna »

$* - (x=(x_1, \ldots, x_s)) \sim$ « $x=(x_1, \ldots, x_s)$, x_j interne »

$* - (x=x_1 \times \ldots \times x_s) \sim$ « $x=x_1 \times \ldots \times x_s$, x_j interne »

$* - (x=P_j^s(x_1)) \sim$ « $x=P_j^s(x_1)$, x_1 interna » (4)

$* - (x=x_1[x_2]) \sim$ « $x=x_1[x_2]$, x_1 e x_2 interne »

$* - (x=x_1 \circ x_2) \sim$ « $x=x_1 \circ x_2$, x_1 e x_2 interne »

$* - (x=x_1^{-1}) \sim$ « $x=x_1^{-1}$, x_1 interna »

$* -$ (x è relazione s-ria) $\sim$ « x è relazione s-ria, x interna »

$* -$ (x è applicazione) $\sim$ « x è applicazione ,x interna »

$* -$ (x applicazione di x_1 in x_2) $\sim$ « x applicazione di x_1 in x_2, x e x_2 interne »

$* -$ (x_1 applicazione e $x=x_1(x_2)$) $\sim$ « x_1 applicazione e $x=x_1(x_2)$, x_1 interna »

$* -$ (x_2 applicazione di dominio x_1 e $x=\bigcap_{y \in x_1} x_2(y)$) $\sim$ « x_2 applicazione di dominio x_1 e $x=\bigcap_{y \in x_1} x_2(y)$, x_2 interna »

$* -$ (x_2 applicazione di dominio x_1 e $x=\bigcup_{y \in x_1} x_2(y)$) $\sim$ « x_2 applicazione di dominio x_1 e $x=\bigcup_{y \in x_1} x_2(y)$, x_2 interna ».

APPENDICE

Mostriamo qui che se il monomorfismo è non-standard, la condizione (1) del teorema (3.11) è anche necessaria. Basta a tal fine provare il seguente teorema:

(A.1) Sia φ non-standard. Esista n_0 tale che qualunque sia h riesca:

$$A_{n_0}^{s-1} \cap \Pi_j^s(C \cap A_h^s) \subsetneqq A_{n_0}^{s-1} \cap \Pi_j^s(C).$$

(4) Ove $P_j^s(x_1)=\{e_j \mid$ esistono $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_s$ tali che $(e_1, \ldots, e_s) \in x_1\}$.

Allora si ha:

$$^{(*)}\Pi_j^s\,(C) \neq \Pi_j^s\,(^{(*)}C).$$

DIMOSTRAZIONE: Per semplicità di scrittura indichiamo con Π la Π_j^s e poniamo:

$$E_h = (\Pi\,(C) - \Pi\,(C \cap A_h^s)) \cap A_{n_0}^{s-1}.$$

L'ipotesi del teorema assicura che, per ogni h, l'insieme E_h è non vuoto. Siamo così in presenza di una famiglia d'insiemi non vuoti per cui esiste, per l'assioma della scelta, un'applicazione di scelta f; cioè un'applicazione di N in $\bigcup E_h$ tale che $f\,(h) \in E_h$, per ogni h.

Dalla $\Pi\,(C) = \Pi\,(C \cap \hat{A}^s)$ risulta $\Pi\,(C) = \bigcup\limits_h \Pi\,(C \cap A_h^s)$; è pertanto lecito considerare l'applicazione k di $\Pi\,(C)$ in N definita dalla:

$$k\,(x) = \min h\,(x \in \Pi\,(C \cap A_h^s))$$

che associa ad ogni $e \in \Pi\,(C)$ il minimo numero naturale h tale che $e \in \Pi\,(C \cap A_h^s)$.

Essendo (A_h^s) una successione crescente d'insiemi, risulta che:

(1) la successione di termine generale $\Pi\,(C \cap A_h^s)$ è crescente

e quindi:

(2) $e \in \Pi\,(C \cap A_h^s)$ se e solo se $k\,(e) \leq h$.

Essendo infine, ovviamente, $\bigcup E_h \subset \Pi\,(C)$, l'applicazione composta $f \circ k$ è un'applicazione di $\Pi\,(C)$ in $\Pi\,(C)$; esiste allora, per il teorema di ricorrenza finita, un'applicazione g di N in $\Pi\,(C)$ (in $\bigcup E_h$) tale che:

$$g\,(0) = f\,(0)$$

$$g\,(n+1) = f\,(k\,(g\,(n))).$$

Tale applicazione associa quindi allo zero l'elemento scelto in E_0 e ad $n+1$ l'elemento scelto nel primo E_h al quale *non* appartiene l'elemento $g\,(n)$ scelto precedentemente.

Indicato, come di consueto, l'elemento $g\,(n)$ con il simbolo g_n, otteniamo le seguenti facili proposizioni:

(3) $g_{n+1} \in E_{k(g(n))}$

(4) $g_n \in \Pi\,(C)$

(5) $g[N] \subset A^{s-1}_{n_0}$. Infatti $E_h \subset A^{s-1}_{n_0}$ per ogni h.

(6) $k(g_n) < k(g_{n+1})$. Infatti dalla (3) otteniamo $g_{n+1} \notin \Pi(C \cap A^s_{k(g_n)})$ e dalla (2) $g_{n+1} \in \Pi(C \cap A^s_{k(g_{n+1})})$; da queste e dalla (1) la tesi.

(7) l'applicazione composta $k \circ g$ è una successione di numeri naturali crescente in *senso stretto*. Segue dalla (6).

(8) l'applicazione g è *iniettiva*. Infatti dalla $g_n = g_m$ otteniamo la $(k \circ g)(n) = (k \circ g)(m)$ da cui, per (7), $n = m$.

Sia ora $D_n = \{(e_1, \dots, e_s) \in C \mid (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) = g_n\}$. Sussistono allora le:

(9) $\Pi(D_n) = \{g_n\}$. Infatti: $-\Pi(D_n) \subset \{g_n\}$. Sia $e = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) \in \Pi(D_n)$. Esiste allora e_j tale che $(e_1, \dots, e_s) \in D_n$ da cui $e = g_n$ e quindi $e \in \{g_n\}$. $-\{g_n\} \subset \Pi(D_n)$. Dalla (4) otteniamo che $g_n = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) \in \Pi(C)$. Esiste pertanto e_j tale che $(e_1, \dots, e_s) \in C$ da cui $(e_1, \dots, e_s) \in D_n$ e quindi $g_n \in \Pi(D_n)$.

(10) $D_n \cap A^s_m = \phi$ per ogni $m < k(g_n)$. Infatti sia, per assurdo, $(e_1, \dots, e_s) \in D_n \cap A^s_m$. Allora, essendo $D_n \subset C$, $(e_1, \dots, e_s) \in C \cap A^s_m$ da cui, per la definizione di D_n, $g_n \in \Pi(C \cap A^s_m)$. Ne segue, per (2), $m \geq k(g_n)$ che contraddice l'ipotesi.

(11) $\Pi(D_n \cap A^s_m) = \{g_n\}$ per ogni $m \geq k(g_n)$. Infatti, innanzitutto, dalla $D_n \cap A^s_m \subset D_n$ otteniamo $\Pi(D_n \cap A^s_m) \subset \Pi(D_n)$ da cui, per (9), $\Pi(D_n \cap A^s_m) \subset \{g_n\}$. D'altra parte, essendo $m \geq k(g_n)$, otteniamo, per (2), $g_n = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) \in \Pi(C \cap A^s_m)$ per cui esiste e_j tale che $(e_1, \dots, e_s) \in C \cap A^s_m$. Ne segue $(e_1, \dots, e_s) \in D_n \cap A^s_m$ da cui $g_n \in \Pi(D_n \cap A^s_m)$ e quindi $\{g_n\} \subset \Pi(D_n \cap A^s_m)$. Da qui la tesi.

Consideriamo infine l'insieme $D = \bigcup D_n$ e proviamo le seguenti immediate proprietà:

(12) $\Pi(D) = g[N] = \{g_0, \dots, g_n, \dots\}$. Infatti $\Pi(D) = \bigcup_n \Pi(D_n)$ da cui, per (9), $\Pi(D) = \bigcup \{g_n\} = \{g_0, \dots, g_n, \dots\}$.

Essendo, per (7), la successione $k \circ g$ crescente in senso stretto, ha senso considerare l'applicazione p definita dalla:

$$p(m) = \min n\,(k(g_n) > m).$$

Si ha allora:

(13) $\Pi(D \cap A^s_m) \subset \{g_0, \dots, g_{p(m)-1}\}$. Infatti $\Pi(D \cap A^s_m) = \bigcup_n \Pi(D_n \cap A^s_m)$ da

cui, per (10) e la crescenza della $k \circ g$, $\Pi(D \cap A^s{}_m) = \bigcup_{n<p(m)} \Pi(D_n \cap A^s{}_m)$ e quindi, usando (11), $\Pi(D \cap A^s{}_m) = \bigcup_{n<p(m)} \{g_n\} \subset \{g_0, \dots, g_{p(m) \dot{-} 1}\}$ [5].

(14) $\Pi(D) \cap \Pi(C - D) = \phi$. Infatti sia, per assurdo, $e \in \Pi(D) \cap \Pi(C - D)$. Allora $e \in \Pi(D) = \bigcup \Pi(D_n)$ per cui $e \in \Pi(D_n)$, per qualche n. Ne segue usando (9), $e = g_n$ da cui, per l'ipotesi assurda, $g_n = (e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_s) \in \in \Pi(C - D)$. Esiste allora, e_j, tale che $(e_1, \dots, e_s) \in C$, $(e_1, \dots, e_s) \notin D$; risulta pertanto, dalla prima, $(e_1, \dots, e_s) \in D_n$ da cui, a fortiori, $(e_1, \dots, e_s) \in D$ che contraddice la seconda.

Usando le proprietà dell'insieme D sopra introdotto siamo finalmente in grado di provare la tesi del nostro teorema. A tal fine consideriamo le seguenti proposizioni relative all'insieme $\Pi(({}^*)D)$:

(15) $\Pi(({}^*)D) \subset \varphi\,[\Pi(D)]$. Infatti, per la (13), otteniamo $\Pi(D'_m) = \Pi(D \cap A^s{}_m) \subset \subset \{g_0, \dots, g_{p(m) \dot{-} 1}\}$ da cui ${}^*\Pi(D'_m) = \Pi({}^*D'_m) \subset \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_{p(m) \dot{-} 1}\} \subset \subset \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_n, \dots\}$. Ora, tenendo conto della $D \subset \hat{A}^s$ e della (2.3) risulta, passando al limite, $\Pi(({}^*)D) = \bigcup_m \Pi({}^*D'_m) \subset \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_n, \dots\}$ e quindi, per (12), la tesi [6].

[5] Come di consueto si è posto: $h \dot{-} k = \begin{cases} 0 & \text{se } h < k \\ h - k & \text{se } h \geq k. \end{cases}$
Si osservi inoltre che se $p(m) \neq 0$, allora vale l'uguaglianza.

[6] Ai fini della dimostrazione è sufficiente provare la (15). È, d'altra parte, interessante osservare che l'inclusione appena provata può essere sostituita dall'uguaglianza. Tale sostituzione è consentita dalla seguente proposizione:
— la successione di termine generale $p(m)$ è una successione crescente ed illimitata. Essendo la crescenza facilmente verificabile proviamo qui la illimitatezza della successione. Basta, evidentemente, verificare che, posto $t = k \circ g \circ p$, risulta $p(t^n(0)) \geq n$. Ora, poiché la disuguaglianza in esame è banale per $n = 0$, procediamo per induzione su n supponendola valida per n e provandola per $n+1$. Tenuto conto che, per definizione di $p(m)$, risulta, per ogni m, $k(g_{p(m)}) > m$, in particolare si ha:

$$k(g_{p(t^{n+1}(0))}) > t^{n+1}(0).$$

Ne segue

$$k(g_{p(t^{n+1}(0))}) > k(\ _{p(t^n(0))})$$

da cui, per (7), $p(t^{n+1}(0)) > p(t^n(0))$, e quindi, mediante l'ipotesi induttiva, la tesi.

Mostriamo infine come da queste proprietà della $(p(m))$ discenda la $\Pi(({}^*)D) = \varphi\,[\Pi(D)]$. Per la illimitatezza esiste certamente un numero naturale

(16) $\Pi\,({}^{(*)}D) \subsetneqq {}^{(*)}\Pi\,(D)$. Infatti dall'essere $\Pi\,(D) \subset A^{s-1}_{\mu_0}$, come è assicurato dalle (12), (5), risulta ${}^{(*)}\Pi\,(D) = {}^{*}\Pi\,(D)$ da cui, essendo per ipotesi φ non-standard e $\Pi\,(D)$ infinito (per le (8), (12)) risulta $\varphi\,[\Pi\,(D)] \subsetneqq {}^{(*)}\Pi\,(D)$ e quindi, per (15), la tesi.

Dalla $C = (C - D) \cup D$ e dalla (3.7) otteniamo poi:

— ${}^{(*)}\Pi\,(C) = {}^{(*)}(\Pi\,(C-D) \cup \Pi\,(D)) = {}^{(*)}\Pi\,(C-D) \cup {}^{(*)}\Pi\,(D)$;

— $\Pi\,({}^{(*)}C) = \Pi\,({}^{(*)}\,(C-D) \cup {}^{(*)}D) = \Pi\,({}^{(*)}(C-D)) \cup \Pi\,({}^{(*)}D)$.

Da queste e dalle:

— $\Pi\,({}^{(*)}(C-D)) \subset {}^{(*)}\Pi\,(C-D)$ (per la (3.10));

— $\Pi\,({}^{(*)}\,D) \subsetneqq {}^{(*)}\Pi\,(D)$ (per la (16));

— ${}^{(*)}\Pi\,(C-D) \cap {}^{(*)}\Pi\,(D) = \phi$ (per le (14) e (3.6)):

si ha finalmente la tesi.

---

m_0 tale che $p\,(m_0) \neq 0$. Ne segue, per la crescenza, che per ogni $m \geq m_0$ risulta $p\,(m) \neq 0$ da cui, tenuto conto della nota (5); $\Pi\,(D'_m) = \{g_0, \dots, g_{p(m)-1}\}$ e quindi $\Pi\,({}^*D'_m) = \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_{p(m)-1}\}$. Passando al limite, otteniamo $\Pi\,({}^{(*)}D) = \bigcup \Pi\,({}^*D'_m)$ da cui, per la monotonia della $({}^*D'_m)$, $\Pi\,({}^{(*)}D) = \bigcup_{m \geq m_0} \Pi\,({}^*D'_m) = \bigcup_{m \geq m_0} \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_{p(m)-1}\}$ e quindi, essendo $(p\,(m))$ illimitata, $\Pi\,({}^{(*)}\,D) = \{{}^*g_0, \dots, {}^*g_n, \dots\}$. Da qui la tesi.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. J. KEISLER: *Foundations of infinitesimal calculus.* Prindle, Weber e Schmidt, Incorporated (1976).

[2] E. ZAKON: *A new variant of non-standard Analysis.* Victoria Symposium on non-standard Analysis. Lect. notes in Math. vol. 369 - Springer-Verlag (1974).