APhEx 31, 2025 (pp. 223-239)
Ricevuto il: 01/01/2025
Accettato il: 01/04/2025
DOI:10.13137/2036-9972/37293

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

LETTURE CRITICHE

Gabriel Uzquiano, **Mereology of Classes**, Cambridge University Press, Cambridge 2024, pp. 80.

Filippo Mancini

Università del Piemonte Orientale
filippo.mancini@uniupo.it

Nell'assunzione che le classi possano avere parti proprie, la questione alla base di Mereology of Classes, di Gabriel Uzquiano, è quale sia la natura di tali parti. Sono due gli approcci indagati dall'autore. Il primo identifica le parti di una classe con le sue sottoclassi. Il secondo, invece, considera come parti di una classe i suoi membri, insieme ai membri dei membri, ai membri dei membri dei membri, e così via. Questa Lettura Critica ripercorre ed esamina l'analisi di Uzquiano di tali prospettive e delle loro possibili articolazioni interne.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Il legame tra la mereologia—lo studio delle relazioni di parte—e i fondamenti della matematica è così stretto da rappresentare uno dei principali motivi alla base dell'origine di questa disciplina, inaugurata da Leśniewski (1916) e Leonard e Goodman (1940). Sebbene si sia successivamente emancipata da questo ruolo, arrivando a costituire un ambito preminente dell'indagine metafisica e autonomo rispetto alle questioni fondazionali della matematica, la mereologia non ha mai reciso tale legame. *Mereology of Classes* di Gabriel Uzquiano ne rappresenta la testimonianza più recente.

Tra le categorie di oggetti che si ritiene possano essere dotati di parti proprie (cioè parti distinte dall'intero), quelli materiali rappresentano il caso meno controverso, seguiti, ad esempio, dagli eventi e dalle regioni spaziotemporali. Più dibattuta, invece, è la questione se anche gli oggetti astratti, o almeno alcune loro sottocategorie, possano esserlo. Tra queste vi sono gli oggetti matematici, ed in particolare le classi. Assumendo che queste possano essere mereologicamente complesse, ossia dotate di parti proprie, in questo volume Uzquiano discute le principali strategie per dar conto di tale ipotesi. La questione centrale che motiva l'intero lavoro, dunque, può essere formulata nel modo seguente: ammesso che le classi possano avere parti proprie, qual è la natura di tali parti?

Mereology of Classes è organizzato in sei sezioni: una breve introduzione, quattro capitoli centrali e una conclusione. Possiede tutte le caratteristiche essenziali dei *Cambridge Elements:* è conciso, presenta un'indagine originale, ed è il lavoro di una riconosciuta autorità in materia. Tuttavia, proprio per adeguarsi a questo formato, la discussione risulta a volte molto densa, facendo pensare che un volume di taglio più tradizionale avrebbe potuto accogliere meglio la complessità dell'analisi proposta.

Dopo aver delineato il problema nell'introduzione, Uzquiano apre la seconda sezione con un opportuno richiamo terminologico. Se con "classe" ci si riferisce ad un qualsiasi oggetto che ha membri, con "individuo" si intende un qualsiasi oggetto che non ne ha—compreso l'insieme vuoto, $\emptyset$. Ampio spazio è poi dedicato alle ragioni che giustificano l'interesse nella mereologia delle classi, quasi tutte di natura fondazionale. La prima è legata al ruolo che le classi ricoprono per una vasta parte della matematica. Siccome la maggior parte degli oggetti matematici possono essere ridotti a classi, chiedersi se i primi siano composti da parti si riduce a chiedersi se lo siano le seconde. Mossi poi da un'aspirazione fondazionale per la mereologia, ci si può chiedere in quale misura sia possibile definire le relazioni chiave della teoria delle classi, come l'appartenenza ($\in$) e l'inclusione ($\subseteq$), sulla base della relazione di parte ($\leq$). Comprendere la mereologia delle classi può inoltre far luce sul problema della distinzione tra insiemi e classi proprie, di grande

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

importanza per i fondamenti della teoria degli insiemi. Infine, numerose evidenze linguistiche sembrano indicare che, almeno a livello intuitivo, le classi siano concepite come entità mereologicamente complesse. Tuttavia, l'autore sottolinea in più occasioni come in assenza di un criterio chiaro per determinare se tali espressioni vadano interpretate in senso letterale o metaforico, il loro valore giustificativo risulti fortemente limitato.

Dopo aver motivato la sua indagine, Uzquiano considera brevemente una prospettiva alternativa rispetto a quella adottata nel volume, secondo cui dovremmo mantenere una posizione agnostica, o addirittura contraria, rispetto alla composizione mereologica delle classi. L'osservazione centrale, a questo proposito, è che la matematica—e in particolare le principali teorie delle classi come NGB o MK—è neutrale sulla questione. Che le classi abbiano parti proprie, siano mereologicamente semplici o non rientrino affatto nel dominio di applicazione della relazione di parte non è rilevante dal punto di vista strettamente matematico. Questa osservazione colloca a pieno titolo la questione nel campo della metafisica e fa emergere un assunto metodologico fondamentale, per altro largamente condiviso (cf. Lewis, 1991, 1993), che l'autore però non dichiara esplicitamente: l'analisi filosofica deve preservare la matematica, mantenendola inalterata. Il punto è che approcci metafisici alternativi che interpretano la complessità delle classi in termini non mereologici sembrano altrettanto legittimi rispetto all'ipotesi di considerare le classi come mereologicamente complesse. Non risulta del tutto chiaro, dunque, su quali basi si dovrebbe privilegiare una di queste opzioni rispetto alle altre. Se da un lato Uzquiano discute estesamente (soprattutto nella conclusione, pp. 65-68) i vantaggi e gli svantaggi delle diverse strategie per dar conto delle parti proprie delle classi, dall'altro la valutazione dei benefici di considerare le classi come mereologicamente complesse rispetto alle ipotesi rivali è perlopiù assente. Pur riconoscendo che questa analisi sia troppo esigente per essere affrontata in questo *Element*, un accenno più esplicito ad essa avrebbe conferito una base più solida all'intero lavoro.

Assumendo che le classi possano avere parti proprie, la questione riguardante la natura di tali parti segna la linea di demarcazione tra due approcci contrapposti. Il primo identifica le parti di una classe con le sue sottoclassi. Il secondo, invece, considera come parti di una classe i suoi membri, insieme ai membri dei membri, ai membri dei membri dei membri, e così via. La parte restante del volume si concentra interamente sull'analisi di queste due prospettive generali e sulle loro possibili articolazioni interne. I contorni e i tratti più salienti dei due approcci sono delineati in modo informale nella seconda sezione, mentre i capitoli successivi sono dedicati ad un'analisi formale più dettagliata.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Il nucleo teorico del primo approccio è rappresentato dalla Tesi Principale (TP, p. 9):

(TP) le parti delle classi sono tutte e solo le sue sottoclassi.

L'autore chiarisce le principali implicazioni di TP. In primo luogo, $\emptyset$ è escluso dalle parti di qualsiasi classe, in quanto individuo. In generale, poi, i membri di una classe non ne costituiscono una parte, salvo in casi particolari come $\{\{a\}, a\}$ e $\{\{a, b\}, a, b\}$, tra i cui membri ci sono alcuni oggetti e la classe che ha tali oggetti come membri. Inoltre, ogni singoletto diventa un atomo mereologico, siccome non risulta avere parti proprie, e ogni classe ammette una decomposizione nelle sue sottoclassi singoletto.

Tuttavia, TP impone anche un'importante limitazione, ovvero che $\in$ non sia definibile solo in termini di $\leq$. Vengono offerte diverse considerazioni a giustificazione di questo fatto. Quella più semplice consiste nell'osservare che sebbene i singoletti $\{a\}$ e $\{b\}$ siano diversi, in quanto atomi sono mereologicamente indiscernibili. In questo approccio, dunque, la mereologia non riesce a dar conto di un fatto che la teoria delle classi spiega semplicemente in termini della sola relazione di appartenenza—con l'assioma di estensionalità. Una prova più elaborata consiste nel dimostrare che dato un modello $\langle V, \in\rangle$ della teoria delle classi (o insiemi) scelta—ZFC, NGB o MK—esiste un automorfismo di $\langle V, \subseteq\rangle$ che non preserva $\in$, ovvero che non è un automorfismo per $\langle V, \in\rangle$ (Hamkins e Kikuchi, 2016, teorema 2). Il risultato, conclude Uzquiano, è ineludibile: accettare TP implica accettare che nessuna delle tradizionali teorie delle classi possa essere ridotta alla sola mereologia. Questo primo approccio sembra dunque costretto a sviluppare ed includere anche una teoria dei singoletti, volta a chiarire la natura di tali oggetti e della relazione che li lega ai loro membri. Le proposte non mancano (Armstrong, 1991; Bigelow, 1993; Forrest 2002a; Caplan, Tillman e Reeder, 2010) e sono presentate e approfondite dall'autore insieme alla strategia alternativa di Lewis (1991, 1993), che definite le proprietà formali della funzione di singoletto, $\sigma : a \mapsto \{a\}$, sviluppa e predilige una via strutturalista rispetto ad essa.

Il secondo approccio, invece, rivolge l'attenzione ai membri di una classe. Una prima idea, ad esempio, è quella di individuare le parti proprie di $\{\{a\}, b\}$ coi suoi membri, $\{a\}$ e b. Ma, puntualizza Uzquiano, una resistenza immediata a questa proposta deriva dall'opinione piuttosto condivisa secondo cui la relazione di parte propria è un ordine parziale stretto, e dunque transitiva, mentre quella di appartenenza non lo è. Questa considerazione, nota l'autore, può però essere facilmente accolta includendo tra le parti di una

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

classe anche quelle dei suoi membri, ovvero identificando le sue parti proprie con tutto ciò che si trova nella relazione ancestrale della relazione di *parte immediata* rispetto ad essa. D'altronde, la chiusura riflessiva del dominio delle classi sotto la relazione ancestrale della relazione di parte immediata è proprio un ordine parziale. In questo modo, le parti proprie di $\{\{a\}, b\}$ vengono a includere $\{a\}$, a e b, più tutte le parti proprie di a e di b, che siano classi o individui. Inoltre, i singoletti non risultano più atomi mereologici, siccome dotati di almeno una parte propria—il loro unico membro. Uzquiano chiama questa seconda prospettiva "approccio gerarchico" e annovera tra i suoi aderenti, seppur con variazioni significative, Fine (1999), Johnston (2006), e Koslicki (2008). Il suo nucleo teorico è rappresentato dalla tesi di Composizione Gerarchica (CG, p. 14):

(CG) le parti immediate di una classe sono tutte e solo i suoi membri. Le parti di una classe sono la classe stessa e tutte e solo le sue parti immediate ancestrali.

CG si differenzia da TP sotto diversi aspetti, ma in primo luogo per non includere—almeno non necessariamente—le sottoclassi di una classe come sue parti. Uzquiano evidenzia inoltre come l'approccio gerarchico apra due importanti questioni. La prima è quale sia la corretta teoria mereologica da adottare in questo contesto. Infatti, è semplice verificare che la Mereologia Classica Estensionale (CEM) non è una scelta adeguata per questo approccio. Se si considera un singoletto $\{a\}$, dove a è un atomo mereologico, $\{a\}$ risulterà composto da un'unica parte propria, a, contro quanto richiesto dal principio di Supplementazione Debole, che è valido in CEM. La seconda questione, invece, è come trattare la nozione di parte immediata ($\ll$) necessaria per esprimere CG. In particolare, vi sono due scelte possibili, che determinano le due principali strategie di implementazione dell'approccio gerarchico: considerare $\ll$ come nozione di base, oppure tentare di definirla in termini della relazione di parte, $\leq$.

Come TP, anche CG soffre di una limitazione importante. Nell'ipotesi che $\ll$ sia definibile sulla base di $\leq$, lo sarebbe automaticamente anche $\in$, siccome per CG essere membro di una classe equivale ad essere una sua parte immediata. In altre parole, la teoria delle classi risulterebbe riducibile alla mereologia. Tuttavia, rispetto alle classi, definire $\ll$ sulla base di $\leq$ equivale, per CG, a definire $\in$ sulla base della sua relazione ancestrale, $\in^{\infty}$. Ma, in modo analogo alla limitazione del primo approccio, si dimostra che dato un modello $\langle V, \in\rangle$ di ZFC (o di NBG, o di MK) esiste un automorfismo di $\langle V, \in^{\infty}\rangle$ che non è un automorfismo per $\langle V, \in\rangle$. Dunque, l'approccio

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

gerarchico sembra porci d'innanzi a un dilemma (p. 16): o si accetta che la relazione $\leq$ è fondamentale, ma che non è possibile definire $\in$ sulla base di $\leq$, oppure si adotta $\ll$ come fondamentale e con essa si prova a definire $\leq$.

Una versione alternativa e più liberale dell'approccio gerarchico è quello che sottoscrive la seguente variante di CG, che Uzquiano chiama Composizione Gerarchica Liberale (CGL):

(CGL) le parti immediate di una classe sono i membri della classe. Le parti di una classe sono le sue sottoclassi e tutte e solo le sue parti immediate ancestrali.

Con CGL, la struttura mereologica delle classi diventa la più "ricca" e complessa tra quelle finora introdotte. Ad esempio, la classe $\{\{a\}, b\}$ viene ad includere come sue parti proprie $\{\{a\}\}$, $\{b\}$, $\{a\}$, a, b e tutte le parti proprie di a e di b. Un possibile vantaggio suggerito dall'autore è rappresentato dalla possibilità di considerare $\{\{a\}, b\}$ sia come la composizione di $\{\{a\}\}$ e $\{b\}$, sia come la composizione di $\{a\}$ e b, accomodando un'ampia serie di evidenze linguistiche riguardanti il modo con cui i matematici si esprimono sulle parti delle classi. Tuttavia, ammette Uzquiano, anche in questo caso sembrano emergere limitazioni significative. Stando a CGL, le classi $\{\{a\}, a\}$ e $\{\{a\}\}$ condividono esattamente le stesse parti proprie, ovvero $\{\{a\}\}$, $\{a\}$, a e tutte le parti proprie di a. Dunque, ci sono classi diverse che l'approccio basato su CGL non sembra in grado di discernere, il che conduce nuovamente alla conclusione secondo cui la teoria delle classi non sarebbe riducibile alla sola mereologia.

Concluso il quadro d'insieme, nella terza sezione Uzquiano avvia un'analisi formale dettagliata. L'indagine si sviluppa all'interno di un framework che utilizza un'estensione plurale del linguaggio della mereologia, che nel caso dell'approccio gerarchico include anche la relazione di parte immediata, $\ll$. Vengono introdotte diverse teorie mereologiche: CEM, la Mereologia di Heyting (HM) e la Mereologia Gerarchica (MG). Esse rappresentano le scelte più adeguate a seconda dello specifico approccio che si desidera sviluppare. L'esposizione è chiara, ma talvolta molto densa e soprattutto organizzata in modo poco lineare, il che non facilita la comprensione di chi legge. Ad esempio, alla scelta dell'autore di introdurre prima tutte e tre le teorie mereologiche, poi la loro estensione plurale e infine discutere le loro limitazioni, chi scrive avrebbe preferito che ciascuna limitazione venisse considerata immediatamente dopo aver trattato la corrispondente teoria mereologica, così da garantire maggiore continuità all'analisi.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Uzquiano introduce le nozioni mereologiche di parte propria e sovrapposizione ($<$ e $\circ$) e distingue tre nozioni distinte di somma: l'*unione mereologica* (o *join*, ovvero il limite minimo superiore sotto la relazione $\leq$), la *fusione* e la *fusione di Goodman*. Dopo aver presentato gli assiomi lessicali e i principali assiomi di composizione e decomposizione, l'autore introduce CEM (p. 21), che rappresenta la scelta più plausibile—almeno in via preliminare—con cui sviluppare il primo approccio (in linea con Lewis, 1991, 1993). In previsione della successiva discussione dell'importante vincolo limitativo (Limite 1) a cui è soggetto l'approccio basato su TP, CEM viene presentata attraverso quattro basi assiomatiche differenti:

- Mereologia Base + Supplementazione Debole + Fusione
- Mereologia Base + Supplementazione Forte + Fusione di Goodman
- Mereologia Base + Residuo + Join
- Transitività + Fusione Unica

La Mereologia Base consiste nell'assumere che $\leq$ sia un ordine parziale, mentre per gli altri assiomi rimandiamo direttamente al volume (pp. 20-21). HM rappresenta una valida candidata per l'approccio gerarchico qualora si scelga di adottare $\leq$ come primitiva e $\ll$ come derivata. Si tratta di un'estensione della Mereologia Base, caratterizzata dal rigetto di diversi principi di supplementazione validi in CEM, che rende HM coerente con situazioni simili a quella di $\{a\}$ precedentemente descritta, che invalida la Supplementazione Debole. Uzquiano introduce HM come il sistema definito dai seguenti assiomi:

- Mereologia Base + Assioma di Distributività Completa + Join

Oltre agli aspetti legati alla decomposizione, HM si distingue da CEM anche sotto altri versanti. Uno di questi riguarda l'operazione di complementazione, dove il complemento $\bar{a}$ di un oggetto a va inteso come il limite superiore minimo rispetto a $\leq$ di tutti e solo gli oggetti che non si sovrappongono ad a. Se in CEM $\bar{\bar{a}} = a$, in HM $a \leq \bar{\bar{a}}$ ma è possibile che $\bar{\bar{a}} \neq a$. A questo riguardo, Uzquiano mostra come tale caratteristica si sposi bene col comportamento mereologico dei singoletti nell'assunzione di CG. Dato che $a \circ \{a\}$, il complemento di $\{a\}$, ovvero $\overline{\{a\}}$, non include né a né $\{a\}$ come parte. Ne segue che l'unione mereologica (il *join*) di tutti gli oggetti che soddisfano la condizione $\neg x \circ \bar{a}$ deve includere $\{a\}$ come parte. Siccome $\{a\} \nleq a$ ne deriva che $\bar{\bar{a}} \nleq a$, da cui $\bar{\bar{a}} \neq a$, in accordo con HM.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

A questo punto, l'autore affronta il problema della definizione di $\ll$ in termini di $\leq$. Un primo tentativo è quello di definire $\ll$ come relazione di *parte propria massimale* ($\lhd$), ovvero:

$$x \lhd y := x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$$

[per definizione, x è parte propria massimale di y quando x è parte propria di y e non esiste alcuna parte propria z di y di cui x sia parte propria]

Tuttavia, come osservato in Fine (1992), questa strategia non funziona per casi come $\{a, \{a\}\}$, dove CG richiede che a sia, in quanto suo membro, una parte immediata di $\{a, \{a\}\}$, quando invece a non risulta parte propria massimale di questa classe. Però, osserva Uzquiano, la storia non è finita. Ci potrebbero essere modi alternativi di definire $\ll$ che sono più adeguati. In questo passaggio (p. 25), l'autore, accenna ad una possibilità ispirata a Forrest (2002b), ma che non risulta chiaro perché dovrebbe essere migliore. Essa consiste nel definire la relazione di parte immediata nel modo seguente:

$$xRy := x \lhd y \wedge \neg\exists z(x \lhd z \wedge z \lhd y)$$

[per definizione, x è parte immediata di y quando x è parte propria massimale di y e non esiste alcuna parte propria massimale z di y di cui x sia parte propria massimale]

Uzquiano nota che $\neg aR\{a, \{a\}\}$, siccome il primo congiunto della definizione non viene soddisfatto poiché, per quanto detto in precedenza, $a \ntriangleleft \{a, \{a\}\}$. Ma questo risultato è indesiderato, siccome a è membro di $\{a, \{a\}\}$ e in quanto tale, in base a CG, vogliamo che sia una sua parte immediata. In conclusione, neppure la relazione R è idonea a svolgere il ruolo di $\ll$ e per una soluzione più efficace—proposta da Forrest (2002b)—si deve attendere il quinto capitolo.

Le difficoltà nel definire $\ll$ suggeriscono, come accennato, una seconda strategia per implementare l'approccio gerarchico: adottare $\ll$ come primitiva e con essa definire $\leq$. Uzquiano chiama Mereologia Gerarchica, MG, la teoria mereologica capace di realizzare tale ambizione e ne individua il tentativo di elaborazione più compiuto nella teoria dei *rigid embodiments* sviluppata da Fine (1999). In breve, dato un insieme di oggetti $a, b, c, \ldots$ che stanno in una certa relazione R, esiste un *rigid embodiment* $a, b, c, \ldots /R$ composto da $a, b, c, \ldots$ e R. Fine (1999) stabilisce sei postulati per i *rigid embodiments*, di cui due specificano le loro condizioni di esistenza e identità,

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

uno regola la loro interazione con la posizione (*location*), e gli altri tre determinano le loro parti. In particolare, di questi, due stabiliscono che gli oggetti $a, b, c, \ldots$ e la relazione R sono le parti immediate del *rigid embodiment* $a, b, c, \ldots /R$, mentre quello rimanente assicura che $a, b, c, \ldots /R$ non abbia parti che non siano parti delle sue parti immediate. In questo passaggio, l'autore sottolinea pregi e difetti che la teoria di Fine (1999) ha per i suoi scopi—sviluppare compiutamente MG. Il vantaggio principale è che sembra possibile definire $\leq$ in termini di $\ll$ come la chiusura riflessiva sotto la relazione ancestrale di $\ll$. Ovvero:

$$x \leq y := x = y \vee x \ll^{\infty} y$$

[per definizione, x è parte di y quando x è uguale a y oppure x è nella relazione ancestrale di parte immediata con y]

D'altra parte, però, considerare la relazione R come parte immediata sembra in conflitto con CG, dal momento che interpretando le classi come *rigid embodiments*, R verrebbe identificata come uno dei loro membri. Questo porterà Uzquiano a lasciar "cadere" questo postulato (p. 35).

La discussione di CEM, HM e MG procede con la loro estensione alla logica plurale e con l'analisi dei limiti a cui sono soggetti i due approcci a causa dell'impianto mereologico che viene loro associato. Uzquiano considera di nuovo il primo approccio basato su TP e CEM e dimostra come da esso derivi una fondamentale conseguenza restrittiva. Il limite è il seguente (p. 34, Proposizione 3.2):

(Limite 1) Dato un filtro θ, modulo l'esistenza di più di un oggetto, CEM è incompatibile con l'esistenza di una θ-codifica totale.

Un filtro è una condizione θ tale che la fusione delle parti che soddisfano θ ha una decomposizione unica in quelle stesse parti. Ad esempio, la condizione di atomicità è un filtro, siccome nessun atomo mereologico è parte di un altro atomo e neppure della fusione di atomi diversi da esso. Dato un filtro θ, una θ-codifica è una operazione che mappa esattamente gli oggetti nelle θ-parti. La funzione di singoletto, ad esempio, è una θ-codifica, siccome mappa i membri delle classi nelle loro parti che soddisfano la condizione θ di atomicità, che è un filtro. Infine, una θ-codifica è *totale* quando fornisce una codifica per tutti gli oggetti. Dunque, la morale da trarre dal Limite 1 è che, nell'approccio basato su TP e CEM, dove i singoletti rappresentano una codifica della condizione θ di atomicità, tale codifica non può essere totale,

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

pena l'inconsistenza della teoria. In altre parole, devono esistere delle classi che non sono la fusione di tutte e solo le loro sottoclassi singoletto.

A questo punto, l'autore si concentra nuovamente su MG. L'estensione alla logica plurale rende possibile esprimere che x è nella relazione ancestrale di $\ll$ con y, e dunque che x è parte di y:

$$x \ll^{\infty} y := \forall xx((\forall u(x \ll u \rightarrow u \prec xx) \wedge \forall u \forall t((u \prec xx \wedge u \ll t \rightarrow t \prec xx)) \rightarrow y \prec xx)$$

[per definizione, x è nella relazione ancestrale di parte immediata con y quando per ogni pluralità xx, se ogni u di cui x è parte immediata è uno degli xx e se per tutti gli u di xx e i t di cui u è parte immediata allora t è uno degli xx, allora y è uno degli xx]

$$x \leq y := \forall xx((\forall u(x \ll u \rightarrow u \prec xx) \wedge \forall u \forall t((u \prec xx \wedge u \ll t \rightarrow t \prec xx)) \rightarrow y \prec xx) \vee x = y$$

Risulta pertanto possibile formalizzare i postulati del framework di Fine (1999) discussi in precedenza e fornire una base assiomatica per MG (p. 36). Come anticipato, viene scartato l'assioma che include la relazione R (che per un cambio di notazione ora viene designata con P) tra le parti immediate del *rigid embodiment*, oltre a quello che riguarda la sua posizione:

PR_1: $\exists x\, x = xx/P \leftrightarrow Pxx$
PR_3: $\exists x\, x = xx/P \rightarrow (xx/P = yy/Q \leftrightarrow xx \approx yy \wedge P = Q)$
PR_4: $\exists x\, x = xx/P \rightarrow \forall x(x \prec xx \rightarrow x \ll xx/P)$
PR_6: $x \leq xx/P \rightarrow \exists y(y \prec xx \wedge x \leq y)$

Sorge, però, un problema: assumendo una visione "abbondante" degli attributi (anche di quelli plurali, come P) e che esista più di un oggetto, si dimostra che MG è inconsistente. Più precisamente, Uzquiano deriva il seguente limite (p. 36, Proposizione 3.3):

(Limite 2) La formulazione plurale dei postulati di esistenza (PR_1) e identità (PR_3) è inconsistente con l'esistenza di più di un oggetto.

L'inconsistenza sta nella violazione dell'analogo del teorema di Cantor in logica plurale a cui conducono PR_1 e PR_3. Nell'ipotesi che esista più di un oggetto, tale teorema stabilisce che non è possibile mappare iniettivamente le pluralità xx sugli oggetti x del dominio, ovvero che ci sono strettamente più

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

pluralità che oggetti. Ma se si accetta che per ogni pluralità xx si dia un attributo P tale che Pxx, allora PR_1 assicura l'esistenza di xx/P. Ovvero, per ogni pluralità xx esiste il suo *rigid embodiment* associato, xx/P, che per PR_3 è diverso per pluralità diverse. Pertanto, esiste una relazione iniettiva tra le pluralità e gli oggetti, il che, però, contraddice la versione plurale del teorema di Cantor (p. 31, Proposizione 3.1).

Uzquiano dedica le sezioni rimanenti all'analisi delle strategie volte a finalizzare lo sviluppo dei due approcci, garantendo al contempo il rispetto dei vincoli stabiliti dai Limiti 1 e 2. Il quarto capitolo si concentra sul primo approccio. L'autore mostra come il Limite 1 ci ponga davanti ad un dilemma. Siccome la teoria delle classi può essere ridotta a CEM più un'opportuna teoria dei singoletti (cf. Lewis, 1991, 1993), per evitare l'inconsistenza ci sono due strade: preservare CEM applicando opportune restrizioni alla nozione di singoletto in modo che essa non costituisca una θ-codifica totale, oppure non porre alcun vincolo sull'operazione di singoletto ma rinunciare a CEM, optando per una teoria mereologica più debole. La prima opzione è quella scelta da Lewis (1991, 1993), mentre le proposte di Armstrong (1991) e Forrest (2002a) sono esempi della seconda.

Lewis considera CEM come una teoria ben compresa e non problematica, e per questo decide di intervenire sulla più controversa e misteriosa operazione di singoletto. Egli adotta una distinzione tra classi improprie (o insiemi) e classi proprie in linea con quella proposta da von Neumann. Ovvero, ciò che distingue le classi proprie è che, contrariamente a quelle improprie, non sono membri, da cui segue che non danno origine a un singoletto. In altre parole, Lewis esclude le classi proprie dal dominio di σ. Più specificamente, egli stabilisce alcuni vincoli formali su σ, pensati per consentire la derivazione degli assiomi di MK, che tengono conto dell'ipotesi della limitazione di grandezza, la quale garantisce che σ non sia definita su fusioni di singoletti *troppo grandi* per essere classi improprie. Nonostante questa caratterizzazione, però, σ continua a rimanere perlopiù incompresa, siccome di essa non sappiamo nulla se non le sue proprietà formali. Per questo Lewis procede adottando l'approccio strutturalista, nel quale non si aspira più a comprendere la natura del*la* relazione non mereologica che un oggetto intrattiene col suo singoletto, ma piuttosto si postula (e in Lewis, 1993, si deriva) l'esistenza di relazioni con le caratteristiche formali di σ. Questo gli consente di mantenere TP e CEM evitando la gravosa questione della natura di σ. Uzquiano, però, chiude questa analisi con un'osservazione scettica (pp. 44-45). Il ricorso allo strutturalismo sembra minare la motivazione alla base di TP. Infatti, dice l'autore, se si è disposti a adottare l'approccio strutturalista per superare il mistero della funzione di singoletto, non si capisce perché non

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

si dovrebbe essere altrettanto disposti a adottarlo per superare il mistero della relazione di appartenenza. Così come il sostenitore di TP interpreta i singoletti come atomi mereologici con una ulteriore struttura non mereologica, si potrebbe più in generale interpretare le classi come atomi mereologici dotati di una struttura non mereologica che collega i membri alla classe di cui fanno parte. L'approccio strutturalista sostituisce l'esistenza di una relazione di appartenenza filosoficamente insondabile con l'esistenza di relazioni binarie che soddisfano i vincoli formali codificati dagli assiomi della teoria delle classi. Ma, dice Uzquiano, una volta fatto questo non c'è più alcuna necessità di accettare TP. Non vi è alcuna ragione di continuare a considerare le classi come aventi la complessa struttura mereologica attribuita loro da TP, quando potrebbero invece essere concepite—altrettanto legittimamente, secondo l'autore—come atomi mereologici.

Rispetto a questa critica, chi scrive ha una riserva importante. Il punto è il seguente. Nello sviluppo della sua via strutturalista, Lewis non si limita a postulare l'esistenza di relazioni con le caratteristiche formali di σ. In termini un po' più tecnici, Lewis non si ferma alla *ramsificazione* (si veda Lewis, 1993) della teoria, ma compie un passo in più, che rappresenta uno dei risultati più sostanziali di Lewis (1993), di cui Lewis (1991) era ancora all'oscuro. Egli dimostra che i suoi assiomi (quelli della Meghetologia, cf. Lewis, 1993) garantiscono l'esistenza di almeno una relazione con le proprietà formali di σ, senza che questa debba essere postulata. Dunque, affinché la critica di Uzquiano possa davvero esercitare la pressione voluta, in modo analogo a quanto fatto da Lewis, egli deve mostrare che l'esistenza di almeno una relazione non mereologica che collega ogni classe ai suoi membri è assicurata, scongiurando la necessità di postularla. In assenza di una simile garanzia, l'opzione strutturalista delineata dall'autore non può essere considerata, nel contesto della realizzazione del primo approccio, un'alternativa adeguata e concorrente rispetto alla via strutturalista lewisiana.

La seconda strada aperta dal dilemma, invece, prevede di intervenire sulla mereologia, adottando una teoria diversa da CEM. Uzquiano precisa che questa strategia si accompagna anche all'esigenza di chiarire la natura dei singoletti, siccome in questo caso l'approccio strutturalista viene meno. In particolare, il legame non mereologico tra un oggetto, x, e il suo singoletto, $\{x\}$, deve essere spiegato in termini di—o ridotto a—un ben compreso legame di qualche tipo tra x e ciò con cui $\{x\}$ viene identificato. Esempi di tali approcci, detti "riduttivi," includono l'identificazione dei singoletti con certi stati di cose (Armstrong, 1991) o con certi tropi (Forrest, 2002a). Ogni identificazione genera un resoconto diverso del legame non mereologico tra un oggetto e il suo singoletto, richiedendo un accomodamento di volta in volta

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

differente della teoria mereologica da adottare. L'esempio più ampiamente discusso è Forrest (2002a), che propone di identificare il singoletto di un oggetto x con uno specifico tropo che l'universo esemplifica, ovvero "avere x come parte," trattandolo come un atomo mereologico e ponendo successivamente delle restrizioni sulla fusione mereologica per evitare l'inconsistenza individuata dal Limite 1. Le diverse assiomatizzazioni di CEM introdotte da Uzquiano nel secondo capitolo suggeriscono modi differenti di applicare tali restrizioni, ma l'autore manifesta un atteggiamento dubbioso rispetto a queste opzioni, siccome soluzioni non *ad hoc* e prive di complicazioni non sembrano disponibili.

Infine, il quinto capitolo torna sull'approccio gerarchico ed esamina più da vicino le proposte di Forrest (2002b) e di Caplan, Tillman e Reeder (2010), che ne rappresentano due possibili implementazioni. Forrest (2002b) considera $\leq$ come primitiva e tenta di "imitare" $\in$ in termini della relazione di parte propria massimale, $\lhd$, nel contesto di HM. Siccome HM abbandona la Supplementazione Debole, diventa necessario distinguere tra la *semplicità* mereologica di un oggetto x, intesa come la mancanza di parti proprie, e l'*atomicità* mereologica, intesa come l'impossibilità di decomporre x in parti proprie. Alla luce di tale distinzione, un singoletto $\{x\}$ risulta un atomo mereologico complesso, ovvero non semplice. Per quanto riguarda $\ll$, Forrest (2002b) propone di "accontentarsi" della relazione che chiama di *pseudo-appartenenza* (p. 55), dove $x \trianglelefteq y := \exists z(x \lhd z \wedge z \leq y)$:

$$xEy := x \trianglelefteq y \wedge \neg\exists z(x \trianglelefteq z \wedge z \trianglelefteq y)$$

[Per definizione, x è uno pseudo-membro di y quando x è una parte massimale di qualche parte di y, ma x non è una parte massimale di alcuna parte di y che sia essa stessa una parte massimale di qualche parte di y]

Con la nozione di pseudo-membro, Forrest (2002b) definisce quelle di pseudo-insieme e di pseudo-classe, in parallelo alla distinzione di von Neumann tra insiemi e classi. Il progetto, a questo punto, è quello di sviluppare un'appropriata teoria delle pseudo-classi e vedere quanto essa riesce ad avvicinarsi alle teorie delle classi standard. Le difficoltà non mancano. Ad esempio, un primo problema consiste nel fatto che, diversamente da $\in$, la relazione di pseudo-appartenenza E non è estensionale: possedere tutti e solo gli stessi pseudo-membri non è sufficiente affinché due pseudo-classi siano identiche. Inoltre, alcune classi del tutto comuni non risultano essere pseudo-classi. Ad esempio, mentre $\{a, \{a, b\}\}$ denota la classe che ha come membri a e $\{a, b\}$, la presunta pseudo-classe $[a, [a, b]]$ che ha

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

come pseudo-membri a e $[a, b]$ non esiste. Infatti, se ipotizziamo che $aE[a, [a, b]]$ e $[a, b]E[a, [a, b]]$, allora $a \trianglelefteq [a, [a, b]]$ e $[a, b] \trianglelefteq [a, [a, b]]$, da cui segue che $\neg aE[a, [a, b]]$, che contraddice l'ipotesi. Tuttavia, conclude Uzquiano, questi problemi non sono decisivi e ammettono misure di contenimento, come mostrato dallo stesso Forrest (2002b). Il risultato è che, a condizione che si disponga di un numero molto elevato di individui, la teoria delle pseudo-classi è effettivamente in grado di interpretare la teoria pura delle classi e, di conseguenza, può servire a un'ampia varietà di scopi fondazionali, col vantaggio di non dover utilizzare nessun'altra relazione primitiva non-mereologica come la funzione di singoletto.

La seconda opzione considerata da Uzquiano parte dal lavoro di Caplan, Tillman e Reeder (2010), che adotta $\ll$ come primitiva e identifica una classe con il *rigid embodiment* xx/E dei suoi membri xx, dove E è un attributo plurale che alcuni oggetti xx esemplificano se e solo se ciascuno di essi esiste. L'autore sceglie però MG come teoria mereologica, che differisce sotto alcuni aspetti da quella adottata da Caplan, Tillman e Reeder (2010). Per evitare l'inconsistenza evidenziata dal Limite 2, propone di imporre una specifica restrizione al postulato di esistenza, PR_1, ovvero che i *rigid embodiments* siano composti in modo gerarchico, a stadi. Esiste un primo stadio in cui si trovano individui privi di parti proprie. Agli stadi successivi $\alpha + 1$ si formano i *rigid embodiments* composti da parti immediate individuate allo stadio α. Agli stadi limite λ si formano i *rigid embodiments* composti da parti immediate individuate negli stadi precedenti $\beta < \lambda$. L'imposizione di questo vincolo, nella forma di una versione diversa e "iterativa" del postulato di esistenza, consente di rispettare il teorema di Cantor, evitando l'inconsistenza. La sua implementazione a livello formale viene solamente accennata dall'autore (pp. 64-65) e ricalca la costruzione proposta da Button (2021). Inoltre, Uzquiano evidenzia con favore la possibilità di darne una giustificazione piuttosto generale, in termini della *priorità* (si veda Fine, 1999) che le parti immediate di un *rigid embodiment* hanno rispetto ad esso. Tuttavia, una conseguenza ulteriore di questa strategia è che tutte le classi diventano improprie. Uzquiano si limita a rilevare questo fatto, senza valutarne propriamente la portata. Eppure, se—come fa l'autore—riconosciamo che una delle ragioni fondamentali che attribuiscono importanza alla mereologia delle classi risiede nella sua capacità di far luce sulla distinzione tra insiemi e classi proprie, sembriamo costretti ad ammettere una carenza in questa prospettiva, in cui le seconde non trovano spazio.

Il volume si chiude con una breve sezione conclusiva in cui l'autore riassume i principali vantaggi e svantaggi che ciascuno dei due approcci, e

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

più specificamente ciascuna delle loro articolazioni interne, possiede. In ultima analisi, non si individuano fattori decisivi per privilegiare una prospettiva rispetto all'altra. Ad esempio, né le evidenze linguistiche né le prospettive di una fondazione mereologica sembrano supportare nettamente l'una o l'altra soluzione. Pertanto, per il futuro, Uzquiano invita a considerare criteri di valutazione ulteriori, ed in particolare il potere esplicativo degli approcci proposti e la loro coerenza con concezioni ed impegni ontologici più ampi. Ad esempio, il monismo composizionale—la tesi secondo cui esiste un'unica relazione fondamentale di parte—sembra sposarsi meglio con l'approccio basato su TP e CEM. Al contrario, il pluralismo composizionale—la tesi secondo cui vi sono modi diversi e ugualmente fondamentali di essere una parte—si accorda meglio con la versione più liberale della tesi di Composizione Gerarchica, CGL. Dunque, le ragioni a supporto dell'una o dell'altra posizione favoriscono di riflesso l'uno o l'altro approccio alla mereologia delle classi.

Per concludere, *Mereology of Classes* è certamente un volume eccellente e dai numerosi meriti. Copre interamente le principali proposte in materia di mereologia delle classi presenti nel panorama filosofico attuale. L'analisi condotta è dettagliata, accurata e rigorosa nel fornire giustificazione ai punti sollevati. Sebbene si rivolga ad un pubblico di specialisti, la discussione è perlopiù accessibile anche ad un lettore non esperto, purché sia in possesso di una discreta preparazione in mereologia e teoria delle classi. L'indagine apre potenzialmente nuove direzioni di ricerca, tra cui, ad esempio, un approfondimento della Mereologia Gerarchica e dei suoi possibili ambiti di applicazione oltre quello delle classi, nonché un'analisi più specifica—nell'ambito della teoria dei *rigid embodiments* secondo la versione proposta da Uzquiano—delle relazioni reciproche tra l'appartenenza insiemistica $\in$, la relazione di parte immediata $\ll$ e la relazione $\prec$, propria della logica plurale. Un aspetto critico è rappresentato, nell'opinione di chi scrive, dall'organizzazione un po' frammentata dell'indagine (ereditata da questa Lettura Critica, che ne segue fedelmente la struttura), che sottopone il lettore a ripetuti passaggi in avanti e indietro, rendendone la comprensione meno immediata. Questo, però, non compromette il valore del volume, che si rivela una risorsa essenziale per chi desidera un resoconto aggiornato, esaustivo e approfondito sullo stato attuale della mereologia delle classi.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

Bibliografia

Armstrong, D.M., 1991, «Classes are states of affairs», *Mind*, 100, 2, pp. 189–201.

Bigelow, J., 1993, «Sets are haecceities. », In Bacon, J., Campbell, K., Reinhardt, L. (eds.), *Ontology, Causality and Mind*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 73–96.

Button, T., 2021, «Level theory, part 1: Axiomatizing the bare idea of a cumulative hierarchy of sets. », *The Bulletin of Symbolic Logic*, 27, 4, pp. 436–460.

Caplan, B., Tillman, C., Reeder, P., 2010, «Parts of singletons», *Journal of Philosophy*, 107, 10, pp. 501–533.

Fine, K., 1999, «Things and their parts», *Midwest Studies in Philosophy*, 23, 1, pp. 61–74.

Forrest, P., 2002a, «Sets as mereological tropes», *Metaphysica*, 3, 1, pp. 5–8.

Forrest, P., 2002b, «Nonclassical mereology and its application to sets», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 43, 2, pp. 79–94.

Hamkins, J.D., Makoto, K., 2016, «Set-theoretic mereology», *Logic and Logical Philosophy*, 25, 3, pp. 285–308.

Jacinto, B., Cotnoir, A.J., 2019, «Models for hylomorphism», *Journal of Philosophical Logic*, 48, 5, pp. 909–955.

Johnston, M., 2006, «Hylomorphism», *The Journal of Philosophy*, 103, 12, pp. 652–698.

Koslicki, K., 2008, *The Structure of Objects*, Oxford, Oxford University Press on Demand.

Lando, G., 2017, *Mereology: A Philosophical Introduction*, London and New York, Bloomsbury Publishing.

Leonard, H.S., Goodman, N., 1940, «The calculus of individuals and its uses», *Journal of Symbolic Logic*, 5, 2, pp. 45-55.

Leśniewski, S., 1916, *Podstawy ogólnej teoryi mnogości*. I, Moskow, Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, Sekcya matematyczno-przyrodnicza. Traduzione inglese di D.I. Barnett: «Foundations of the general theory of sets», in S. Leśniewski, *Collected Works* (edito da S. J. Surma et al.), Dordrecht, Kluwer, 1992, Vol. 1, pp. 129–173.

Lewis, D., 1991, *Parts of Classes*, Oxford, Wiley Blackwell.

Lewis, D., 1993, «Mathematics is megethology», *Philosophia Mathematica*, 1,1, pp. 3–23.

APhEx
Rivista Italiana di Filosofia Analitica
ISSN 2036-9972

APhEx.it è un periodico elettronico, registrazione n° ISSN 2036-9972. Il copyright degli articoli è libero. Chiunque può riprodurli. Unica condizione: mettere in evidenza che il testo riprodotto è tratto da www.aphex.it

Condizioni per riprodurre i materiali --> Tutti i materiali, i dati e le informazioni pubblicati all'interno di questo sito web sono "no copyright", nel senso che possono essere riprodotti, modificati, distribuiti, trasmessi, ripubblicati o in altro modo utilizzati, in tutto o in parte, senza il preventivo consenso di APhEx.it, a condizione che tali utilizzazioni avvengano per finalità di uso personale, studio, ricerca o comunque non commerciali e che sia citata la fonte attraverso la seguente dicitura, impressa in caratteri ben visibili: "www.aphex.it". Ove i materiali, dati o informazioni siano utilizzati in forma digitale, la citazione della fonte dovrà essere effettuata in modo da consentire un collegamento ipertestuale (link) alla home page www.aphex.it o alla pagina dalla quale i materiali, dati o informazioni sono tratti. In ogni caso, dell'avvenuta riproduzione, in forma analogica o digitale, dei materiali tratti da www.aphex.it dovrà essere data tempestiva comunicazione al seguente indirizzo (redazione@aphex.it), allegando, laddove possibile, copia elettronica dell'articolo in cui i materiali sono stati riprodotti.

In caso di citazione su materiale cartaceo è possibile citare il materiale pubblicato su APhEx.it come una rivista cartacea, indicando il numero in cui è stato pubblicato l'articolo e l'anno di pubblicazione riportato anche nell'intestazione del pdf. Esempio: Autore, *Titolo*, <<*www.aphex.it*>>, 1 (2010).