Analisi infinitesimale

Una trattazione Nonstandard

Lucio Crisma

Silvano Holzer

EUT

Analisi Infinitesimale

Una trattazione Nonstandard

Lucio Crisma - Silvano Holzer

All'amico, collega e maestro
Lucio Crisma (1931-2023)
In memoriam

Indice

Introduzione **i**

I Principi di Analisi Nonstandard 1

1 Sovrastrutture e linguaggi formali **5**

1.1 Sovrastruttura di base un insieme 7

1.1.1 Proprietà di chiusura 8

1.2 Linguaggio formale delle sovrastrutture 13

1.2.1 Sintassi 14

1.2.2 Semantica 17

2 Monomorfismi **21**

2.1 Monomorfismi. Prime proprietà 23

2.2 Teorema d'isolamento interno 27

2.3 Teorema d'isolamento standard 31

2.4 Trasformate di relazioni 35

2.5 Il modello $\mathcal{I}$ come sovrastruttura interna 39

2.6 Immersioni 44

2.7 Allargamenti 45

3 Starconcetti **53**

3.1 Prolungamento del monomorfismo 57

3.2 Alcune proprietà del prolungamento 60

3.3 Starconcetti. Prime proprietà 67

3.4 Composizione di $\star$-concetti 71

3.5 Descrivibilità degli starconcetti 74

3.6 Starconcetti fondamentali 76

3.7 Prime applicazioni degli $\star$-concetti 88

II Numeri reali infinitesimi e infiniti 93

4 Numeri $\star$-naturali 97
4.1 Operazioni e ordini in ${}^\star\mathbb{N}$ 98
4.2 Principio di $\star$-induzione 99
4.3 Numeri $\star$-naturali infiniti 103
4.4 Lemmi del trabocco e del prolungamento 105
4.5 Galassie di ${}^\star\mathbb{N}$ 107
4.6 Insiemi $\star$-finiti 109
4.7 Allargamenti e $\star$-finitezza 111

5 Numeri $\star$-reali 115
5.1 Operazioni e ordini in ${}^\star\mathbb{R}$ 116
5.2 Numeri $\star$-reali finiti, infiniti e infinitesimi 117
5.3 Galassie di ${}^\star\mathbb{R}$ 122
5.4 Monadi di ${}^\star\mathbb{R}$ 125
5.5 La funzione parte standard 127
5.6 Ordini di grandezza degli $\star$-reali 133
5.7 Alcuni insiemi interni ed esterni di ${}^\star\mathbb{R}$ 139

6 Nozioni topologiche di $\mathbb{R}$ 141
6.1 Intorni e loro $\star$-trasformate 142
6.2 Proprietà puntuali e locali 148
6.3 Insiemi aperti, chiusi, compatti e limitati 149
6.3.1 Insiemi aperti e chiusi 151
6.3.2 Insiemi limitati 151
6.3.3 Chiusura di un insieme 152
6.3.4 Insiemi compatti 153
6.4 Tre teoremi fondamentali 155

III Analisi Infinitesimale 157

7 Funzioni a valori reali 161
7.1 Proprietà globali e locali delle funzioni 161
7.2 Trasformate delle funzioni elementari 165

7.3 Trasformata della sommatoria 171

8 Funzioni continue **183**
8.1 Continuità 183
8.2 Continuità uniforme 190

9 Limiti delle funzioni **193**
9.1 Caratterizzazioni esterna, interna e mista 194
9.2 Limite finito 200
9.3 Operazioni con i limiti 202
9.4 Limiti di successioni di numeri reali 204
9.5 Limiti di serie numeriche 207
9.6 Limiti di successioni di funzioni 211

10 Derivata di una funzione **219**
10.1 Regole di derivazione 220
10.2 Funzioni derivabili in un intervallo 224

11 Integrale di Riemann **237**
11.1 Caratterizzazione infinitesimale 239
11.2 Criterio di Riemann infinitesimale 245
11.3 Esempi di funzioni integrabili 252
11.4 Proprietà algebriche dell'integrale 258
11.5 La funzione integrale 261
11.6 Teorema della somma infinita 265
11.7 Quattro teoremi fondamentali 269
11.8 Il numero di Nepero 272

Bibliografia essenziale **275**

Introduzione

> It may well be doubted whether human ingenuity can construct an enigma . . . which human ingenuity may not, by proper application, resolve.
>
> *E.A.Poe, The Gold-Bug*

> Robinson's work . . . offers a rational reconstruction of the discredited infinitesimal theory which satisfies modern requirements of rigour and which is no weaker than Weierstrass'theory. This reconstruction makes infinitesimal theory an almost respectable ancestor of a fully-fledged, powerful modern theory, lifts it from the status of pre-scientific gibberish and renews interest in its partly forgotten, partly falsified history.
>
> *I.Lakatos, Cauchy and the Continuum*

L'uso degli infinitesimi (attuali)[1], già adoperato da Archimede (287-212 a.C.) [2], "esplose" nel '600 per opera, tra gli altri, di Galileo Galilei, Johannes Keplero, Pierre de Fermat, Isaac Barrow e, principalmente, da Isaac Newton e Gottfried W.Leibniz i quali, tra il 1670 e 1690, "inventarono", indipendentemente l'uno dall'altro, l'analisi infinitesimale (o "calcolo sublime" secondo la denominazione di allora).[3] Mentre Newton negli ultimi scritti intese gli

[1]Cioè di grandezze costanti e determinate, infinitamente piccole. A differenza della nozione di *infinitesimo potenziale*, inteso come quantità variabile che non assume mai un valore infinitamente piccolo, ma può assumere valori *comunque piccoli* e diventare quindi più piccolo di una qualsiasi quantità prefissata.

[2]Essenzialmente a scopo euristico come guida per individuare risultati che poi venivano sempre provati, in modo rigoroso, con metodi geometrici. Si veda, ad esempio, l'ottavo capitolo di L.Russo, *Archimede*, 2019.

[3]Celebre la disputa sulla priorità (l'accusa di plagio di Newton a Leibniz). Si veda ad

infinitesimi in senso potenziale, Leibniz rimase sempre fedele agli infinitesimi attuali, talvolta intesi come enti immaginari, introducendo, tra l'altro, le notazioni di derivata e di integrale, tuttora adoperate. Pur consentendo una strepitosa crescita delle conoscenze relative allo studio delle funzioni, della geometria, della fisica, della meccanica e dell'astronomia, gli infinitesimi vennero pesantemente attaccati, ad esempio da George Berkeley (1734), a causa delle numerose inconsistenze insite nell'uso, talvolta spregiudicato, di questi pionieri.

Il loro uso, dovuto a queste difficoltà, pur rimanendo presente per quasi due secoli grazie alla loro forte valenza intuitiva, venne totalmente abbandonato nella seconda metà dell'800, grazie ai lavori di Richard Dedekind, Georg Cantor e, in particolare, di Karl Weierstarss, inventore della tecnica *epsilon-delta*. Questa sistemazione rigorosa dei numeri reali e della nozione di limite (quindi dell'analisi), indusse Bertrand Russel a scrivere una sentenza lapidaria: Hence infinitesimals as explaining continuity must be regarded as unnecessary, erroneous and self-contradictory (*The Principles of Mathematics*, chapter 41, 1903).[4]

Ma, dopo circa sessant'anni dal loro "seppellimento", il matematico Abraham Robinson nel 1960 ebbe una brillante intuizione, quella di ricorrere a risultati piuttosto sofisticati di logica e teoria dei tipi per fornire una base logicamente solida ai vecchi e bistrattati infinitesimi, consentendone quindi la "riesumazione".[5] La versione originale venne poi semplificata, dallo stesso Robinson congiuntamente con Elias Zakon (1969), usando particolari applicazioni iniettive, tra modelli cumulativi della teoria elementare degli insiemi, che verificano un'opportuna interpretazione e formalizzazione in un linguaggio del primo ordine della cosiddetta *lex continuitatis* formulata, in modo piuttosto vago, da Leibniz nel 1701.[6]

---

esempio A.R.Hall, *Philosophers at war. The quarrel between Newton and Leibniz*, 1980.

[4]Anche se le ricerche sul significato degli infinitesimi e sul loro possibile uso, vennero continuate alla fine dell'800, tra gli altri, dai matematici italiani Giuseppe Veronese, Rodolfo Bettazzi e Tullio Levi-Civita.

[5]Nel libro *Non-Standard Analysis*, Robinson scrive: "In the fall of 1960 it occured to me that the concepts and methods of contemporary Mathematical Logic are capable of providing a suitable framework for the development of the Differential and Integral Calculus by means of infinitely small and infinitely large numbers" (nella prefazione) e "It is shown in this book that Leibniz'ideas can be fully vindicated and that they lead to a novel and fruitful approach to classical Analysis and to many other branches of mathematics" (alla fine del paragrafo 1.1).

[6]Nei seguenti termini: Proposito quocunque transitu continuo in aliquem terminum

Scopo di questo testo è proprio quello di fornire un'esposizione della soluzione data da Robinson-Zakon all'enigma degli infinitesimi (chiamata da Robinson *Non-standard Analysis*), dettagliata in ogni aspetto e del tutto rigorosa.

La sua origine deriva dai nostri lavori relativi all'analisi nonstandard, sviluppati negli anni '80 del secolo scorso, che ci avevano condotto, scoraggiati dalle pesanti formalizzazioni spesso richieste dall'impostazione qui adottata (dovute alla "povertà"espressiva del linguaggio di riferimento) a introdurre una tecnica (quella degli *starconcetti*[7]) che consentisse di "alleggerire" significativamente la trattazione mediante semiformalizzazioni sempre più "grezze".

Per alterne vicende la stesura del libro nel corso del tempo venne abbandonata e ripresa varie volte. Nel 2021, dopo il mio ritiro dall'attività didattica ho ripreso, d'accordo con Lucio, ad occuparmi con continuità del manoscritto per completarlo, aggiornarlo e, eventualmente, pubblicarlo.

Il testo è composto da tre parti. La prima è dedicata alla costruzione logico-insiemistica ancillare, in questa esposizione, alla fondazione dell'analisi infinitesimale.

La seconda, dopo un'analisi dell'insieme dei numeri naturali finiti e infiniti, affronta lo studio della struttura, piuttosto complessa, del sistema numerico ottenuto aggiungendo ai numeri reali i numeri infinitesimi e quelli infiniti. In particolare poi, fornisce le caratterizzazioni infinitesimali delle principali nozioni topologiche inerenti la retta reale.

Nell'ultima, infine, si entra nel "cuore" dell'analisi reale trattando con metodi infinitesimali alcuni argomenti classici: continuità, limiti, derivata e integrale di Riemann.[8] Preme sottolineare che nella seconda e terza parte vengono riportate, per i teoremi più importanti, sia le dimostrazioni classiche che quelle nonstandard, al fine di mettere in luce la drastica semplificazione dimostrativa che, accompagnata a quella fortemente intuitiva, fa dell'analisi

desinente, liceat raciocinationem communem instituere, qua ultimus terminus comprehendatur. Cioè, in ogni presunta transizione continua, terminante in un termine qualsiasi, è lecito istituire un ragionamento generale, nel quale il termine finale può anche essere incluso.

[7]Ai quali è dedicato il terzo capitolo, che costituisce (al meglio delle mie conoscenze) la parte più originale del libro rispetto alle trattazioni dell'analisi nonstandard presenti nella letteratura corrente.

[8]Per l'uso degli infinitesimi in altri settori della matematica, invitiamo il lettore a consultare i testi citati in bibliografia; in particolare [6].

infinitesimale nonstandard un'alternativa più semplice ed elegante della trattazione tradizionale basata sul metodo *epsilon-delta* di Weierstrass.

Per maggiori dettagli si vedano gli incipit delle tre parti e degli undici capitoli.

Purtroppo, Lucio è venuto a mancare nel giugno dello scorso anno, per cui non ha potuto esaminare la versione finale del lavoro. Conseguentemente, sono a mio carico tutti gli errori, i refusi, le imprecisioni che, quasi certamente, sono presenti nel testo. Anzi, a questo proposito, invito gli eventuali lettori a farmeli notare.

S.Holzer

Trieste, maggio 2024

Parte I

Principi di Analisi Nonstandard

> The key to our method is provided by the detailed analysis of the relation between mathematical languages and mathematical structures which lies at the bottom of contemporary model theory.
>
> *A.Robinson, Non-standard Analysis*

Nel primo capitolo consideriamo un insieme prefissato di oggetti, pensati come "atomi", con i quali, tramite successivi passaggi all'insieme potenza, costruire la *sovrastruttura*, intesa come l'ambiente di riferimento contenente gli oggetti d'interesse (insiemi, coppie ordinate, funzioni, operazioni, relazioni d'ordine, ...) relativi agli atomi. A questo "universo del discorso" aggiungiamo, poi, un linguaggio formalizzato del primo ordine che consenta di "parlare", in modo formalizzato, degli elementi della sovrastruttura.

Nel secondo, chiave di volta di tutto quello che segue, introduciamo la nozione di *monomorfismo*, inteso come un'applicazione tra due sovrastrutture che stabilisca una corrispondenza, tra gli enunciati che "parlano" degli enti della prima sovrastruttura con quelli che "parlano" degli enti della seconda, che conservi la "verità". Questa condizione, detta *Principio di Leibniz*, da precisare ulteriormente, prende spunto, come già accennato nell'introduzione, dalla "lex continuitatis" che indusse Leibniz a ritenere che i numeri reali potessero essere estesi a un più largo sistema numerico che avesse le medesime proprietà dei numeri reali e contenesse anche gli *infinitesimi*. Suggerimento peraltro, nella sua generalità, palesemente assurdo, in quanto la proprietà di "essere, in valore assoluto, minore di ogni numero reale positivo", verificata da ogni infinitesimo, non è soddisfatta da alcun numero reale. Nell'impostazione di Robinson-Zakon il paradosso si risolve positivamente richiedendo che le proprietà che si "conservano" nel sistema più ampio siano *solamente* quelle esprimibili con enunciati *limitati* (cioè aventi tutti i quantificatori vincolati a entità individuali) di un linguaggio del primo ordine. Ed è proprio questa richiesta che è inserita nella formulazione del Principio di Leibniz.

Dopo aver sviluppato un'ampia disamina delle proprietà di questa particolare applicazione consideriamo, alla fine del capitolo, quei particolari monomorfismi, gli *allargamenti*, che sono lo strumento base con cui introdurre, nella seconda parte, accanto ai numeri reali gli infinitesimi. Ricorrendo alla tecnica degli ultrafiltri, diamo infine fondamento a tutto quello che precede, fornendo, a grandi linee data la sua complessità, la dimostrazione che gli allargamenti esistono, nel caso che l'insieme degli atomi sia infinito.

Poichè, come è facile intuire e verificare materialmente, l'applicazione del Principio di Leibniz comporta formalizzazioni limitate talvolta molto gravose, nel terzo capitolo (che è, come già osservato nell'introduzione, la parte più originale del testo), si fornisce una tecnica, basata sugli *starconcetti*, che consente di ricorrere a un linguaggio semiformalizzato in costante evoluzione che permette, tenendo conto delle conoscenze via via acquisite, una radicale semplificazione della fase di formalizzazione. Non v'è dubbio che questa tecnica abbia una valenza applicativa di notevole portata consentendo il ricorso a semiformalizzazioni sempre più "grezze" e quindi a una drastica semplificazione delle dimostrazioni.

Capitolo 1

Sovrastrutture e linguaggi formali

In generale una teoria consta, in ultima analisi, di due strutture concettuali. Una è l'"universo del discorso", cioè la totalità degli enti di cui la teoria si occupa, l'altra l'apparato linguistico o "linguaggio", mediante il quale vengono descritte proprietà, relazioni, etc., relative agli enti in questione. L'usuale analisi matematica, per esempio, è una teoria che verte sui numeri reali e sulle entità costruite a partire da essi. Il linguaggio è vicino a una lingua naturale (italiano, inglese, etc.), come del resto accade per altri rami della matematica o più in generale della scienza. Le sue parole hanno in parte il medesimo significato della lingua d'origine, altre un significato più specificamente delimitato e altre ancora sono parole nuove, specialistiche.

Per quanto riguarda l'universo (del discorso), conviene fare alcune considerazioni strutturali. A partire dall'universo $U_0 = \mathbb{R}$ dei numeri reali, intesi come "atomi" e posti al "livello" zero, gli insiemi di reali sono elementi dell'insieme delle parti $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ e quindi si trovano al livello successivo. Ne consegue allora, che, se vogliamo parlare dei numeri reali e dei loro insiemi, dobbiamo considerare il nuovo universo $U_1 = \mathbb{R} \cup \mathbb{P}(\mathbb{R})$, che rappresenta il primo livello. Notato che le coppie ordinate di reali sono sottoinsiemi di U_1 [1], ne

[1] Nella teoria degli insiemi la s-pla ordinata $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ $(s \geq 1)$ viene introdotta, seguendo l'impostazione di Kuratowski-Wiener, in via induttiva, ponendo: $(x_1) = x_1$, $(x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ e $(x_1, \ldots, x_s) = ((x_1, \ldots, x_{s-1}), x_s)$ $(s > 2)$; così, ad esempio, $(x_1, x_2, x_3) = \{\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2), x_3\}\} = \{\{\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}\}, \{\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}, x_3\}\}$. Inoltre, le relazioni, gli ordinamenti e le applicazioni vengono identificati con opportuni sottoinsiemi di prodotti cartesiani. In questo ordine di idee, ad esempio, la nozione di

deriva che, per considerarle assieme ai reali e ai loro sottoinsiemi, dobbiamo aggiungere al livello precedente, il secondo livello rappresentato dall'universo $U_2 = U_1 \cup \mathbb{P}(U_1)$. A questo punto, è evidente che, se vogliamo parlare anche:
− dei numeri complessi (intesi come punti del piano di Argand-Gauss), possiamo rimanere al secondo livello;
− delle funzioni reali di variabile reale dobbiamo salire al terzo livello $U_3 = U_2 \cup \mathbb{P}(U_2)$;
− delle terne ordinate di numeri reali, bisogna considerare il quarto livello $U_4 = U_3 \cup \mathbb{P}(U_3)$;
− delle usuali operazioni algebriche di addizione e moltiplicazione dei numeri reali, occorre accedere al quinto livello $U_5 = U_4 \cup \mathbb{P}(U_4)$;
− dell'integrale di Riemann (inteso come applicazione che associa ad ogni funzione integrabile un numero reale) bisogna salire al sesto livello $U_6 = U_5 \cup \mathbb{P}(U_5)$.

Dunque, per poter considerare nozioni più complesse di quelle esaminate (come, ad esempio, la misura di Peano-Jordan nello spazio), bisogna "salire" ulteriormente. In ultima analisi, dunque, l'universo del discorso presenta una struttura alquanto complessa e "dinamica", che diviene "statica" solo quando consideriamo tutti i livelli possibili.

Queste considerazioni hanno portato alla nozione fondamentale di *sovrastruttura*, introdotta da Jerzy Łoś (1955), che viene precisata e studiata nella prima sezione.

Per quanto riguarda invece il linguaggio naturale con il quale si "parla" normalmente degli elementi dell'universo del discorso, notiamo che, per quanto si cerchi di precisarlo, risulta praticamente impossibile renderlo esente da fraintendimenti, soprattutto in relazione a quelle parole che non vengono esplicitamente definite e per le quali ci si affida all'esperienza linguistica delle persone. Per taluni ambiti, come quello che ci interessa, è però essenziale evitare qualsiasi fonte di ambiguità. Da qui, l'esigenza di analizzare i linguaggi comuni nell'intento di arrivare alla costruzione di linguaggi esenti dalle denunciate fonti di fraintendimento. Si è in tal modo giunti all'introduzione dei *linguaggi formali* che, basati su un numero piuttosto limitato di regole, garantiscono

---

"applicazione di dominio a e codominio b" (in simboli $f : a \mapsto b$), significa: $f \subset a \times b$ e $\forall x \in a \, \exists y \in b \, ((x, y) \in f)$ e $\forall x \in a \, \forall y_1, y_2 \in b \, ((x, y_1) \in f$ e $(x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2)$. Inoltre, $f(x)$ denota quell'unico elemento $y \in b$ tale che $(x, y) \in f$.

Per quanto riguarda le usuali notazioni delle principali nozioni della teoria elementare degli insiemi, facciamo riferimento a A. Abian, *La teoria degli insiemi e l'aritmetica transfinita*, Feltrinelli Editore, Milano, 1972).

la desiderata precisione a scapito, s'intende, della potenza espressiva.

Alla questione è dedicata la seconda sezione, ove s'introduce il linguaggio formalizzato (del primo ordine) che sta alla base di tutto lo sviluppo successivo.

1.1 Sovrastruttura di base un insieme

Precisiamo quanto sopra delineato, fornendo la nozione di sovrastruttura e studiandone poi, nel primo paragrafo, le principali proprietà di chiusura che mettono in evidenza come questa nozione offra un ambiente adeguato nel quale sviluppare una trattazione matematica degli oggetti d'interesse.

Dato un insieme $A \neq \emptyset$, consideriamo la successione crescente di insiemi:

$$A_0 = A; \qquad A_{n+1} = A_n \cup \mathbb{P}(A_n)\ (n \geq 0) \tag{1.1}$$

e chiamiamo **sovrastruttura su** A l'insieme $\hat{A} = \bigcup_{n\geq 0} A_n = \lim_{n\to\infty} A_n$. Ciò posto, introduciamo la terminologia seguente:

− L'insieme A_n viene chiamato **livello** n**-simo** di $\hat{A}$ $(n \geq 0)$;

− Gli elementi di $\hat{A}$ sono denominati **entità**, le quali, a loro volta, distinte in **atomi** (elementi di A) e in **entità proprie** (tutte le altre).

Quest'ultima distinzione è giustificata dal fatto che gli elementi di A riescono, per così dire, i "mattoni" base mediante i quali costruire la sovrastruttura. In questo ordine di idee, assumiamo, onde evitare situazioni del tutto irrilevanti, che A sia una **base** di $\hat{A}$, cioè tale che $\emptyset \notin A$ e che, qualunque siano $a' \in \hat{A}$ e $a \in A$, risulti $a' \notin a$.[2] Le entità proprie riescono invece, tutte, insiemi costruiti a partire dagli atomi.

Così, ad esempio, A è un'entità propria ($A \in \mathbb{P}(A) \subset A_1$) e i suoi elementi sono gli atomi. Più in generale, ogni livello A_n è un'entità propria ($A_n \in \mathbb{P}(A_n) \subset A_{n+1}$). Notiamo, poi, che tra le entità compare anche l'insieme vuoto (appartenente ad A_n, per ogni $n > 0$) che è l'unica entità propria avente in comune con gli atomi la proprietà di essere privo di elementi della sovrastruttura.

Ovviamente, nel caso che A sia un insieme finito, i livelli hanno tutti un numero finito di elementi mentre la sovrastruttura $\hat{A}$ risulta invece un insieme numerabile.

[2] L'assunzione fatta, peraltro, non lede la generalità del discorso, in quanto gli atomi possono essere sempre codificati in maniera che non contengano alcuna entità della sovrastruttura (si veda, ad esempio, [6], Proposition 2.9.11, p.62).

Osserviamo infine che, nel seguito dell'esposizione, risulta utile la seguente rappresentazione del livello $(n+1)$-esimo:

$$A_{n+1} = A \cup \mathbb{P}(A_n) \qquad (n \geq 0) \tag{1.2}$$

che si ottiene facilmente per induzione.

1.1.1 Proprietà di chiusura

Le proprietà della sovrastruttura che ora andiamo ad elencare, sono state suddivise in quattro parti, raggruppando le proposizioni che presentano analogo grado di complessità dal punto di vista insiemistico.

Prima di elencarle, riteniamo opportuno osservare che, in molti dei teoremi che le esprimono, viene fatta l'ipotesi che una o più entità appartengano a $A_{n+1} \setminus A$, e cioè che tali entità siano proprie (insiemi) e non atomi. Ciò è dovuto al fatto che nei corrispondenti enunciati sono previste operazioni che, secondo le usuali definizioni, hanno senso solo se le entità stesse sono insiemi. Sarebbe, naturalmente, possibile estendere, in modo ovvio, le dette definizioni e rendere valide le relative operazioni anche con riferimento agli atomi. L'ipotesi restrittiva potrebbe allora essere rimossa. Non abbiamo ritenuto opportuno, però, seguire questa strada, in quanto riuscirebbe, qui, di scarsa utilità pratica. Per quanto riguarda, invece, le relazioni di appartenenza e d'inclusione, non riportiamo, per le entità che appaiono alla destra di un'appartenenza o alla sinistra di una inclusione, l'ipotesi di non atomicità, essendo, in questi casi, tale condizione del tutto ovvia.

Ciò premesso, elenchiamo nel prossimo teorema il primo gruppo di proprietà. Osserviamo che, per la proposizione (i), gli elementi di un'entità propria sono entità; per (iii) i sottoinsiemi di un'entità propria sono entità; per (iv) l'intersezione e l'unione degli elementi di un'entità propria priva di atomi sono entità; per (v), (vi) infine, si ottiene un'entità qualora si collezioni, si intersechi o si unisca un numero finito di entità.

Teorema 1.1.1. *Sussistono le proposizioni:*[3]

(i) $a_1 \in a_2 \in A_{n+1} \Rightarrow a_1 \in A_n$;

(ii) $a \in A_{n+1} \setminus A \Rightarrow a \subset A_n$ *e* $\mathbb{P}(a) \in A_{n+2}$;

[3]Ove $\Rightarrow$ e $\Leftrightarrow$ denotano, rispettivamente, l'implicazione materiale "se ... allora" e il bicondizionale "se e solo se".

(iii) $a_1 \subset a_2 \in A_{n+1} \setminus A \Rightarrow a_1 \in A_{n+1}$;

(iv) $a \in A_{n+2} \setminus A$ *e* $a \cap A = \emptyset \Rightarrow \cap a, \cup a \in A_{n+1} \setminus A$;[4]

(v) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \Leftrightarrow \{a_1, \ldots, a_s\} \in A_{n+1}$;

(vi) $a_1, \ldots, a_s \in A_{n+1} \setminus A \Rightarrow a_1 \cap \cdots \cap a_s,\ a_1 \cup \cdots \cup a_s \in A_{n+1}$.

Dimostrazione. (i) Per (1.2), $a_2 \in A \cup \mathbb{P}(A_n)$ da cui otteniamo $a_2 \in \mathbb{P}(A_n)$ e quindi $a_1 \in a_2 \subset A_n$.

(ii) Per (1.2), $a \subset A_n$ da cui risulta $\mathbb{P}(a) \subset \mathbb{P}(A_n) \subset A_{n+1}$ e quindi $\mathbb{P}(a) \in \mathbb{P}(A_{n+1}) \subset A_{n+2}$.

(iii) Per (1.2), $a_2 \subset A_n$ da cui segue $a_1 \subset A_n$ e quindi $a_1 \in A_{n+1}$.

(iv) Poichè $a \cap A = \emptyset$, gli elementi di a sono insiemi per cui ha senso considerare $\cap a$ e $\cup a$. Ciò premesso, esaminiamo intanto l'intersezione $\cap a$ che è ovviamente un sottoinsieme di ogni elemento di a. Osservato che, per (i), gli elementi di a ($\in A_{n+2}$) sono in A_{n+1}, tramite (iii) risulta $\cap a \in A_{n+1}$. Passiamo infine a considerare l'unione $\cup a$. Tutti gli elementi di a sono, per quanto sopra osservato, in A_{n+1} e quindi ogni loro elemento appartiene, per (i), ad A_n. Essendo poi $\cup a$ l'insieme di tali entità, ne segue, tramite (1.1), $\cup a \in \mathbb{P}(A_n) \subset A_{n+1}$.

(v) Conseguenza immediata di (1.1) e (i).

(vi) Segue da (iv) e (v), notato che $a_1 \cap \cdots \cap a_s = \bigcap\{a_1, \ldots, a_s\}$ e $a_1 \cup \cdots \cup a_s = \bigcup\{a_1, \ldots, a_s\}$. □

Passando al secondo gruppo, per la proposizione (i) del prossimo teorema, le s-ple di entità sono entità; per (ii) i prodotti cartesiani finiti di entità sono entità; per (iii) le relazioni s-arie di entità sono entità, e lo sono pure le loro proiezioni; per (iv), infine, le applicazioni tra entità sono entità e lo sono pure le imagini degli elementi del dominio.

Teorema 1.1.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \Rightarrow (a_1, \ldots, a_s) \in A_{n+2s-2}$;

(ii) $a_1, \ldots, a_s \in A_{n+1} \setminus A \Rightarrow a_1 \times \cdots \times a_s \in A_{n+2s-1}$;

(iii) $a_1, \ldots, a_s \in A_{n+1} \setminus A$ *e* $a \subset a_1 \times \cdots \times a_s \Rightarrow a \in A_{n+2s-1}$ *e* $\pi^s_j(a) \in A_{n+1}$ *e* $p^s_j(a) \in A_{n+2s-3}$;[5]

[4] Avendo posto $\cap a = \{e \mid e \in a' \text{ per ogni } a' \in a\}$ e $\cup a = \{e \mid e \in a' \text{ per qualche } a' \in a\}$.

[5] Ove, $\pi^s_j(a) = \{x : \exists x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_s((x_1, \ldots x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_s) \in a)\}$ e $p^s_j(a) = \{(x_1, \ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_s) : \exists x\, ((x_1, \ldots x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_s) \in a)\}$. A chiarifica-

(iv) $a_1, a_2 \in A_{n+1} \setminus A$ *e* $a_3 \in a_1$ *e* $f : a_1 \mapsto a_2 \Rightarrow f \in A_{n+3}$ *e* $f(a_3) \in A_n$.

Dimostrazione. (i) Procediamo per induzione su s. Per $s = 1$ risulta $(a_1) = a_1$ e quindi la tesi. Per $s \geq 1$, supponiamo $\vec{a} \in A_{n+2s-2}$. Ora, per definizione, $(a_1, \dots, a_{s+1}) = \{\{\vec{a}\}, \{\vec{a}, a_{s+1}\}\}$. Per il Teorema 1.1.1(v), $\{\vec{a}\} \in A_{n+2s-1}$ e, osservato che $a_s \in A_n \subset A_{n+2s-2}$, anche $\{\vec{a}, a_{s+1}\} \in A_{n+2s-1}$. Sempre per il medesimo teorema risulta infine $(a_1, \dots, a_{s+1}) \in A_{n+2s} = A_{n+2(s+1)-2}$.

(ii) Sia $\vec{b} \in a_1 \times \cdots \times a_s$. Ne segue $b_i \in a_i$, da cui, per il Teorema 1.1.1(i), $b_i \in A_n$ e quindi, per (i), $\vec{b} \in A_{n+2s-2}$. Ne segue, tramite (1.1), la tesi.

(iii) Per (ii) e il Teorema 1.1.1(iii), $a \in A_{n+2s-1}$. Osservato che $\pi^s_j(a) \subset a_j$, risulta, per lo stesso teorema, $\pi^s_j(a) \in A_{n+1}$. Notato infine che $p^s_j(a) \subset a_1 \times \cdots \times a_{j-1} \times a_{j+1} \times \cdots \times a_s$ otteniamo, di nuovo per (ii) e il medesimo teorema, $p^s_j(a) \in A_{n+2s-3}$.

(iv) La $f \in A_{n+3}$ è un caso particolare di (iii). La $f(a_3) \in A_n$ segue dal Teorema 1.1.1(i), osservato che $f(a_3) \in a_2$. □

Passando al terzo gruppo, per la proposizione (i) del prossimo teorema, l'intersezione di una famiglia *arbitraria* di entità (proprie) è un'entità (estensione della prima conseguenza del Teorema 1.1.1(vi)); per (ii) l'unione di una famiglia *arbitraria* di entità di *dato livello* è un'entità (estensione della seconda conseguenza del Teorema 1.1.1(vi)) [6]; per (iii), infine, prodotti cartesiani di *entità di un dato livello* e con *insieme di indici entità* sono entità.[7]

Teorema 1.1.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $J \neq \emptyset$ *e* $a_j \in \hat{A} \setminus A$ *per ogni* $j \in J \Rightarrow \bigcap_{j \in J} a_j \in \hat{A}$;

(ii) $J \neq \emptyset$ *e* $a_j \in A_{n+1} \setminus A$ *per ogni* $j \in J \Rightarrow \bigcup_{j \in J} a_j \in A_{n+1}$;

(iii) $J \in A_{n+1} \setminus A$ *e* $a_j \in A_{n+1} \setminus A$ *per ogni* $j \in J \Rightarrow \prod_{j \in J} a_j \in A_{n+4}$.

zione della simbologia, osserviamo che $\pi^2_1(a) = p^2_2(a)$ e $\pi^2_2(a) = p^2_1(a)$. Inoltre, che se a è una relazione binaria, $\pi^2_1(a)$ e $\pi^2_2(a)$ sono, rispettivamente, il dominio e il rango della relazione. Infine, che se a è un'applicazione, $\pi^2_2(a)$ denota il relativo insieme imagine.

[6] L'ipotesi restrittiva che le entità siano tutte di un dato livello non può essere rimossa. Infatti, sia J l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e $a_j = A_j$ per ogni $j \in J$. Riesce $\bigcup_{j \in J} A_j = \hat{A}$ che non è, evidentemente, un'entità.

[7] L'ulteriore ipotesi restrittiva che l'insieme degli indici sia un'entità non può essere rimossa. Infatti, sia $J = \hat{A}$ e $a_j = A$ per ogni $j \in J$. Allora, $\prod_{j \in J} a_j$ è l'insieme delle applicazioni di $\hat{A}$ in A. Nessuna di tali applicazioni è un'entità, perchè non lo è, per il Teorema 1.1.2(iii), il suo dominio. Ne segue, tramite il Teorema 1.1.1(i), che non è un'entità neanche $\prod_{j \in J} a_j$.

Dimostrazione. (i) Segue dal Teorema 1.1.1(iii) e dalla $\bigcap_{j\in J} a_j \subset a_j$ per ogni j.

(ii) Sia $a \in \bigcup_{j\in J} a_j$ arbitrario. Allora $a \in a_j$ per qualche j da cui otteniamo, per il Teorema 1.1.1(i), $a \in A_n$. Ne segue $\bigcup_{j\in J} a_j \subset A_n$ e quindi, per (1.1), $\bigcup_{j\in J} a_j \in \mathbb{P}(A_n) \subset A_{n+1}$.

(iii) Sia $f \in \prod_{j\in J} a_j$. Allora $f : J \mapsto \bigcup_{j\in J} a_j$. Poichè $a_j \in A_{n+1}$ per ogni j, si ha, per (ii), $\bigcup_{j\in J} a_j \in A_{n+1}$. Essendo $J \in A_{n+1}$, risulta, per il Teorema 1.1.2(iv), $f \in A_{n+3}$. Ne segue, essendo f arbitraria, $\prod_{j\in J} a_j \subset A_{n+3}$ e quindi, per (1.1), $\prod_{j\in J} a_j \in A_{n+4}$. $\square$

Concludiamo il paragrafo provando ulteriori proprietà di chiusura della sovrastruttura, alcune delle quali sono inverse di proprietà precedentemente considerate, mentre altre lo divengono se i livelli vengono sostituiti, nei corrispondenti enunciati, da $\hat{A}$, oppure da altri livelli di indice opportuno.

Teorema 1.1.4. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathbb{P}(a) \in A_{n+1} \Rightarrow a \in A_n$;

(ii) $a \cap A = \emptyset$ *e* $\cup a \in A_{n+1} \Rightarrow a \in A_{n+2} \setminus A$;

(iii) $a_1 \cup \cdots \cup a_s \in A_{n+1} \Rightarrow a_1, \ldots, a_s \in A_{n+1} \setminus A$;

(iv) $(a_1, \ldots, a_s) \in A_{n+2s-2}$ *e* $s \geq 2 \Rightarrow a_1, \ldots, a_s \in A_{n+2s-4}$;

(v) $a \in A_{n+2s-1} \setminus A$ *e* $s \geq 2 \Rightarrow \pi^s_j(a) \in A_{n+2s-3}$ *e* $p^s_j \in A_{n+4s-7}$ $(1 \leq j \leq s)$;[8]

(vi) $a_1, a_2 \in A_{n+3} \setminus A \Rightarrow a_2[a_1],\ a_1 \circ a_2 \in A_{n+3}$;[9]

(vii) $a \in A_{n+3} \setminus A \Rightarrow a^{-1} \in A_{n+3}$;

(viii) $a_1 \times \cdots \times a_s \in A_{n+2s-1} \Rightarrow a_1, \ldots, a_s \in A_{n+2s-1}$;

(ix) $\emptyset \neq J \in A_{n+1} \setminus A$ *e* $\emptyset \neq \prod_{j\in J} a_j \in A_{n+2} \Rightarrow a_j \in A_{n+2}$.

[8] Le ipotesi che la s-pla sia in A_{n+2s-2} (in (iv)) e $a \in A_{n+2s-1}$ (in (v)) non sono restrittive. Infatti, essendo, per ipotesi, $a, \vec{a}$ delle entità di $\hat{A}$, devono appartenere, per qualche n, a $A_n \subset A_{n+2s-2} \subset A_{n+2s-1}$, ove le inclusioni derivano dalla $0 \leq 2s-2 < 2s-1$.

[9] Ove $a_2[a_1] = \{x \mid \exists y \in a_1\,((y,x) \in a_2)\}$, $a_1 \circ a_2 = \{(x_1,x_2) \mid \exists y\,((x_1,y) \in a_1 \,\mathrm{e}\, (y,x_2) \in a_2)\}$ e, nella (vii), $a^{-1} = \{(x_2,x_1) \mid (x_1,x_2) \in a\}$. Nel caso particolare che a, a_1, a_2 siano relazioni, $a_1 \circ a_2$ denota la loro concatenazione e a^{-1} la relazione inversa della a.

Dimostrazione. (i) Dalla $a \in \mathbb{P}(a)$ si ha, per il Teorema 1.1.1(i), la tesi.

(ii) Riesce $a \subset \mathbb{P}(\cup a)$ e, per il Teorema 1.1.1(ii), $\mathbb{P}(\cup a) \in A_{n+2}$. Ne segue, tramite il Teorema 1.1.1(iii), $a \in A_{n+2}$.

(iii) Da $a_1 \cup \cdots \cup a_s = \bigcup\{a_1, \ldots, a_s\}$, (ii) e il Teorema 1.1.1(v), si ha la tesi.

(iv) La tesi si consegue per induzione. Per s = 2 riesce $(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\} \in A_{n+2}$ da cui, per il Teorema 1.1.1(v), $\{a_1, a_2\} \in A_{n+1}$ e quindi, sempre per il medesimo teorema, $a_1, a_2 \in A_n = A_{n+2s-4}$. Assumiamo ora che la tesi valga per ogni s-pla di A_{n+2s-2} e proviamola per ogni $(s+1)$-upla di $A_{n+2(s+1)-2} = A_{n+2s}$. Dalla $(a_1, \ldots, a_{s+1}) = \{\{\vec{a}\}, \{\vec{a}, a_{s+1}\}\} \in A_{n+2s}$ riesce $\{\vec{a}, a_{s+1}\} \in A_{n+2s-1}$ da cui otteniamo $\vec{a}, a_{s+1} \in A_{n+2s-2}$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, $a_1, \ldots, a_s \in A_{n+2s-4} \subset A_{n+2s-2}$. Dunque, tutte le componenti della $(n+1)$-upla appartengono a $A_{n+2s-2} = A_{n+2(s+1)-4}$.

(v) Per il Teorema 1.1.1(i), ogni s-pla di a appartiene a A_{n+2s-2} e quindi, per (iv), le sue componenti sono in A_{n+2s-4}. Conseguentemente, $\pi^s_j(a) \subset A_{n+2s-4}$ da cui $\pi^s_j(a) \in A_{n+2s-3}$. Passando a $p^s_j(a)$, risulta, per il Teorema 1.1.2(i) $p^s_j(a) \subset A_{(n+2s-4)+2(s-1)-2} = A_{n+4s-8}$ e quindi $p^s_j(a) \in A_{n+4s-7}$.

(vi) Sia $a \in a_2[a_1]$ arbitrario. Esiste allora $a' \in a_1$ tale che $\{\{a'\}, \{a', a\}\} = (a', a) \in a_2$. Ne segue, applicando il Teorema 1.1.1(i), $\{\{a'\}, \{a', a\}\} \in A_{n+2}$ da cui, per il medesimo teorema, $\{a', a\} \in A_{n+1}$ e quindi, ancora per il medesimo teorema, $a \in A_n$. Ne segue $a_2[a_1] \subset A_n$ e quindi $a_2[a_1] \in A_{n+1} \subset A_{n+3}$.

Sia ora $(e_1, e_2) \in a_1 \circ a_2$. Esiste allora e tale che $(e_1, e) \in a_1$ e $(e, e_2) \in a_2$. Ne segue, ripercorrendo la dimostrazione precedente, $e_1, e_2 \in A_n$. Risulta dunque, tramite il Teorema 1.1.2(i), $(e_1, e_2) \in A_{n+2}$. Allora, $a_1 \circ a_2 \subset A_{n+2}$ e quindi $a_1 \circ a_2 \in A_{n+3}$.

(vii) Con un procedimento analogo a quello seguito nella dimostrazione precedente, si ottiene facilmente la tesi.

(viii) Segue immediatamente da (v), osservato che $a_j = \pi^s_j(a_1 \times \cdots \times a_s)$.

(ix) Basta provare $a_j \subset A_n$. Essendo $J \neq \emptyset$ e $\prod_{j \in J} a_j \neq \emptyset$, risulta $a_j \neq \emptyset$ per ogni j. Ciò osservato, sia $b \in a_j$. Considerata allora un'applicazione $g \in \prod_{j \in J} a_j$, introduciamo l'applicazione f così definita:

$$f(h) = \begin{cases} b_h, & \text{se } h \neq j \\ b, & \text{se } h = j \end{cases}$$

che, ovviamente, appartiene a $\prod_{j \in J} a_j$. Ne segue, per il Teorema 1.1.1(i), $f \in A_{n+1}$. Poichè $(j, f(j)) = (j, b) \in f$, riesce, per il medesimo teorema, $(j, b) \in A_n \subset A_{n+2}$ e quindi, per (iv), $b \in A_n$. Ne segue, data l'arbitrarietà di b, $a_j \subset A_n$ da cui otteniamo $a_j \in A_{n+1} \subset A_{n+2}$. □

1.2 Linguaggio formale delle sovrastrutture

Un linguaggio formale è costituito da un insieme di simboli, chiamato "alfabeto", e da un insieme di regole, chiamate "sintassi". Per quel che riguarda l'alfabeto, lo pensiamo di tipo ideografico; i suoi elementi sono, cioè, considerati come "parole", alla stregua di quanto avviene, ad esempio, per i simboli dell'alfabeto cinese.

A partire dall'alfabeto, poi, è possibile costruire l'insieme di tutte le sequenze di parole. A questo punto, compito della sintassi è quello di fornire uno strumento (le "regole sintattiche") che consente di riconoscere quali successioni di simboli alfabetici sono "frasi" del linguaggio e quali no, e quindi capace di isolare un sottoinsieme di sequenze che costituiscono quelle che vengono anche chiamate le "formule ben formate".

A questo punto è opportuno, però, fare qualche riflessione sulla terminologia usata e qualche puntualizzazione.

I termini "alfabeto", "sintassi", "parola" e "frase" sono presi a prestito da quelli adoperati nella lingua corrente, ma qui vengono usati con significato preciso, ben delimitato, il quale riesce solamente analogo a quello usuale. Se si riflette, ad esempio, sul termine "parola", appare chiaro che, qui, è sinonimo di "simbolo dell'insieme che abbiamo chiamato alfabeto", così come il termine "frase" sta per "sequenza di simboli formalmente corretta"(costruita, cioè, seguendo le regole dell'assegnata sintassi). In tutto ciò, si noti bene, viene fatta completa astrazione di qualsiasi possibile significato che sia associato ai simboli. Il che, naturalmente, non avviene nella usuale accezione dei termini: appare difficile, infatti, prendere in considerazione parole di una lingua naturale prescindendo dal loro significato.

Conseguentemente, nel primo paragrafo, dedicato alla sintassi, ci limitiamo a una mera descrizione formale della struttura del linguaggio, e, in questa fase, non occorre, e forse neanche conviene, sforzarsi di associare ai simboli altro significato, oltre a quello di mere scritture formali.

Passando infine, nel secondo paragrafo, al significato delle frasi e, conseguentemente, del concetto di "verità" (argomento della semantica), osserviamo, che dal punto di vista dei linguaggi formali, tale problema riguarda un *momento ben distinto e successivo* della fase sintattica, anche perchè il significato stesso viene a dipendere dalla scelta di una *interpretazione* in un insieme (*universo del discorso*), non univocamente determinato a priori.

1.2.1 Sintassi

Iniziamo col descrivere le componenti dell'alfabeto relativo al linguaggio L di riferimento.
1. Alfabeto I simboli dell'alfabeto si ripartiscono in tre insiemi: le costanti. le variabili e i segni ausiliari. A loro volta le costanti vengono ripartite in tre successivi sottoinsiemi: le costanti soggettive, le costanti logiche e le costanti relazionali. Più in dettaglio:
– *costanti soggettive*: gli elementi di un insieme non vuoto C;
– *costanti logiche*: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \sqcap, \sqcup$;
– *costanti relazionali*: $\lessdot$, $\asymp$;
– *variabili*: $x, x_1, \ldots, x_n, \ldots; y, y_1, \ldots, y_n, \ldots; z, z_1, \ldots, z_n, \ldots; u, u_1, \ldots, u_n$, $\ldots; v, v_1, \ldots, v_n, \ldots; \ldots$
– *segni ausiliari*: (,), $\langle$, $\rangle$.

Passiamo ora a descrivere i "mattoni" con i quali individuare le formule ben formate.
2. Formule atomiche Sono le scritture:

$$\alpha_1 \lessdot \alpha_2,\ \alpha_1 \asymp \alpha_2,\ \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle \lessdot \alpha,\ \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle \asymp \alpha,$$

ove $\alpha, \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ denotano generiche costanti soggettive o variabili.

Così come sono scritte, le formule atomiche sono più propriamente **schemi** di formule atomiche, e diventano vere e proprie formule atomiche di L solo quando viene precisato quali costanti soggettive o variabili i simboli α_1 e α_2 rappresentano. Finchè ciò non avviene le formule atomiche non sono espressioni del linguaggio formale. Esse appartengono al comune linguaggio che, per contrapporlo al linguaggio formale, chiamiamo **metalinguaggio**.

A questo punto, le formule ben formate si ottengono da quelle atomiche ricorrendo alle costanti logiche e relazionali.
3. Formule ben formate (in breve wff [10]) Sono le frasi $W, W_1, W_2, \ldots$ del linguaggio che si ottengono seguendo le regole:

1. Le formule atomiche racchiuse tra parentesi tonde $(\alpha_1 \lessdot \alpha_2)$, $(\alpha_1 \asymp \alpha_2)$, $(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle \lessdot \alpha)$ e $(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle \asymp \alpha)$ sono wff;
2. Se W è wff, allora $(\neg W)$ è wff;
3. Se W_1, W_2 sono wff, allora $(W_1 \wedge W_2), (W_1 \vee W_2), (W_1 \rightarrow W_2), (W_1 \leftrightarrow W_2)$ sono wff;

[10]Dall'inglese *well formed formula.*

4. Se W è wff e vi compare la variabile x, ma non le scritture $\sqcap x$ o $\sqcup x$, allora $(\sqcap xW)$ e $(\sqcup xW)$ sono wff;

5. Tutte e sole le wff sono ottenute, in modo ricorsivo, tramite le 1.$\div$ 4.

Esclusa la regola 1., tutte le altre regole operano su wff già "confezionate" e quindi non possono divenire operative se a monte non esiste un insieme di wff di riferimento È questo appunto il compito della regola 1. che rappresenta il passo iniziale, l'innesco, di tutto il procedimento costruttivo; inoltre è la unica ad operare sulle costanti soggettive, rappresentate in modo diretto o indiretto dalle α, stabilendo il modo corretto di collegarle mediante le costanti relazionali. A questo proposito vale la pena di osservare che a destra di una costante relazionale si trova *sempre* una costante soggettiva o una variabile. Le regole 2., 3., dichiarando ben formate le composizioni (tramite le costanti logiche) di wff racchiuse tra parentesi tonde, consente di esprimere tali wff in forma di espressione algebrica. Come in algebra, anche in questo caso la funzione delle parentesi è quella di regolare le precedenze in fase operativa.

Le regole 2., 3. e 4. insegnano ad usare correttamente le costanti logiche. Le 2., 4. si occupano delle costanti $\neg, \sqcap, \sqcup$ che operano su una sola wff. La 3. riguarda le altre quattro costanti logiche che operano invece su una coppia di wff. Può essere utile osservare a questo proposito che, in forza della 3., nessuna wff può, né iniziare né terminare, con una delle costanti logiche $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Alla costante logica $\neg$ è invece vietato l'ultimo posto, ma non il primo. Ciò vale anche per le costanti $\sqcap$ e $\sqcup$; alle stesse sono anzi vietati gli ultimi quattro posti, poichè devono essere seguite da una variabile e da una wff, che è costituita ovviamente da almeno tre simboli.

Un esame delle regole date permette di concludere che ogni coppia di parentesi tonde racchiude una frase. Solo usando le parentesi le frasi sono sintatticamente corrette. Un vantaggio di questa notazione è quello di porre in netta evidenza le modalità di costruzione di ogni formula. Nel seguito tuttavia, come usuale, molte parentesi verranno trascurate per non appesantire inutilmente la scrittura. Ciò è possibile, senza generare ambiguità, introducendo opportune convenzioni che, per noi, consistono nel collocare i simboli logici e relazionali nelle seguenti quattro classi di precedenza, il cui ordine deve essere seguito in assenza di parentesi:

$$\text{a)} \lessdot, \asymp; \qquad \text{b)} \neg, \sqcap, \sqcup; \qquad \text{c)} \wedge, \vee; \qquad \text{d)} \rightarrow, \leftrightarrow .$$

In questo ordine di idee, verranno eliminate le parentesi che racchiudono formule atomiche come pure quelle iniziale e finale che delimitano le formule ben formate.

Ad esempio, date le variabili x, y, z, la costante soggettiva a e le wff W_2, W nelle quali compaiono, rispettivamente, x e x, y, la scrittura abbreviata $W_1 \wedge \sqcap x W_2 \to \neg W_3$ si scrive in modo completo $((W_1 \wedge (\sqcap x W_2)) \to (\neg W_3))$; la $(x \lessdot a \wedge \neg(y \asymp z) \to \sqcap x \neg(\sqcup y W)) \to W_1$ si scrive in modo completo:

$$((((((x \lessdot a) \wedge (\neg(y \asymp z))) \to (\sqcap x(\neg(\sqcup y W))))) \to W_1).$$

4. Definizioni sintattiche Introduciamo una classificazione, per noi cruciale, riguardante, in particolare, le variabili e i quantificatori:
− *Scopo di un quantificatore*: Considerata una wff W contenente il simbolo $\sqcap x$ $(\sqcup x)$, lo scopo del quantificatore $\sqcap x$ $(\sqcup x)$ è la wff W_1, parte di W, che ha inizio con la parentesi aperta che segue immediatamente $\sqcap x$ $(\sqcup x)$ e termina con la parentesi chiusa ad essa corrispondente;[11]
− *Variabile quantificata*: Data una wff W, una variabile è quantificata se fa parte dello scopo di un quantificatore che opera su di lei.

Ad esempio, se W è la wff: $(\sqcap x(\sqcup y(x \asymp z \wedge y \lessdot a)))$, allora la variabile:
- x è quantificata: compare nello scopo del quantificatore $\sqcap x$, dato da $\sqcup y(x \asymp z \wedge y \lessdot a)$;
- y è quantificata: compare nello scopo del quantificatore $\sqcup y$, dato da $(x \asymp z \wedge y \lessdot a)$;
- z *non* è quantificata: non fa parte dello scopo di alcun quantificatore che la riguardi;

− *Enunciato*: Una wff W è un enunciato (in breve wfs[12]) se tutte le sue variabili sono quantificate;
− *Predicato*: Una wff W è un predicato se esistono nella sua struttura variabili *libere*, cioè non quantificate. Il predicato poi, si dice s-*ario* se ci sono solo s di tali variabili. Indicate le stesse con $x_1, \ldots, x_s$, scriviamo, talvolta, $W(x_1, \ldots, x_s)$ al posto di W per evidenziarne le variabili;
− *Quantificatore limitato*: Il quantificatore $\sqcap x$ è limitato se il suo scopo è del tipo $(x \lessdot c \to W)$, con c costante soggettiva. Il quantificatore $\sqcup x$ è limitato se il suo scopo è del tipo $(x \lessdot c \wedge W)$, con c costante soggettiva.

[11] Assegnando $+1$ a ogni parentesi aperta e -1 ad ogni parentesi chiusa, fissata una parentesi aperta, la parentesi chiusa ad essa corrispondente è quella in relazione alla quale la somma algebrica è, per la prima volta, zero.

[12] Dall'inglese *well formed sentence*.

Precisiamo che, nel seguito, al posto delle scritture $(\sqcap x(x \lessdot y \to W))$ e $(\sqcup x(x \lessdot y \wedge W))$, usiamo anche le notazioni abbreviate: $\sqcap x \lessdot y\, W$ e $\sqcup x \lessdot y\, W$, rispettivamente. Analogo discorso se al posto di y mettiamo la costante c.

Inoltre, adoperiamo una scrittura analoga anche quando più variabili sono quantificate con una stessa costante logica $\sqcap$ (o $\sqcup$) e sono vincolate alla medesima costante soggettiva o variabile. Quindi, ad esempio, nel caso di due variabili quantificate, scriviamo:

- $\sqcap x, y \lessdot a\, W$ invece di $\sqcap x(\sqcap y(x \lessdot a \wedge y \lessdot a \to W))$;
- $\sqcup x, y \lessdot z\, W$ invece di $\sqcup x(\sqcup y(x \lessdot z \wedge y \lessdot z \wedge W))$;

– *Formula limitata*: Una wff W con *tutti* i quantificatori limitati (enunciato o predicato limitato).

1.2.2 Semantica

Assegnando ai simboli dell'alfabeto opportuni significati mediante parole metalinguistiche, si viene ad introdurre una *interpretazione* del linguaggio formalizzato. Le wff si trasformano, infatti, in frasi metalinguistiche che possono riuscire comprensibili o meno.

Ovviamente, però, un'interpretazione avrà interesse solo se consentirà di ottenere nel linguaggio ordinario frasi significative, come appunto accade per quella che ora andiamo ad introdurre.

1. Interpretazione Interpretiamo il linguaggio formale L considerato con riferimento ad una sovrastruttura $\hat{U}$ (che rappresenta l'universo del discorso). Per ottenere ciò occorre premettere alcune puntualizzazioni e notazioni riguardanti l'alfabeto.

Circa le costanti soggettive, supponiamo che C sia di cardinalità non inferiore a quella di $\hat{U}$. Introdotta un'applicazione *iniettiva* τ di C in $\hat{U}$, detta $\hat{U}$-*codice* (o semplicemente *codice*, qualora non s'intenda specificare l'universo del discorso), possiamo attribuire alle costanti stesse il significato di "nomi" delle entità della sovrastruttura. Per quanto riguarda la loro notazione, le indichiamo con le prime lettere dell'alfabeto latino.

Per ogni wff W del linguaggio, W^τ è la frase che si ottiene da W sostituendo ogni costante soggettiva c di W con la sua immagine ${}^\tau c = \tau(c)$. Nella tabella seguente forniamo due esempi di τ-trasformazione di wff.

W	W^τ
$\sqcap y \lessdot a(\langle a, x, y\rangle \lessdot b \to y \asymp x)$	$\sqcap y \lessdot {}^\tau a(\langle {}^\tau a, x, y\rangle \lessdot {}^\tau b \to y \asymp x)$.
$\sqcap x \sqcup y \lessdot x\,(c \lessdot y \wedge \neg(c \asymp z))$	$\sqcap x \sqcup y \lessdot x\,({}^\tau c \lessdot y \wedge \neg({}^\tau c \asymp z))$

L'*interpretazione* $\imath_{\hat{U}}$ viene, a questo punto, definita assegnando alle costanti logiche e relazionali di L e allo schema $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle$ il significato seguente:

- $\lessdot$: $\in$ (appartiene); $\asymp$: $=$ (uguale); $\neg$: non; $\wedge$: e; $\vee$: o (vel);
- $\rightarrow$: $\Rightarrow$ (implica); $\leftrightarrow$: $\Leftrightarrow$ (biimplica);
- $\sqcap$: $\forall$ (per ogni, qualunque); $\sqcup$: $\exists$ (esiste, per qualche);
- $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_s \rangle$: $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ (s-pla di Kuratowski-Wiener);
- variabili: elementi generici di $\hat{U}$.

Tramite l'interpretazione ora delineata è possibile associare (via induzione e in modo unico) a ogni wff W del linguaggio una frase ${}^{\imath_{\hat{U}}}W^{\tau}$, del metalinguaggio relativo all'universo del discorso $\hat{U}$, nel modo seguente[13]:

- se W è una formula atomica, ${}^{\imath}W^{\tau}$ si ottiene sostituendo in W^{τ} le costanti relazionali e le eventuali variabili con le loro rispettive interpretazioni;
- ${}^{\imath}(\neg, W)^{\tau} = \neg\, {}^{\imath}W^{\tau}$;
- ${}^{\imath}(W_1 \wedge \mathrm{W}_2)^{\tau} = {}^{\imath}W_1{}^{\tau}$ e ${}^{\imath}W_2^{\tau}$, ${}^{\imath}(W_1 \vee W_2)^{\tau} = {}^{\imath}W_1^{\tau}$ o ${}^{\imath}W_2^{\tau}$;
- ${}^{\imath}(W_1 \rightarrow W_2)^{\tau} = {}^{\imath}W_1^{\tau} \Rightarrow {}^{\imath}W_2^{\tau}$, ${}^{\imath}(W_1 \leftrightarrow W_2)^{\tau} = {}^{\imath}W_1^{\tau} \Leftrightarrow {}^{\imath}W_2^{\tau}$;
- ${}^{\imath}(\sqcap x W(x))^{\tau} = \forall x \in \hat{U}\, {}^{\imath}W^{\tau}(x)$, ${}^{\imath}(\sqcup x W(x))^{\tau} = \exists x \in \hat{U}\, {}^{\imath}W^{\tau}(x)$,

avendo denotato con ${}^{\imath}W^{\tau}(x)$ la frase ${}^{\imath}(W(x)^{\tau})$.[14]

Nel seguito usiamo sempre interpretazioni di questo tipo; esse differiranno solamente per il codice τ e, eventualmente, per l'universo del discorso $\hat{U}$.

Concludiamo il paragrafo completando l'esempio precedente con l'introduzione della metafrase ${}^{\imath}W^{\tau}$.

W	${}^{\imath}W^{\tau}$
$\sqcap y \lessdot a(\langle a, x, y \rangle \lessdot b \rightarrow y \asymp x)$	$\forall y \in {}^{\tau}a(({}^{\tau}a, x, y) \in {}^{\tau}b \Rightarrow y = x)$ e $x, y \in \hat{U}$.
$\sqcap x \sqcup y \lessdot x\, (c \lessdot y \wedge \neg(c \asymp z))$	$\forall x \in \hat{U}\, \exists y \in x\, ({}^{\tau}c \in y$ e ${}^{\tau}c \neq z)$ e $y, z \in \hat{U}$

2. Verità in una interpretazione

Chiaramente, se W è un enunciato, il corrispondente ${}^{i}W^{\tau}$ è una proposizione della logica classica (cioè suscettibile di assumere uno e uno solo dei valori logici “Vero”, “Falso”). Conseguentemente, è immediato introdurre,

[13] Ove, per semplicità, denotiamo, qui e nel seguito (qualora non sia fonte di fraintendimento), con $\imath$ l'intepretazione $\imath_{\hat{U}}$)

[14] O, più in generale, ${}^{\imath}(W(x_1, \ldots, x_s)^{\tau})$ con ${}^{\imath}W^{\tau}(x_1, \ldots, x_s)$.

per gli enunciati di L, il concetto fondamentale di "verità" tramite la definizione:
– L'enunciato W di L è *vero* in $\hat{U}$ (via τ e $\imath_{\hat{U}}$), se e solo se il metaenunciato $^{\imath_{\hat{U}}}W^{\tau}$ è vero in $\hat{U}$.

Riuscirà comodo, nel seguito, indicare in modo abbreviato la frase "W è vera in $\hat{U}$ tramite il codice τ e l'interpretazione $\imath_{\hat{U}}$" con la notazione $\hat{U} \Vdash W^{\tau}$. Otteniamo allora che sussistono le proposizioni [15]:

1. $\hat{U} \Vdash (\neg W)^{\tau} \Leftrightarrow {}^{\imath}W^{\tau}$ è falso in $\hat{U}$;
2. $\hat{U} \Vdash (W_1 \wedge W_2)^{\tau} \Leftrightarrow \hat{U} \Vdash W_1^{\tau}$ e $\hat{U} \Vdash W_2^{\tau}$;
3. $\hat{U} \Vdash (W_1 \vee W_2)^{\tau} \Leftrightarrow \hat{U} \Vdash W_1^{\tau}$ o $\hat{U} \Vdash W_2^{\tau}$;
4. $\hat{U} \Vdash (W_1 \to W_2)^{\tau} \Leftrightarrow (\hat{U} \Vdash W_1^{\tau} \Rightarrow \hat{U} \Vdash W_2^{\tau})$;
5. $\hat{U} \Vdash (W_1 \leftrightarrow W_2)^{\tau} \Leftrightarrow (\hat{U} \Vdash W_1^{\tau} \Leftrightarrow \hat{U} \Vdash W_2^{\tau})$;
6. $\hat{U} \Vdash (\sqcap x W)^{\tau} \Leftrightarrow$ per ogni $u \in \hat{U}$ si ha $\hat{U} \Vdash W^{\tau}(u)$;
7. $\hat{U} \Vdash (\sqcup x W)^{\tau} \Leftrightarrow$ esiste $u \in \hat{U}$ tale che $\hat{U} \Vdash W^{\tau}(u)$.

Considerato infine un insieme $\mathcal{W} \neq \emptyset$ di wfs del linguaggio, la sovrastruttura $\hat{U}$ è un **modello** di $\mathcal{W}$ (rispetto τ) se $\hat{U} \Vdash W^{\tau}$ per ogni $W \in \mathcal{W}$.

Sinora abbiamo mantenuto una rigida distinzione tra le costanti soggettive di C, da una parte, e gli elementi dell'universo del discorso $\hat{U}$, dall'altra. Spesso però conviene, per semplicità di esposizione, assumere che gli elementi di C *coincidano* con le loro τ-immagini, cioè porre $C \subset U$ e τ l'applicazione identica i_C di C; in questo caso, adottiamo la notazione più snella $U \Vdash W$ al posto della $U \Vdash W^{\mathrm{i}_C}$.

[15]Ricordiamo che, per quanto riguarda i connettivi logici del metalinguaggio, risulta che: la congiunzione di due proposizioni è vera se e solo se entrambe le proposizioni sono vere; la disgiunzione è vera se e solo se almeno una delle proposizioni è vera; il condizionale è vero se e solo se il suo antecedente è falso oppure il suo conseguente è vero; il bicondizionale è vero se e solo se entrambe le proposizioni sono vere oppure entrambe sono false. Per quanto concerne invece i quantificatori: la quantificazione universale $\forall x\, P(x)$ è vera se e solo se la proposizione $P(c)$ è vera qualunque sia l'elemento c del dominio del metapredicato $P(x)$; la quantificazione esistenziale $\exists x\, P(x)$ è vera se e solo se la proposizione $P(c)$ è vera per qualche elemento c del dominio. Per quanto attiene infine la negazione: la negazione di una proposizione è vera se e solo se la proposizione è falsa.

Capitolo 2

Monomorfismi

Fissata una sovrastruttura di riferimento di base A, introduciamo il linguaggio formale L avente come insieme delle costanti soggettive la data sovrastruttura ($C = \hat{A}$). Scelta, inoltre, anche come universo del discorso ($\hat{U} = \hat{A}$), consideriamo, come codice l'applicazione identica $\mathrm{i}_{\hat{A}}$. Dato infine un insieme non vuoto $\mathcal{W} \neq \emptyset$ di wfs *limitate* di L, supponiamo che $\hat{A}$ sia un suo modello, che chiamiamo **modello standard**.

Ciò premesso, l'analisi nonstandard si occupa dello studio di ulteriori modelli di $\mathcal{W}$, che sono particolari estensioni proprie del modello standard.

Passando alla loro definizione, consideriamo, come secondo universo del discorso, una sovrastruttura di base B e un $\hat{B}$-codice $\star$. Si viene allora a configurare la situazione che possiamo riassumere nello schema:

$$\begin{array}{lcl} \hat{A} \text{ costanti soggettive di } L & \xrightarrow{\mathrm{i}_{\hat{A}}} & \hat{A} \;\; \text{I}^\circ \text{ universo del discorso} \\ \quad\quad\quad\quad \star\big\downarrow & & \\ \hat{B} \;\; \text{II}^\circ \text{ universo del discorso} & & \end{array}$$

Ciò posto, $\hat{B}$ è un **modello nonstandard** (di $\mathcal{W}$) se sussistono le proprietà:

1. $\hat{B} \Vdash W^\star \Leftrightarrow \hat{A} \Vdash W$ per ogni $W \in \mathcal{W}$;
2. $\star[\hat{A}] \subsetneqq \hat{B}$ e, in particolare, $\star[A] \subsetneqq {}^\star A$.

La prima condizione assicura che $\hat{B}$ è un modello di $\mathcal{W}$ e che sussiste il "trasporto"(nei due versi) della "verità": le interpretazioni di ogni wfs di $\mathcal{W}$ nei rispettivi universi del discorso sono entrambe vere o entrambe false. La seconda invece che $\hat{B}$ è un'estensione propria di $\hat{A}$, rappresentato in $\hat{B}$ da

$\star[\hat{A}]$, e che ${}^{\star}A$, a sua volta, è un'estensione propria di A, rappresentato in $\hat{B}$ da $\star[A]$.

Ora, una qualunque teoria matematica riguardante gli elementi di A verte, come già osservato nel primo capitolo, su entità di $\hat{A}$, e che suo fondamentale obiettivo è quello di determinare le proposizioni che sussistono in $\hat{A}$.

Assumiamo pertanto che $\mathcal{W}$ sia *l'insieme delle wfs limitate del linguaggio L vere in $\hat{A}$ con l'interpretazione $\imath_{\hat{A}}$*. Allora, se una proposizione è formalizzabile in modo limitato in L, per stabilire se sussista o meno, possiamo condurre l'indagine sia in $\hat{A}$, valendoci del $\hat{A}$-codice $\mathrm{i}_{\hat{A}}$ (**prova standard**), oppure in $\hat{B}$, con l'ausilio del $\hat{B}$-codice $\star$ (**prova nonstandard**).

I modelli nonstandard, dunque, *non conducono ad un ampliamento* di una assegnata teoria. Essi forniscono, però, nuovi strumenti d'indagine per lo studio della teoria medesima, i quali si rivelano più efficaci, spesso, degli usuali strumenti "standard".

Passiamo ora a una breve descrizione del contenuto del capitolo, che è dedicato, proprio, a fornire le principali proprietà dell'interpretazione $\star$ di un modello nonstandard $\hat{B}$. Nella prima sezione consideriamo due fondamentali sottoinsiemi di $\hat{B}$; quello $\star[\hat{A}]$ degli elementi *standard* e quello I degli elementi *interni* (entità che appartengono a elementi standard). Introduciamo poi la centrale nozione di *monomorfismo*, basata sul trasferimento della verità sopra delineato. Dopo averne elencato alcune proprietà elementari, assumiamo, per evitare di tener conto di situazioni del tutto irrilevanti, che il monomorfismo sia *stretto*, cioè sia tale che ogni insieme interno sia costituito solo da entità interne.

Introdotto accanto al linguaggio *standard* L quello *interno* L' $(C = I)$, passiamo nelle due sezioni successive a provare quattro teoremi d'isolamento (cardini della teoria) concernenti, i primi due, l'isolamento di sottoinsiemi interni in insiemi interni (con predicati limitati di L') e, gli altri, l'isolamento di sottoinsiemi standard in entità standard (con predicati limitati di L).

La quarta è invece dedicata allo studio delle entità che sono trasformate, via $\star$, di relazioni (in particolare applicazioni) di $\hat{A}$.

Dopo aver approfondito nella quinta le proprietà dell'insieme I che lo rendono una specie di sovrastruttura interna, affrontiamo nelle ultime due sezioni, rispettivamente, due particolari monomorfismi: le *immersioni* e gli *allargamenti*. Per quanto concerne questi ultimi, proviamo che, qualora l'entità sia infinita, assicurano che possiede entità interne nonstandard, fornendo, così, un punto di partenza per l'analisi infinitesimale. Concludiamo la sezione affrontando il problema dell'esistenza di immersioni strette allarganti, illustrandone, a grandi linee, la loro costruzione, alquanto complessa. Quest'ultima parte può, peraltro, essere del tutto tralasciata (da un lettore non particolarmente interessato all'argomento), in quanto non influisce minimamente sul seguito dell'esposizione.

2.1 Monomorfismi. Prime proprietà

Come messo in luce dalle brevi considerazioni sopra svolte, strumenti fondamentali per la risoluzione del problema degli ampliamenti nonstandard di un modello $\hat{A}$ sono:
− un linguaggio formalizzato L con costanti soggettive gli elementi di $\hat{A}$;
− il codice identico $\mathrm{i}_{\hat{A}}$ di L nell'universo del discorso $\hat{A}$;
− un $\hat{B}$-codice $\star$ di L relativo a una sovrastruttura di base B.

Prima di esporre le proprietà che vengono richieste al codice $\star$ per essere un monomorfismo, premettiamo tre definizioni fondamentali. Chiamiamo l'entità $b \in \hat{B}$:
− **standard** se esiste $a \in \hat{A}$ tale che $b = {}^\star a$;
− **interna** se è elemento di qualche entità propria standard, cioè $b \in {}^\star a$ per qualche $a \in \hat{A}$;
− **esterna** se non è interna, cioè b non è elemento di alcuna entità standard,
e indichiamo con $\mathcal{S}$ e $\mathcal{I}$ gli insiemi costituiti dalle entità standard e interne, rispettivamente.

Ciò premesso, assumiamo, d'ora in poi, che il codice $\star$ sia un **monomorfismo**, cioè tale che sussistano le due proprietà:

(a) ${}^\star\emptyset = \emptyset$;

(b) Per ogni wfs **limitata** W di L riesca:

$$\hat{A} \Vdash W \Leftrightarrow \hat{B} \Vdash W^\star \qquad (\textit{Principio di Leibniz}).$$

Il Principio di Leibniz (in breve PdL), com'è facile intendere e come apparirà chiaramente nel corso dell'esposizione, è la proprietà più rilevante dei monomorfismi, la vera chiave di volta per la risoluzione del problema degli ampliamenti nonstandard. Il principio afferma che la wfs limitata W di L è vera in $\hat{A}$, secondo il codice identico $\imath_{\hat{A}}$, se e solo se la wfs limitata $W^\star$ è vera in $\hat{B}$, secondo il codice identico $\imath_{\hat{B}}$. Possiamo anche esprimere ciò dicendo che *la frase* ${}^{\imath_{\hat{A}}}W$ *sussiste se solo se sussiste la frase* ${}^{\imath_{\hat{B}}}W^\star$.

La situazione descritta può essere riassunta tramite lo schema:

$$\begin{array}{ccccc} C=\hat{A} & W\,(\text{limitata}) & \xrightarrow{\ \star\ } & W^\star\,(\text{limitata}) & C=\hat{B} \\ & \left\downarrow{\scriptstyle \imath_{\hat{A}}}\right. & & \left\downarrow{\scriptstyle \imath_{\hat{B}}}\right. & \\ & \hat{A}\Vdash W & \xrightarrow{\ \Longleftrightarrow\ } & \hat{B}\Vdash W^\star & \end{array}$$

Il teorema seguente fornisce un primo elenco di proprietà dei monomorfismi. In particolare, usando un linguaggio un po' pittoresco, per la proposizione (ii) il contenuto della "scatola" a non viene "perduto" nella trasformazione che muta a nella "scatola"$^\star a$, imagine di a via $\star$; può caso mai, arricchirsi di nuovi elementi che non sono trasformati di elementi di a ed è proprio questa circostanza che consente un ampliamento nonstandard di $\hat{A}$. Per (iii) il monomorfismo $\star$ è un'applicazione monotona rispetto all'inclusione. Per (iv) la successione $(^\star A_n)_{n\geq 0}$ è nondecrescente. Per (vi) due entità standard con lo stesso contenuto standard sono uguali, e viceversa. Osserviamo, infine, che per (ii), $\star[a]$, in quanto sottoinsieme di un elemento di $\hat{B}$, appartiene a $\hat{B}$ e che, in generale, non è detto che sia un'entità standard.

Teorema 2.1.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $a_1 \in a_2 \Leftrightarrow {}^\star a_1 \in {}^\star a_2$;[1]

(ii) $\star[a] \subset {}^\star a$;

(iii) $a_1 \subset a_2 \Leftrightarrow {}^\star a_1 \subset {}^\star a_2$;

(iv) ${}^\star A_n \in {}^\star A_{n+1}$ *e* ${}^\star A_n \subset {}^\star A_{n+1}$;

(v) ${}^\star a_1 \subset {}^\star a_2 \Leftrightarrow \star[a_1] \subset \star[a_2]$;

(vi) ${}^\star a_1 = {}^\star a_2 \Leftrightarrow \star[a_1] = \star[a_2]$.

Dimostrazione. (i) Conseguenza di PdL applicato alla wfs limitata: $a_1 \lessdot a_2$.

(ii) Sia $b \in \star[a]$. Esiste allora $a_1 \in a$ tale che ${}^\star a_1 = b$ e quindi, per (i), $b \in {}^\star a$.

(iii) La frase $a_1 \subset a_2$ si formalizza nel linguaggio L mediante la wfs limitata: $\sqcap x \lessdot a_1\,(x \lessdot a_2)$. Ne segue, tramite PdL, $\forall x \in a_1 (x \in a_2) \Leftrightarrow \forall x \in {}^\star a_1 (x \in {}^\star a_2)$.

(iv) Conseguenza della definizione (1.1) di A_{n+1} e di (i) e (iii).

[1]Viene così giustificato il nome particolare che viene attribuito a $\star$; infatti, per (i), tale codice risulta un monomorfismo algebrico, quando $\hat{A}$ e $\hat{B}$ vengano considerate come due strutture relazionali, e precisamente $\hat{A}(=,\in)$ e $\hat{B}(=,\in)$.

(v) Sia ${}^\star a_1 \subset {}^\star a_2$. Allora, per (iii), $a_1 \subset a_2$ e quindi $\star[a_1] \subset \star[a_2]$. Viceversa, sia $\star[a_1] \subset \star[a_2]$. Preso $a' \in a_1$ riesce ${}^\star a' \in \star[a_2]$. Ne segue che esiste $a'' \in a_2$ tale che ${}^\star a'' = {}^\star a'$ e quindi $a' = a''$ da cui otteniamo $a' \in a_2$. Si ha allora $a_1 \subset a_2$ e quindi, tramite (iii), la tesi. □

Il teorema appena provato riguarda proprietà degli elementi standard. Vediamo ora, con il prossimo teorema, alcune proprietà degli elementi interni. In particolare, la prima proposizione, afferma che gli elementi di $\hat{B}$ si ripartiscono in elementi interni ed esterni e, a loro volta, gli interni in standard e non standard; inoltre, che l'insieme degli elementi interni $\mathcal{I} = \bigcup_{a\in\hat{A}} {}^\star a$ può ottenersi limitandosi a riunire gli insiemi della successione dei trasformati dei livelli di $\hat{A}$. La seconda assicura invece che ogni elemento di ${}^\star A$ è privo di elementi interni. *Ciò non significa però che esso sia un atomo di* $\hat{B}$; può, infatti, essere un'entità (necessariamente non vuota in quanto, per (a) e (i), $\emptyset = {}^\star\emptyset \notin {}^\star A$) *costituita solo da elementi esterni.* La terza infine rileva che ogni entità interna non vuota e non appartenente a ${}^\star A$ possiede elementi interni; possono, naturalmente, essere presenti anche elementi esterni.

Teorema 2.1.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{I} = \bigcup_{n\geq 0} {}^\star A_n = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\star A_n$;

(ii) $b \in {}^\star A \Rightarrow b \neq \emptyset$ *e* b *privo di elementi interni;*

(iii) $\emptyset \neq b \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \Rightarrow b$ *ha elementi interni;*

(iv) $b_1 \in \mathcal{I}$ *e* $b_1 \in b_2 \in {}^\star A_{n+1} \Rightarrow b_1 \in {}^\star A_n$;

(v) $b \in^\star A_{n+1} \Rightarrow$ *parte interna di* b *inclusa in* ${}^\star A_n$.

Dimostrazione. (i) Al fine di provare l'inclusione, sia b un elemento standard. Allora, $b = {}^\star a$ per qualche $a \in \hat{A}$. Esiste quindi n tale che $a \in A_n$. Ne segue, tramite il Teorema 2.1.1(i), $b = {}^\star a \in {}^\star A_n$ e quindi b è una entità interna.

Passando alla seconda parte della tesi, osservato che $\bigcup_{n\geq 0} {}^\star A_n \subset \bigcup_{a\in\hat{A}} {}^\star a = \mathcal{I}$, proviamo l'inclusione opposta. Sia dunque $b \in \mathcal{I}$. Esistono allora n e $a \in A_n$ tali che $b = {}^\star a$. Ne segue, per il Teorema 2.1.1(i), $b \in {}^\star A_n$. Da qui la tesi. L'ultima uguaglianza deriva dal fatto che la successione $({}^\star A_n)_{n\geq 1}$ è, per il Teorema 2.1.1(iv), nondecrescente.

(ii) Sia $b \in {}^\star A$. Assumiamo, per assurdo, $b = \emptyset$. Allora, per (a), ${}^\star\emptyset \in {}^\star A$ e quindi, tramite 2.1.1(i), la contraddizione $\emptyset \in A$.

Sia, ora, $b_1 \in \mathcal{I}$, proviamo che $b_1 \notin b$. Per (i), esiste n tale che $b_1 \in {}^\star A_n$. Consideriamo ora la proposizione vera in $\hat{A}$: "ogni elemento y di A è privo di elementi x appartenenti ad A_n", che si formalizza nel linguaggio L con la wfs limitata: $\sqcap y \lessdot A \sqcap x \lessdot A_n\, (\neg(x \lessdot y))$. Applicando PdL otteniamo che sussiste la frase: $\forall y \in {}^\star A\, \forall x \in {}^\star A_n\, (x \notin y)$. Essendo $b_1 \in {}^\star A_n$ si può scaricare il quantificatore $\forall x$ e ottenere la proposizione: $\forall y \in {}^\star A\, (b_1 \notin y)$. Poichè $b \in {}^\star A$, anche il quantificatore $\forall y$ può essere scaricato. Ne segue $b_1 \notin b$ e quindi la tesi.

(iii) Per il Teorema 1.1.1(ii), sussiste in $\hat{A}$ la frase: "ogni elemento di livello $n+1$ non vuoto e non atomo ha elementi di livello n", che è formalizzabile in L con la wff: $\sqcap y \lessdot A_{n+1}\, (\neg(y \asymp \emptyset) \wedge \neg(y \lessdot A) \to \sqcup x \lessdot A_n(x \lessdot y))$. Tramite PdL sussiste la frase: $\forall y \in {}^\star A_{n+1}(y \neq \emptyset \,\text{e}\, y \notin {}^\star A \Rightarrow \exists x \in {}^\star A_n(x \in y))$. Essendo $\emptyset \neq b \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$, possiamo scaricare il quantificatore ottenendo $\exists x \in {}^\star A_n(x \in b)$, cioè la tesi.

(iv) Essendo b_1 interno, per (i), esiste m tale che $b_1 \in {}^\star A_m$. Per il Teorema 1.1.1(i), sussiste la frase: $\forall y \in A_{n+1}\, \forall x \in A_m\, (x \in y \Rightarrow x \in A_n)$. Possiamo allora, formalizzandola in modo evidente in L, applicare PdL ottenendo che sussiste anche la proposizione: $\forall y \in {}^\star A_{n+1}\, \forall x \in {}^\star A_m (x \in y \Rightarrow x \in {}^\star A_n)$. Essendo $b_2 \in {}^\star A_{n+1}$, $b_1 \in {}^\star A_m$ e $b_1 \in b_2$, si possono scaricare sia i quantificatori che l'implicazione ottenendo $b_1 \in {}^\star A_n$.

(v) Segue immediatamente da (iv). $\square$

Riprendiamo in esame, alla luce dei teoremi sin qui dimostrati, la sovrastruttura $\hat{B}$, pensata come modello dell'insieme $\mathcal{W}$ precedentemente introdotto, cioè dell'insieme delle wfs limitate di L che sono vere in $\hat{A}$ secondo l'interpretazione identica di $\hat{A}$. Ricordiamo, in proposito, che la rappresentazione in $\hat{B}$, tramite il codice $\star$, di una wfs limitata di L, conduce ad una proposizione che riguarda entità standard ed entità appartenenti ad entità standard (cioè interne), le prime corrispondenti a costanti soggettive di $\hat{A}$ e le seconde a variabili, che sono però sotto l'azione di quantificatori limitati. Poichè, per il Teorema 2.1.2(i), ogni entità standard è anche interna, ne segue che la frase in questione riguarda solo entità interne di $\hat{B}$. Conseguentemente, ad una wfs di L viene associata, mediante $\star$, la medesima proposizione, sia che s'interpreti la wfs in $\hat{B}$, oppure nel più ristretto universo $\mathcal{I}$ delle entità interne. Ora, se W appartiene a $\mathcal{W}$, sappiamo che sussiste la frase ${}^{\imath_{\mathcal{I}}}W^\star$. Quanto precede ci permette allora di concludere che W è vera in $\mathcal{I}$, tramite il codice $\star$ e l'interpretazione $\imath_{\mathcal{I}}$; cioè che anche $\mathcal{I}$ è *un modello di* $\mathcal{W}$.

$$\begin{tikzcd} C=\hat{A} & W\,(\text{limitata}) \arrow[rr, "\star"] \arrow[d, "\imath_{\hat{A}}"'] & & W^\star\,(\text{limitata}) \arrow[d, "\imath_{\mathcal{I}}"] & C=\mathcal{I} \\ & \hat{A} \Vdash W & & \mathcal{I} \Vdash W^\star \arrow[ll, "\Longleftrightarrow"'] & \end{tikzcd}$$

Le considerazioni svolte mettono altresì in evidenza che lo studio di $\hat{B}$ (o di $\mathcal{I}$ dopo quanto detto) come modello di $\mathcal{W}$, porta a considerare solo proprietà di elementi interni mentre gli elementi esterni sono totalmente ignorati. In questo contesto, pertanto, la presenza di eventuali elementi esterni in entità interne non ha alcuna rilevanza. Essa ha però dei riflessi su tutti gli enunciati che esprimono proprietà di elementi di entità interne. Infatti, dovendo tali enunciati fare riferimento solo ad elementi dell'insieme $\mathcal{I}$, è necessario in essi specificare che detti elementi sono interni. Queste osservazioni rendono evidente che riuscirà più comodo studiare l'analisi nonstandard mediante monomorfismi che escludano la presenza, non essenziale, di elementi esterni in entità interne; e ciò perchè le proprietà degli elementi di $\mathcal{I}$ si potranno in tal caso esprimere con metafrasi generalmente più semplici, potendo omettere spesso la specifica "interno".

Dunque, per tali motivi, d'ora in poi *considieriamo solo monomorfismi* **stretti**; cioè *monomorfismi tali che assicurano che ogni entit*à *interna sia priva di elementi esterni.*

In questa ipotesi il Teorema 2.1.2 può essere riformulato più semplicemente come appare dal teorema seguente.

Teorema 2.1.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathcal{S} \subset \mathcal{I} = \bigcup_{n\geq 0} {}^\star A_n = \lim\limits_{n\to\infty} {}^\star A_n$;

(ii) $b \in {}^\star A \Rightarrow b \in B$, *cioè* b *è un atomo interno di* $\hat{B}$;

(iii) $b \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \Rightarrow b$ *entità propria interna;*

(iv) $b_1 \in b_2 \in {}^\star A_{n+1} \Rightarrow b_1 \in {}^\star A_n$;

(v) $b \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \Rightarrow b \subset {}^\star A_n$.

2.2 Teorema d'isolamento interno

La condizione di strettezza dei monomorfismi, introdotta al termine della sezione precedente, assicura, per definizione, che ogni elemento di un'entità interna è interno. Questa notevole proprietà non assicura, però, che siano interni anche i sottoinsiemi di un'entità interna (in particolare standard). Poichè un'entità interna è elemento di $\hat{B}$, che è una sovrastruttura, quello che possiamo dire è che i suoi sottoinsiemi sono entità di $\hat{B}$. Non siamo, però, in grado di precisare, in generale, se essi sono interni o esterni. Proveremo infatti che esistono monomorfismi stretti in corrispondenza ai quali è possibile trovare sottoinsiemi esterni in entità interne infinite (Sezione 2.7). Di questa proprietà godono, anzi, tutti i monomorfismi che conducono a modelli nonstandard di $\mathcal{W}$ ($\star[\hat{A}] \subsetneqq \hat{B}$), che sono poi i monomorfismi che veramente interessano.

Queste considerazioni lasciano intendere quanto sia importante, per la continuazione dello studio del modello $\mathcal{I}$, poter disporre di modi di "collezionare"elementi di entità di $\mathcal{I}$ che, da un lato garantiscano la costruzione di sottoinsiemi interni, più in particolare di sottoinsiemi standard, dall'altra siano di facile applicazione a situazioni piuttosto generali.

A queste esigenze rispondono quattro teoremi fondamentali. I primi due si interessano dell'isolamento di sottoinsiemi interni in entità interne, i secondi dell'isolamento di sottoinsiemi standard in entità standard. Dei primi ci occupiamo in questa sezione e dei secondi nella prossima.

Veniamo ora al primo di tali teoremi. Indichiamo con L' il linguaggio formalizzato che ha come insieme delle costanti soggettive $\mathcal{I}$ ($C = \mathcal{I}$) e, a differenza di L, come universo del discorso non una sovrastruttura, ma l'insieme I; linguaggio che interpretiamo tramite il codice identico $\mathrm{i}_{\mathcal{I}}$.

Teorema 2.2.1. *Sia $b \in {}^\star A_{n+1}$ e $W'(x)$ un predicato unario limitato di L'. Riesce allora $\{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'(e)\} \in {}^\star A_{n+1}$.*

Dimostrazione. Siano $c_1, \ldots, c_s$ le costanti soggettive di $W'(x)$ e m, esistente per i Teoremi 2.1.3(i) e 2.1.1(iv), tale che $c_i \in {}^\star A_{m+1}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Con riferimento alle sottoformule ben formate che compongono la $W'(x)$, consideriamo ora la wff $W_1'(x)$ di L' che si ottiene sostituendo ogni wff, che appare nella $W'(x)$, del tipo :

- $\sqcap y \lessdot c_h(W_h')$ con la wff: $\sqcap y \lessdot {}^\star A_m(y \lessdot c_h \to W_h')$;
- $\sqcup y \lessdot c_h(W_h')$ con la wff: $\sqcup y \lessdot {}^\star A_m(y \lessdot c_h \wedge W_h')$.

Per la wff che così si ottiene risulta che:

- W_1' è una wff *limitata.* È stata ottenuta, infatti, sostituendo ogni quantificatore della $W'(x)$, limitato per ipotesi, con uno limitato, precisamente su ${}^\star A_m$;
- *Le interpretazioni in $\mathcal{I}$ delle $W'(x)$ e $W_1'(x)$ sono equivalenti.*[2] Ciò è conseguenza del fatto che le sostituzioni sono state effettuate rimpiazzando sottoformule di $W'(x)$ con sottoformule equivalenti. Proviamo, infatti, che, per quanto riguarda

[2]Due metapredicati $X_1(x_1, \ldots, x_s), X_2(x_1, \ldots, x_s)$ sono equivalenti se, qualunque siano gli enti $e_1, \ldots, e_s$ del loro comune dominio, risulta $X_1(e_1, \ldots, e_s) \Leftrightarrow X_2(e_1, \ldots, e_s)$.

la prima sostituzione, le rispettive interpretazioni: $\forall y \in \hat{A}\,(y \in c_h \Rightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W'_h)$ e $\forall y \in {}^\star A_m(y \in c_h \Rightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W'_h)$ sono equivalenti. Se c_h è un atomo, entrambe le metafrasi sussistono, perchè è falso l'antecedente della comune implicazione. Se invece c_h è un'entità propria, $\forall y \in {}^\star A_m(y \in c_h \Rightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W'_h)$ è, evidentemente, equivalente alla $\forall y \in {}^\star A_m \cap c_h{}^{\imath\mathcal{I}}W'_h$ che coincide, essendo ${}^\star A_m \cap c_h = c_h$ (Teorema 2.1.3(v)), con la $\forall y \in \hat{A}\,(y \in c_h \Rightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W'_h)$. Analogamente si prova l'equivalenza delle due sottoformule interessate alla seconda sostituzione.

Da quanto provato risulta allora:

$$\{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'(e)\} = \{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'_1(e)\}.$$

Basta pertanto provare che appartiene a ${}^\star A_{n+1}$ il secondo insieme. Consideriamo allo scopo la wff che si ottiene dalla $W'_1(x)$ sostituendo *ogni* costante soggettiva c_i con la variabile x_i.[3] Otteniamo allora un predicato $(s+1)$-ario con unica costante soggettiva ${}^\star A_m$. Sostituendo, infine, ${}^\star A_m$ con A_m si ottiene una wff limitata di L, che indichiamo con $W_1(x, x_1, \ldots, x_s)$.

Ciò posto, dati $a \in A_{n+1}$ e $a_i \in A_{m+1}$ $(i = 1, \ldots, s)$, gli elementi dell'insieme $a' = \{d \in a \,|\, \hat{A} \Vdash W_1(d, a_1, \ldots, a_s)\} \subset a$, appartengono, per il Teorema 1.1.1(i), tutti ad A_n e quindi $a' \in A_{n+1}$. Di conseguenza, nel linguaggio L, viene caratterizzato dalla wfs limitata: $\sqcap z \lessdot A_n(z \lessdot a' \leftrightarrow z \lessdot a \wedge W_1(z, a_1, \ldots, a_s))$.

Poichè $a' \in A_{n+1}$, sussiste la proposizione:

$$\forall a \in A_{n+1}\, \forall a_1, \ldots, a_s \in A_{m+1}, \exists a' \in A_{n+1}\, (a' = \{d \in a \,|\, \hat{A} \Vdash W_1(d, a_1, \ldots, a_s)\},$$

che nel linguaggio L si formalizza con la wfs limitata:

$$\sqcap x \lessdot A_{n+1} \sqcap x_1 \ldots, x_s \lessdot A_{m+1} \sqcup y \lessdot A_{n+1} \sqcap z \lessdot A_n(z \lessdot y \\ \leftrightarrow z \lessdot x \wedge W_1(z, x_1, \ldots, x_s)).$$

Tramite PdL sussiste allora la frase:

$$\forall x \in {}^\star A_{n+1}\, \forall x_1 \ldots, x_s \in {}^\star A_{m+1}\, \exists y \in {}^\star A_{n+1}\, \forall z \in {}^\star A_n(z \in y \\ \Leftrightarrow z \in x \,\mathrm{e}\, {}^{\imath\mathcal{I}}W_1^\star(z, x_1, \ldots, x_s)).$$

Poichè $b \in {}^\star A_{n+1}$ e $c_i \in {}^\star A_{m+1}$ $(i = 1, \ldots, s)$, scaricando i rispettivi quantificatori, otteniamo che sussiste la proposizione:

$$\exists y \in {}^\star A_{n+1} \forall z \in {}^\star A_n(z \in y \Leftrightarrow z \in b \,\mathrm{e}\, {}^{\imath\mathcal{I}}W_1^\star(z, c_1, \ldots, c_s)).$$

Esiste dunque $c \in {}^\star A_{n+1}$ tale che $\forall z \in {}^\star A_n(z \in c \Leftrightarrow z \in b \,\mathrm{e}\, {}^{\imath\mathcal{I}}W_1^\star(z))$. Osservato che, per il Teorema 2.1.3(v), $b \subset {}^\star A_n$ si ha $c = \{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'_1(e)\} \in {}^\star A_{n+1}\}$. $\square$

[3]Va sottintesa l'ipotesi che le variabili x_i non compaiano già nella $W'_1(x)$.

Ricordando che $\mathcal{I} = \bigcup_{n\geq 0} {}^\star A_n$ (Teorema 2.1.3(i)), risulta, per il Teorema 2.1.1(iv), che per ogni b interno esiste n tale che $b \in {}^\star A_{n+1}$. Si ottiene allora come corollario il teorema seguente.

Teorema 2.2.2 (d'isolamento interno (Keisler)). *Sia $b \in \mathcal{I}$ e $W'(x)$ un predicato unario limitato di L'. Allora, l'insieme $\{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash {}^iW'(e)\}$ è un'entità interna.*

Questo teorema fornisce una caratterizzazione degli insiemi interni. Può essere, infatti, banalmente invertito; basta osservare che se b è interno, lo si può isolare con la wff di L' limitata: $x \lessdot b$.

Particolarizzando opportunamente la wff $W'(x)$ che compare nel Teorema 2.2.1, possiamo ottenere proprietà di chiusura analoghe a quelle stabilite per le sovrastrutture nel paragrafo 1.1.1 del capitolo precedente. Nel teorema seguente, le proposizioni (ii), (iii), (vii) sono analoghe, nell'ordine, alle (iv), (v), (vi) del Teorema 1.1.1, mentre la proposizione (v) è analoga alla (i) del Teorema 1.1.2. Esse assicurano che unioni e intersezioni di entità interne prive di atomi sono interne e che collezionando, unendo e intersecando un numero finito di entità interne si ottiene ancora un'entità interna. La proposizione (i) invece assicura che differenze di entità interne sono ancora entità interne. Ci si può chiedere, a questo punto, se questi risultati siano invertibili; ovvero, se a fronte di un risultato interno sia possibile concludere che anche gli operandi lo sono. Al quesito si risponde, in generale, negativamente per la differenza, l'intersezione e l'unione. La risposta è invece positiva, grazie alle proposizioni (iii), (iv) e (vi), per quanto riguarda le s-ple ordinate o no.

Teorema 2.2.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $b_1, b_2 \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \Rightarrow b_1 \setminus b_2 \in {}^\star A_{n+1}$;

(ii) $b \in {}^\star A_{n+2} \setminus {}^\star A$ *e* $b \cap {}^\star A = \emptyset \Rightarrow \bigcap b, \bigcup b \in {}^\star A_{n+1}$;

(iii) $b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_n \Leftrightarrow \{b_1, \dots, b_s\} \in {}^\star A_{n+1}$;

(iv) $b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_n \Rightarrow (b_1, \dots, b_s) \in {}^\star A_{n+2s-2}$;

(v) $(b_1, \dots, b_s) \in \mathcal{I} \Rightarrow (b_1, \dots, b_s) \in {}^\star A_{n+2s-2}$ *per qualche n;*

(vi) $(b_1, \dots, b_s) \in {}^\star A_{n+2s-2}$ *e* $s \geq 2 \Rightarrow b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_{n+2s-4}$;

(vii) $b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \Rightarrow b_1 \cap \dots \cap b_s,\ b_1 \cup \dots \cup b_s \in {}^\star A_{n+1}$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che le dimostrazioni delle proposizioni (i)÷(iii) fanno ricorso al Teorema 2.2.1.

(i) Riesce $b_1 \setminus b_2 = \{e \in b_1 \,|\, \mathcal{I} \Vdash \neg(e \lessdot b_2)\}$.

(ii) Siccome per il Teorema 2.1.2(ii),(iii), tutti gli atomi interni sono in ${}^\star A$, le ipotesi dicono che b è un'entità propria priva di atomi. Ha senso quindi considerare l'intersezione $\bigcap b$. Tenuto conto del Teorema 2.1.2(iv), gli elementi dell'intersezione appartengono ad ${}^\star A_n$ e quindi $\bigcap b = \{e \in {}^\star A_n \,|\, \mathcal{I} \Vdash \sqcap y \lessdot b(e \lessdot y)\}$. Per quanto riguarda l'unione $\bigcup b$, con considerazioni analoghe si ottiene $\bigcup b = \{e \in {}^\star A_n \,|\, \mathcal{I} \Vdash \sqcup y \lessdot b(e \lessdot y)\}$.

(iii) Riesce $\{b_1, \dots, b_s\} = \{e \in {}^\star A_n \,|\, \mathcal{I} \Vdash x \asymp b_1 \vee \cdots \vee x \asymp b_s\}$.

(iv) Procediamo per induzione su s. Per $s = 1$ risulta $(a_1) = a_1$ e quindi la tesi. Per $s \geq 1$, supponiamo, per induzione, $\vec{b} \in {}^\star A_{n+2s-2}$. Per definizione risulta $(b_1, \dots, b_{s+1}) = \{\{\vec{b}\}, \{\vec{b}, b_{s+1}\}\}$. Ora, per (iii), $\{\vec{b}\} \in {}^\star A_{n+2s-1}$ e quindi, per il Teorema 2.1.3(iv), $\vec{b} \in {}^\star A_{n+2s-2}$. Osservato poi che, per il Teorema 2.1.3(iv), $b_s \in {}^\star A_n \subset {}^\star A_{n+2s-2}$ risulta, Per (iii), $\{\vec{b}, b_s\} \in {}^\star A_{n+2s-1}$ e dunque, sempre per (iii), $(b_1, \dots, b_{s+1}) \in {}^\star A_{n+2s} = {}^\star A_{n+2(s+1)-2}$.

(v) Essendo interna, la s-pla appartiene, per il Teorema 2.1.3(i), a ${}^\star A_n$ per qualche n e quindi, per il Teorema 2.1.1(iv), a ${}^\star A_{n+2s-2}$, essendo $n \leq n + 2s - 2$.

(vi) Procediamo per induzione su s. Per s = 2 riesce $(b_1, b_2) = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\} \in {}^\star A_{n+2}$ da cui, per il Teorema 2.1.3(iv), $\{b_1, b_2\} \in {}^\star A_{n+1}$ e quindi, sempre per il medesimo teorema, $b_1, b_2 \in {}^\star A_n = {}^\star A_{n+2s-4}$. Assumiamo ora che la tesi valga per ogni s-pla di ${}^\star A_{n+2s-2}$ e proviamola per ogni $(s+1)$-upla di ${}^\star A_{n+2(s+1)-2} = {}^\star A_{n+2s}$. Dalla $(b_1, \dots, b_{s+1}) = \{\{\vec{b}\}, \{\vec{b}, b_{s+1}\}\} \in {}^\star A_{n+2s}$ riesce $\{\vec{b}, b_{s+1}\} \in {}^\star A_{n+2s-1}$ da cui otteniamo $\vec{b}, b_{s+1} \in {}^\star A_{n+2s-2}$ e quindi, per l'ipotesi induttiva, $b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_{n+2s-4} \subset {}^\star A_{n+2s-2}$. Dunque, tutte le componenti della $(n+1)$-upla appartengono a ${}^\star A_{n+2s-2} = {}^\star A_{n+2(s+1)-4}$.

(vii) Osservato che $a_1 \cap \cdots \cap a_s = \bigcap\{a_1, \dots, a_s\}$ e $a_1 \cup \cdots \cup a_s = \bigcup\{a_1, \dots, a_s\}$, la tesi segue da (iii). $\square$

2.3 Teorema d'isolamento standard

Passiamo ora a considerare gli altri due teoremi fondamentali, di cui abbiamo fatto cenno in premessa del presente capitolo; trattasi di due teoremi che riguardano l'isolamento di sottoinsiemi standard in entità standard.

Con riferimento al primo, consideriamo l'entità propria a di $\hat{A}$ e un predicato unario limitato $W(x)$ di L; indichiamo, quindi, con E l'insieme degli elementi e di a tali che sussista ${}^{\imath}\!{}_{\hat{A}} W(e)$, cioè l'entità di $\hat{A}$ isolata in a dalla wff $W(x)$. Essendo $E \in \hat{A}$ ha senso ${}^\star E$, imagine di E secondo $\star$. Il prossimo teorema assicura che ${}^{\star}E$ coincide con il sottoinsieme isolato in ${}^{\star}a$ dalla wff $W^{\star}(x)$ di L', fornendo dunque un "modo di collezionare" elementi di un insieme standard per ottenere insiemi che siano entità standard.

Teorema 2.3.1. *Siano a un'entità propria di $\hat{A}$ e $W(x)$ un predicato unario limitato di L. Posto allora $E = \{e \in a \,|\, \hat{A} \Vdash W(e)\}$, otteniamo ${}^{\star}E = \{e \in {}^{\star}a \,|\, \mathcal{I} \Vdash W^{\star}(e)\}$.*

Dimostrazione. La dimostrazione si consegue via PdL, caratterizzando l'insieme E in $\hat{A}$ mediante una wff limitata. A tal fine, osserviamo intanto che l'insieme E può essere caratterizzato dal metaenunciato: $\forall x(x \in E \Leftrightarrow x \in a \,\mathrm{e}\, {}^{\imath_{\hat{A}}}W(x))$. Tenuto ora conto che a è un'entità propria di $\hat{A}$, esiste un indice n tale che $a \in A_{n+1}$ e quindi E appartiene, per il Teorema 1.1.1(iii), ad A_{n+1}. Allora, per il Teorema 1.1.1(ii), a e E sono sottoinsiemi di A_n. Il metaenunciato precedente può dunque esprimersi, in modo equivalente, con la wff:

$$\sqcap x \lessdot A_n(x \lessdot E \leftrightarrow x \lessdot a \wedge W(x))$$

che caratterizza, in modo limitato, nel linguaggio L l'insieme E. Applicando PdL si ottiene allora che sussiste il metaenunciato:

$$\forall x \in {}^{\star}A_n(x \in {}^{\star}E \Leftrightarrow x \in {}^{\star}a \,\mathrm{e}\, {}^{\imath_{\mathcal{I}}}W^{\star}(x)).$$

Ne segue la tesi, notato che, per il Teorema 2.1.1(iii), ${}^{\star}a$, ${}^{\star}E \subset {}^{\star}A_n$. □

Il prossimo teorema, corollario del teorema precedente, afferma, in particolare, che usando il linguaggio standard si viene ad isolare in ogni entità standard *solamente* sottoinsiemi standard.

Teorema 2.3.2 (d'isolamento standard). *Siano b un'entità propria standard e $W'(x)$ un predicato limitato unario di L' con tutte le costanti soggettive standard. Allora l'insieme $\{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'(e)\}$* è *standard.*

Dimostrazione. Essendo le costanti soggettive di $W'(x)$ standard, possiamo considerare il predicato limitato unario di L, $W_1(x)$, che si ottiene sostituendo in $W'(x)$ le costanti soggettive con le loro controimagini via $\star$. Sia inoltre $b = {}^{\star}a$. Posto $E = \{e \in a \,|\, \hat{A} \Vdash W_1(e)\}$, si ottiene, per il Teorema 2.3.1, ${}^{\star}E = \{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W_1^{\star}(e)\} = \{e \in b \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'(e)\}$. □

Il Teorema 2.3.1 è lo strumento fondamentale per lo studio delle entità standard e delle loro proprietà. Consente, infatti, di "tradurre" note proprietà di entità di $\hat{A}$, in proprietà delle corrispondenti imagini standard di $\mathcal{I}$, a patto, ben inteso, che dette proprietà vengano espresse in modo limitato nel linguaggio L. Applicando questa tecnica è facile provare, ad esempio, il teorema seguente nel quale le proposizioni (i),(ii),(v),(vi) e (iii),(iv) sono ordinatamente analoghe a quelle relative al Teorema 2.2.3(i)÷(iv) e (vii). Allora si trattava, preliminarmente, di caratterizzare un'entità interna in modo limitato nel linguaggio L' ed applicare quindi il Teorema d'isolamento interno 2.2.2. Qui si tratta invece di caratterizzare in modo limitato un'entità di $\hat{A}$ nel linguaggio L e applicare il Teorema 2.3.1, onde trovare, conseguentemente, la caratterizzazione della corrispondente entità standard.

Teorema 2.3.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $a_1, a_2 \in A_{n+1} \setminus A \Rightarrow {}^\star(a_1 \setminus a_2) = {}^\star a_1 \setminus {}^\star a_2$;

(ii) $a \in A_{n+2} \setminus A$ *e* $a \cap A = \emptyset \Rightarrow {}^\star(\cap a) = \cap {}^\star a$ *e* ${}^\star(\cup a) = \cup {}^\star a$;

(iii) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \setminus A \Rightarrow {}^\star(a_1 \cap \cdots \cap a_s) = {}^\star a_1 \cap \cdots \cap {}^\star a_s$;

(iv) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \setminus A \Rightarrow {}^\star(a_1 \cup \cdots \cup a_s) = {}^\star a_1 \cup \cdots \cup {}^\star a_s$;

(v) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \Rightarrow {}^\star\{a_1, \ldots, a_s\} = \{{}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s\}$;

(vi) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \Rightarrow {}^\star(a_1, \ldots, a_s) = ({}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s)$;

(vii) $a \in A_{n+1} \setminus A \Rightarrow {}^\star\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}({}^\star a) \cap \mathcal{I}$;

(viii) *Gli elementi di* ${}^\star a \setminus \star[a]$ *sono non standard;*

(ix) $a_1 \subset a_2 \Rightarrow {}^\star a_1 \setminus \star[a_1] \subset {}^\star a_2 \setminus \star[a_2]$.

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda le dimostrazioni, ci limitiamo, talvolta, ad indicare solamente la wff $W(x)$ di L che caratterizza l'insieme in oggetto.

(i) $W(x) : x \lessdot a_1 \wedge \neg(x \lessdot a_2)$.

(ii) $W(x) : \sqcap y \lessdot a\,(x \lessdot y)$ e $W(x) : \sqcup y \lessdot a\,(x \lessdot y)$, rispettivamente.

(iii) $W(x) : x \lessdot a_1 \wedge \cdots \wedge x \lessdot a_s$.

(iv) $W(x) : x \lessdot a_1 \vee \cdots \vee x \lessdot a_s$.

(v) Procediamo per induzione. Per $n = 1$ basta considerare $W(x) : x \asymp a_1$. Osservato a questo punto che $\{a_1, \ldots, a_s\} = \bigcup_{i=1}^{s}\{a_i\}$, la tesi, per n qualunque, è conseguenza di (iv).

(vi) Basta ricordare che $(a_1, a_2) = \{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}\}$ e quindi, per $n = 2$, la tesi segue da (v). Da qui, per induzione, si ha la tesi per n generico.

(vii) Riesce:

$$\mathbb{P}(a) = \{e \in A_{n+1} \,|\, e \subset a\} = \{e \in A_{n+1} \,|\, \hat{A} \Vdash \neg(e \lessdot A) \wedge \sqcap x \lessdot A_n(x \lessdot e \to x \lessdot a)\}$$

da cui, tramite (i) e il Teorema 2.3.1, otteniamo

$$^\star\mathbb{P}(a) = \{e \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \,|\, \forall x \in {}^\star A_n(x \in e \Rightarrow x \in {}^\star a)\}.$$

Ora, dalla $e \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$ si ha, per il Teorema 2.1.3(v), che gli elementi di e sono tutti in ${}^\star A_n$; quindi ${}^\star\mathbb{P}(a) = \{e \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \,|\, e \subset {}^\star a\}$. Pertanto ${}^\star\mathbb{P}(a)$ è l'entità che ha come elementi *tutti e soli* i sottoinsiemi di ${}^\star a$ appartenenti a ${}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$, ovvero a ${}^\star A_{n+1}$, visto che, in quanto entità proprie, tali elementi non possono essere atomi. Conseguentemente ${}^\star\mathbb{P}(a) = \mathbb{P}({}^\star a) \cap {}^\star A_{n+1} \subset \mathbb{P}({}^\star a) \cap \mathcal{I}$.

Per provare l'inclusione opposta basta, evidentemente, constatare che *ogni sottoinsieme interno* di ${}^\star a$ appartiene a ${}^\star A_{n+1}$. Sia dunque $b \in \mathbb{P}({}^\star a) \cap \mathcal{I}$. Essendo b un'entità interna propria, si ha, per il Teorema 2.1.3(i),(ii), $b \in {}^\star A_{m+1} \setminus {}^\star A$, per qualche $m \geq 0$.

Ora in A sussiste, per il Teorema 1.1.1(iii), il metaenunciato "ogni elemento di $A_{m+1} \setminus A$, sottoinsieme di a, appartiene ad A_{n+1}", che può essere inteso come l'interpretazione della wfs limitata di L:

$$\sqcap y \lessdot A_{m+1}\,(\neg(y \lessdot A) \to (\sqcap x \lessdot A_m(x \lessdot y \to x \lessdot a) \to y \lessdot A_{n+1})).$$

Tramite PdL otteniamo allora

$$\forall y \in {}^\star A_{m+1} \setminus {}^\star A\,(\forall x \in {}^\star A_m(x \in y \Rightarrow x \in {}^\star a) \Rightarrow y \in {}^\star A_{n+1}).$$

Poichè $b \in {}^\star A_{m+1} \setminus {}^\star A$, scaricando il primo quantificatore universale, otteniamo $\forall x \in {}^\star A_m(x \in b \Rightarrow x \in {}^\star a) \Rightarrow b \in {}^\star A_{n+1})$ e quindi, per il Teorema 2.1.3(iv), ogni elemento di b appartiene a ${}^\star A_m$. Ne segue, scaricando il secondo quantificatore, $b \subset {}^\star a \Rightarrow b \in {}^\star A_{n+1}$ e quindi, essendo per ipotesi $b \subset {}^\star a$, risulta $b \in {}^\star A_{n+1}$.

(viii) E' sufficiente provare che se $b \in {}^\star a$ è standard riesce $b \in \star[a]$. Sia allora $b = {}^\star a_1$ con $a_1 \in \hat{A}$. Dalle (iv), (v) risulta ${}^\star(a \cup \{a_1\}) = {}^\star a \cup \{{}^\star a_1\} = {}^\star a \cup \{b\} = {}^\star a$. Ne segue $a \cup \{a_1\} = a$ e quindi $a_1 \in a$, cioè $b \in \star[a]$.

(ix) Sia $b \in {}^\star a_1 \setminus \star[a_1]$. Per il Teorema 2.1.1(iii), ${}^\star a_1 \subset {}^\star a_2$ da cui otteniamo $b \in {}^\star a_2$; inoltre, per (viii), b non è standard e quindi $b \notin \star[a_2]$. □

Il teorema appena provato si presta ad alcune interessanti considerazioni. La proposizione (v) assicura intanto che se si colleziona un numero finito di elementi di $\hat{A}$, la "scatola" così ottenuta non si arricchisce per effetto della trasformazione; vale a dire il numero degli elementi della "scatola" trasformata rimane il medesimo. Sempre la (v) mostra poi che se si colleziona in $\mathcal{I}$

un numero finito di entità standard $b_1, \dots, b_s$ si ottiene un'entità standard; basta, per questo, considerare l'entità $\{a_1, \dots, a_s\}$, con ${}^\star a_i = b_i$ $(i = 1, \dots, s)$. La (vi) puntualizza che ogni s-pla con termini standard è standard. La (vii) afferma che il trasformato ${}^\star\mathbb{P}(a)$ dell'insieme potenza dell'entità propria a è l'insieme che ha come elementi *solo* i sottoinsiemi interni dell'entità trasformata ${}^\star a$. La (viii) afferma che quando una "scatola" si arricchisce nella trasformazione, gli elementi che si aggiungono sono effettivamente "nuovi"; non sono cioè trasformati di elementi di $\hat{A}$. La (ix) assicura infine che se $a_1 \subset a_2$ gli elementi nonstandard di ${}^\star a_1$ restano nonstandard anche per ${}^\star a_2$. Inoltre, le proposizioni (i) $\div$ (vi) mettono in evidenza che se gli operandi delle operazioni considerate sono standard, il corrispondente risultato è standard.

Ci si può chiedere, a questo punto, se tali proposizioni sono invertibili, cioè, se a fronte di un risultato standard è possibile concludere che anche gli operandi sono standard. La risposta è, in generale, negativa per le operazioni di differenza, intersezione e unione. È positiva invece per le altre. Sussiste infatti, in proposito, il teorema seguente che precisa che le entità standard finite posseggono soltanto elementi standard, come pure le s-ple standard, qualunque sia la loro dimensione.

Teorema 2.3.4. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Se $\{b_1, \dots, b_s\}$ è *standard, allora lo sono anche* $b_1, \dots, b_s$*;*

(ii) Se $(b_1, \dots, b_s)$ è *standard, allora lo sono anche* $b_1, \dots, b_s$*.*

Dimostrazione. (i) Posto $b = \{b_1, \dots, b_s\} = {}^\star a$, consideriamo la controimagine $\star^{-1}[b]$ costituita da tutte e sole le entità di $\hat{A}$ che individuano, tramite la trasformazione $\star$, gli elementi standard di b. Osservato che, per il Teorema 2.3.3(v), ${}^\star(\star^{-1}[b])$ ha gli stessi elementi standard di ${}^\star a$, otteniamo $\star[\star^{-1}[b]] = \star[a]$ e quindi, per il Teorema 2.1.1(vi), ${}^\star(\star^{-1}[b]) = {}^\star a = b$. Ne segue la tesi, osservato che, per il Teorema 2.3.3(v), ${}^\star(\star^{-1}[b])$ ha solo elementi standard.

(ii) Sia intanto $n = 2$. Per ipotesi, è standard la coppia $(b_1, b_2) = \{\{b_1\}, \{b_1, b_2\}\}$ da cui otteniamo, tramite (i), che è standard pure $\{b_1, b_2\}$. Sempre per (i) ne segue che sono standard anche b_1 e b_2. Per $n > 2$, la (ii) consegue immediatamente per induzione. $\square$

2.4 Trasformate di relazioni

In questa sezione proviamo due teoremi che generalizzano a più "dimensioni" sia il Teorema 2.3.1 che quello d'isolamento standard; trattasi di teoremi che riguardano l'isolamento di sottoinsiemi standard in prodotti cartesiani di entità standard.

Teorema 2.4.1. *Siano $a_1, \ldots, a_s$ entità proprie di $\hat{A}$ e $W(x_1, \ldots, x_s)$ un predicato s-ario limitato di L. Posto*

$$E = \{(e_1, \ldots, e_s) \in a_1 \times \cdots \times a_s \,|\, \hat{A} \Vdash W(e_1, \ldots, e_s)\},$$

riesce ${}^\star E = \{(e_1, \ldots, e_s) \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \,|\, \mathcal{I} \Vdash W^\star(e_1, \ldots, e_s)\}$.

Dimostrazione. La dimostrazione si consegue dal Teorema 2.3.1, caratterizzando l'insieme E in $\hat{A}$ mediante una opportuna wff limitata. A tal fine, iniziamo con l'osservare che gli elementi di E possono essere caratterizzati tramite il metapredicato unario: $\exists x_1 \in a_1 \cdots \exists x_s \in a_s (x = \vec{x}\,\mathrm{e}\,{}^{\imath_{\hat{A}}} W(\vec{x}))$. Tenuto ora conto che $a_1, \ldots,$ a_s sono entità proprie di $\hat{A}$, esiste un indice n tale che $a_1, \ldots, a_s \in A_{n+1}$ e quindi E, come $a_1 \times \cdots \times a_s$, appartiene, per il Teorema 1.1.2(ii),(iii), ad A_{n+2s-1}. Ne segue, per il Teorema 1.1.1(ii), $E \subset A_{n+2s-2}$. Il metapredicato precedente si può allora esprimere in modo equivalente con la:

$$x \in A_{n+2s-2} \text{ e } \exists x_1 \in a_1 \cdots \exists x_s \in a_s (x = \vec{x} \text{ e } {}^{\imath_{\hat{A}}} W(\vec{x}\,))$$

a cui corrisponde la wff:

$$W_1(x) : x \lessdot A_{n+2s-2} \wedge \sqcup x_1 \lessdot a_1 \cdots \sqcup x_s \lessdot a_s \,(\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \asymp x \wedge W(\vec{x}\,))$$

che caratterizza, in modo limitato, nel linguaggio L l'insieme E.

Ne segue ${}^\star E = \{e \in {}^\star A_{n+2s-2} \,|\, \mathcal{I} \Vdash W_1^\star(e)\}$, con:

$$W_1^\star(x) : x \lessdot {}^\star A_{n+2s-2} \wedge \sqcup x_1 \lessdot {}^\star a_1 \cdots \sqcup x_s \lessdot {}^\star a_s \,(\langle x_1, \ldots, x_s \rangle \asymp x \,\wedge\, W^\star(\vec{x}\,))$$

e quindi ${}^\star E$ risulta caratterizzato dal metapredicato:

$$x \in {}^\star A_{n+2s-2}\,\mathrm{e}\,\exists x_1 \in {}^\star a_1 \cdots \exists x_s \in {}^\star a_s \,(x = \vec{x}\,\mathrm{e}\,{}^{\imath_{\mathcal{I}}} W^\star(\vec{x}\,)).$$

Ne segue

$${}^\star E = \{\vec{x} \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \,|\, \vec{x} \in {}^\star A_{n+2s-2}\,\mathrm{e}\,{}^{\imath_{\mathcal{I}}} W^\star(\vec{x}\,)\}.$$

Osservato infine che, per il Teorema 2.1.1(iii), ${}^\star E \subset {}^\star A_{n+2s-2}$ si ha la tesi. □

Il teorema appena provato merita qualche considerazione. L'insieme E è un'entità di $\hat{A}$ isolata nel prodotto cartesiano $a_1 \times \cdots \times a_s$ dalla wff $W(x_1, \ldots, x_s)$ del linguaggio L, mentre l'entità ${}^\star E$, appartenente ad $\mathcal{I}$, per definizione non è che l'imagine di E mediante $\star$. Il teorema assicura, però, che ${}^\star E$ è anche il sottoinsieme isolato nel prodotto cartesiano ${}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s$ dalla wff $W^\star(x_1, \ldots, x_s)$ del linguaggio L'. Il risultato fornisce, pertanto, un "modo di collezionare" elementi di un prodotto cartesiano di entità standard, per ottenere sottoinsiemi che risultini entità standard.

Il prossimo teorema, corollario del precedente, è una generalizzazione multidimensionale del Teorema d'isolamento standard 2.3.2.

Teorema 2.4.2. *Siano $b_1, \ldots, b_s$ entità standard e $W'(x_1, \ldots, x_s)$ un predicato limitato s-ario di L' con tutte le costanti soggettive standard. Allora l'insieme $\{(e_1, \ldots, e_s) \in b_1 \times \cdots \times b_s | \mathcal{I} \Vdash W'(e_1, \ldots, e_s)\}$ è standard.*

Dimostrazione. Essendo le costanti soggettive di $W'(\vec{x})$ standard, possiamo considerare il predicato limitato s-ario di L, $W_1(\vec{x})$, che si ottiene sostituendo in $W'(\vec{x})$ le costanti soggettive con le loro controimmagini via $\star$. Sia inoltre $b_1 = {}^\star a_1, \ldots, b_s = {}^\star a_s$. Posto $E = \{\vec{e} \in a_1 \times \cdots \times a_s | \hat{A} \Vdash W_1(\vec{e})\}$, si ha, per il Teorema 2.4.1, ${}^\star E = \{\vec{e} \in b_1 \times \cdots \times b_s \,|\, \mathcal{I} \Vdash W_1^\star(\vec{e})\} = \{\vec{e} \in b_1 \times \cdots \times b_s \,|\, \mathcal{I} \Vdash W'(\vec{e})\}$. □

Il Teorema 2.4.1 è lo strumento fondamentale per lo studio delle trasformate di relazioni (in particolare, applicazioni, ordinamenti e operazioni algebriche binarie) e delle loro proprietà.

Dopo aver visto, nel Teorema 2.3.3, come si trasformano le usuali operazioni insiemistiche, passiamo ora ad analizzare le trasformate delle relazioni di $\hat{A}$; in particolare, nel teorema seguente, le proposizioni dopo la quarta considerano quelle particolari relazioni che sono le applicazioni. Osserviamo che la proposizione (i) assicura che la trasformata di un prodotto cartesiano di entità è il prodotto cartesiano dei trasformati di quelle entità.

Teorema 2.4.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $a_1, \ldots, a_s \in A_n \setminus A \Rightarrow {}^\star(a_1 \times \cdots \times a_s) = {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s$;

(ii) a *relazione* s-*aria* $\Leftrightarrow {}^\star a$ *relazione* s-*aria;*[4]

(iii) a *relazione* s-*aria e* $s \geq 2 \Rightarrow {}^\star(\pi_j^s(a)) = \pi_j^s({}^\star a)$ *e* ${}^\star(p_j^s(a)) = p_j^s({}^\star a)$;

(iv) a *relazione binaria* $\Rightarrow {}^\star(a[a_1]) = {}^\star a[{}^\star a_1]$;

(v) $f : a_1 \mapsto a_2 \Leftrightarrow {}^\star f : {}^\star a_1 \mapsto {}^\star a_2$;

[4] Per a relazione s-aria intendiamo che a è un insieme (anche vuoto) di s-ple. A volte, al posto di $(a_1, \ldots, a_s) \in a$ usiamo la notazione usuale $a(a_1, \ldots, a_s)$, mentre, nel caso binario, la notazione $a_1 \, a \, a_2$.

(vi) f applicazione di dominio a e $a_1 \in a \Rightarrow {}^\star(f(a_1)) = {}^\star f({}^\star a_1)$.

Dimostrazione. Osserviamo, preliminarmente, che dato $a \in \hat{A}$, esiste n tale che $a \in A_n$ e quindi $a \in A_{n+2s-1}$. Allora, per il Teorema 1.1.1(i), ogni s-pla di a appartiene a A_{n+2s-2} e quindi, per il Teorema 1.1.4(iv), le componenti di queste s-ple sono in A_{n+2s-4}. Inoltre, per il Teorema 2.1.1(i), ${}^\star a \in {}^\star A_{n+2s-1}$ e quindi le componenti delle sue s-ple sono in ${}^\star A_{n+2s-4}$ (Teoremi 2.1.3(iv) e 2.2.3(vi)).

Per semplicità di esposizione, poniamo $\pi_j = \pi_j^s$ e $p_j = p_j^s$.

(i) Basta porre, nel Teorema 2.4.1, $W(\vec{x}\,) : x_1 \lessdot a_1 \wedge \cdots \wedge x_s \lessdot a_s$.

(ii) Sia intanto a una relazione s-aria. Risulta allora $a \subset \pi_1(a) \times \cdots \times \pi_s(a)$, con $\pi_j(a) \in \hat{A}$ per $j = 1, \ldots, s$ (Teorema 1.1.4(v)). Ne segue, per(i) e il Teorema 2.1.1(iii), ${}^\star a \subset {}^\star(\pi_1(a) \times \cdots \times \pi_s(a)) = {}^\star\pi_1(a) \times \cdots \times {}^\star\pi_s(a)$, cioè ${}^\star a$ relazione s-aria.

Sia ora ${}^\star a$ una relazione s-aria. Dato $e \in a$, riesce ${}^\star e \in {}^\star a$ da cui otteniamo, per il Teorema 2.3.4(ii), ${}^\star e = ({}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s)$, con $a_1 \ldots, a_s$ entità di $\hat{A}$, e quindi, per il Teorema 2.3.3(vi), ${}^\star e = {}^\star\vec{a}$. Ne segue $e = \vec{a}$. Dunque, ogni elemento di a è una s-pla, cioè a relazione s-aria.

(iii) Sia $a \in A_{n+2s-1}$. Posto $m = n + 2s - 4$, consideriasmo la wff d L:

$$W(x) : \sqcup x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_s \lessdot A_m \\ (\langle x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_s\rangle \lessdot a).$$

Risulta, $\pi_j(a) = \{e \in A_m \,|\, \hat{A} \Vdash W(e)\}$. Per il Teorema 2.4.1 riesce allora ${}^\star(\pi_j(a)) = \{e \in {}^\star A_m | \mathcal{I} \Vdash W^\star(e)\}$, con

$$W^\star(x) : \sqcup x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1} \ldots, x_s \lessdot {}^\star A_m \\ (\langle x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_s\rangle \lessdot {}^\star a).$$

Ne segue la tesi.

Passando alla $p_j(a)$, consideriamo la wff di L:

$$W_1(\vec{x}_{-j}) : \sqcup x_j \lessdot A_m\, (\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \lessdot a).$$

Per il Teorema 1.1.4(v), $p_j(a) = \{\vec{e}_{-j} \in A_{m+2s-4} \,|\, \hat{A} \Vdash W_1(\vec{e}_{-j})\}$ e quindi, per il Teorema 2.4.1, ${}^\star(p_j(a)) = \{e \in {}^\star A_{m+2s-4} \,|\, \mathcal{I} \Vdash W_1^\star(e)\}$, con

$$W_1^\star(\vec{x}_{-j}) : \sqcup x_j \lessdot {}^\star A_m\, (\langle x_1, \ldots, x_s\rangle \lessdot {}^\star a\rangle.$$

Ne segue la tesi, notato che le componenti delle $(s-1)$-uple di ${}^\star a$ sono in ${}^\star A_{m+2s-4}$.

(iv) Segue da (iii) e dal Teorema 2.3.1, notato che $a[a_1] = \{e \in \pi_2(a) \,|\, \hat{A} \Vdash \sqcup x_1 \lessdot a_1\, (\langle x_1, e\rangle \lessdot a\}$.

(v) Iniziamo col provare che ${}^\star f$ è un'applicazione di ${}^\star a$ in ${}^\star b$. Intanto, per (ii), ${}^\star f$ è una relazione binaria. Inoltre, per (iv), $\pi_1({}^\star f) = {}^\star(\pi_1(f)) = {}^\star a_1$ e, per il

Teorema 2.1.1(iii), $\pi_2({}^\star f) = {}^\star(\pi_2(f)) \subset {}^\star a_2$. Occorre ancora verificare che ${}^\star f$ è un'applicazione (per quanto precede di ${}^\star a_1$ in ${}^\star a_2$). A tal fine, assumiamo, senza perdere in generalità, $a_1, a_2 \in A_{n+1}$. Allora, per il Teorema 1.1.2(iii), $f \in A_{n+3}$. Considerata poi la wfs limitata:

$$\sqcap x_1 \lessdot a_1 \sqcap x_2, x_3 \lessdot a_2 \,(\langle x_1, x_2\rangle \lessdot f \wedge \langle x_1, x_3\rangle \lessdot f \to x_2 = x_3\rangle$$

basta applicare PdL. Il viceversa si prova in modo analogo.

(vi) Riesce $\{f(a_1)\} = f[\{a_1\}]$, da cui, per (iv) e il Teorema 2.3.3(v), $\{{}^\star(f(a_1))\} = {}^\star\{f(a_1)\} = {}^\star f[{}^\star\{a_1\}] = {}^\star f[\{{}^\star a_1\}] = \{{}^\star f({}^\star a_1)\}$, cioè ${}^\star(f(a_1)) = {}^\star f({}^\star a_1)$. □

Concludiamo la sezione con un risultato che completa il Teorema 2.3.4 assicurando che prodotti cartesiani standard non vuoti hanno fattori standard.

Teorema 2.4.4. *Se $b_1 \times \cdots \times b_s \neq \emptyset$ è standard, allora lo sono anche i fattori $b_1, \ldots, b_s$.*

Dimostrazione. Posto $b = b_1 \times \cdots \times b_s$ e $a_i = \star^{-1}[b_i]\,(i = 1, \ldots, s)$, proviamo che riesce $b = {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s$. Essendo le due entità standard (Teorema 2.4.3(i)), basta constatare, per il Teorema 2.1.1(vi), che hanno gli stessi elementi standard.

Sia intanto ${}^\star a \in b$. Ne segue ${}^\star a = \vec{e}$ da cui otteniamo, per il Teorema 2.3.4(ii), che esiste, per ogni $i \leq s$, $a_i' \in \hat{A}$ tale che $e_i = {}^\star a_i'$ e quindi $a_i' \in \star^{-1}[b_i] = a_i$, cioè, per il Teorema 2.1.1(i), $e_i = {}^\star a_i' \in {}^\star a_i$. Dall'arbitrarietà di i otteniamo allora ${}^\star a \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s$.

Sia ora ${}^\star a \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s$. Riesce allora, sempre per il Teorema 2.3.4(ii), che che esiste, per ogni $i \leq s$, $a_i' \in \hat{A}$ tale che ${}^\star a = ({}^\star a_1', \ldots, {}^\star a_s')$ con ${}^\star a_i' \in {}^\star a_i$. Allora, $a_i' \in \star^{-1}[b_i]$, cioè, per il Teorema 2.1.1(i), ${}^\star a_i' \in b_i$. Dall'arbitrarietà di i otteniamo allora ${}^\star a \in b$.

Dunque $b = {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \neq \emptyset$ e quindi $b_i = {}^\star a_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. □

2.5 Il modello $\mathcal{I}$ come sovrastruttura interna

Nelle sezioni precedenti abbiamo ritrovato, per il modello $\mathcal{I}$, numerose proprietà analoghe a quelle di cui gode il modello standard che è una sovrastruttura. In particolare, in relazione a talune di tali proprietà, le entità standard ${}^\star A_n$ si comportano in $\mathcal{I}$ esattamente come i livelli A_n nella sovrastruttura $\hat{A}$. Riesce, ad esempio: $\lim_{n\to+\infty} {}^\star A_n = \mathcal{I}$; ${}^\star A_n \in {}^\star A_{n+1}$; ${}^\star A_n \subset {}^\star A_{n+1}$; ogni ${}^\star A_{n+1}$ possiede entità proprie; l'entità ${}^\star A$ è l'insieme degli atomi di $\mathcal{I}$.

Queste proprietà potrebbero far nascere il sospetto che gli ${}^{\star}A_n$ altro non siano che i livelli della sovrastruttura $(\widehat{{}^{\star}A})$ costruita su ${}^{\star}A$. In proposito, possiamo concludere soltanto che $\mathcal{I} \subset (\widehat{{}^{\star}A})$, mentre l'inclusione opposta non sempre sussiste. Infatti, entità proprie interne, che per l'ammessa strettezza del monomorfismo $\star$ hanno solo elementi interni, possono avere, se infinite, tra i loro sottoinsiemi anche sottoinsiemi esterni che sono elementi di $(\widehat{{}^{\star}A}) \subset \hat{B}$, ma non di $\mathcal{I}$.

D'altra parte, $\mathcal{I}$ verifica, tuttavia, proprietà che consentono di configurarla come una sorta di "sovrastruttura interna", in quanto ottenibile, passo dopo passo, seguendo regole costruttive analoghe a quelle date per le sovrastrutture. Precisamente, mentre quest'ultime si ottengono unendo, ad ogni passo, al livello raggiunto l'insieme delle sue parti, il modello interno si può costrure unendo, al passo $(n+1)$-esimo, al "livello" ${}^{\star}A_n$ l'insieme delle sue parti interne.

Queste considerazioni trovano giustificazione ed ulteriore chiarimento nel teorema seguente, ove la proposizione (i) fornisce la regola costruttiva, di cui abbiamo detto in premessa, di ${}^{\star}A_{n+1}$ a partire da ${}^{\star}A_n$. Per la sua analogia con la regola costruttiva delle sovrastrutture essa giustifica le denominazioni, che usiamo nel seguito, di **livello interno** per l'entità ${}^{\star}A_n$ e di **sovrastruttura interna** per l'insieme $\mathcal{I}$. La proposizione (ii) è analoga alla (iii) del Teorema 1.1.1 relativa alle sovrastrutture; essa afferma che ogni sottoinsieme *interno* di un'entità *interna* propria appartiene allo stesso livello interno a cui appartiene l'entità medesima.

Le proposizioni (iii) e (iv) interessano, invece, la collocazione della sovrastruttura interna $\mathcal{I}$ nell'ambito della sovrastruttura $\hat{B}$. La (iii) garantisce, intanto, che l'n-simo livello interno, ${}^{\star}A_n$, di $\mathcal{I}$ non "deborda" dal livello di pari indice di $\hat{B}$. La (iv) che il livello interno di ${}^{\star}A_n$ è costituito dagli elementi interni del livello B_n. Tenuto conto di entrambe si deduce, poi, che sussiste l'uguaglianza $(\mathcal{I} \setminus {}^{\star}A_n) \cap B_n = \emptyset$, cioè che gli elementi che vengono generati per la prima volta, nel corso della costruzione di $\mathcal{I}$, dopo l'n-simo passo, vanno a finire nella sovrastruttura $\hat{B}$ in livelli superiore all'n-simo.

Infine, la (v) riguarda la collocazione dell'insieme degli elementi standard $\mathcal{S} = \star[\hat{A}]$ in $\hat{B}$. Essa mostra che se l'entità a viene generata in $\hat{A}$ per la *prima volta* al passo $(n+1)$-esimo, anche l'entità ${}^{\star}a$ viene generata in $\hat{B}$ (e in $\mathcal{I}$) per la prima volta allo stesso passo. In altri termini, se A_{n+1} è il minimo livello che contiene a, B_{n+1} (e ${}^{\star}A_{n+1}$) è il minimo livello che contiene ${}^{\star}a$. Ciò rimane valido anche per gli elementi interni; basta osservare che, per (iv), se $b \in {}^\star A_{n+1} \setminus^\star A_n$, riesce $b \in B_{n+1} \setminus B_n$, come segue dalla ${}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A_n = (B_{n+1} \setminus B_n) \cap \mathcal{I}$.

Teorema 2.5.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) ${}^\star A_{n+1} = {}^\star A_n \cup (\mathbb{P}({}^\star A_n) \cap \mathcal{I}) = ({}^\star A_n \cup \mathbb{P}({}^\star A_n)) \cap \mathcal{I}$*;*

(ii) $b_1 \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$ *e* $b_2 \in \mathcal{I}$ *e* $b_2 \subset b_1 \Rightarrow b_2 \in {}^\star A_{n+1}$*;*

(iii) ${}^\star A_n \subset B_n$*;*

(iv) ${}^\star A_n = B_n \cap \mathcal{I}$*;*

(v) $a \in A_{n+1} \setminus A_n \Leftrightarrow {}^\star a \in B_{n+1} \setminus B_n$.

Dimostrazione. (i) Dalla $A_{n+1} = A_n \cup \mathbb{P}(A_n)$ otteniamo, mediante il Teorema 2.3.3(iv),(vii) e la strettezza di $\star$, la tesi.

(ii) Per il Teorema 2.1.3(v), $b_1 \subset {}^\star A_n$ da cui $b_2 \subset {}^\star A_n$ e quindi $b_2 \in ({}^\star A_n \cup \mathbb{P}({}^\star A_n)) \cap \mathcal{I}$. Ne segue, tramite (i), $b_2 \in {}^\star A_{n+1}$.

(iii) Osservato che, per il Teorema 2.1.3(ii), ${}^\star A \subset B$, procediamo per induzione, supponendo ${}^\star A_n \subset B_n$. Tramite (i) riesce allora ${}^\star A_{n+1} = ({}^\star A_n \cup \mathbb{P}({}^\star A_n)) \cap \mathcal{I} \subset {}^\star A_n \cup \mathbb{P}({}^\star A_n) \subset B_n \cup \mathbb{P}(B_n) = B_{n+1}$.

(iv) Procediamo per induzione. Sia intanto $n = 0$. Per il Teorema 2.1.3(ii), ${}^\star A \subset B$ da cui otteniamo ${}^\star A \cap \mathcal{I} \subset B \cap \mathcal{I}$ e quindi ${}^\star A \subset B \cap \mathcal{I}$. Sia ora $b \in B \cap \mathcal{I}$, cioè b atomo interno. Allora, per il Teorema 2.1.3(iii), $b \notin {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$, qualunque sia n. Ne segue $b \in {}^\star A$, da cui, per l'arbitrarietà di b, risulta, $B \cap \mathcal{I} \subset {}^\star A \subset B \cap \mathcal{I}$. Dunque, $B \cap \mathcal{I} = {}^\star A$.

Sia ora $n > 0$. Assumiamo, passo induttivo, ${}^\star A_n = B_n \cap \mathcal{I}$.

Proviamo preliminarmente che $\mathbb{P}(B_n) \cap \mathcal{I} = \mathbb{P}({}^\star A_n) \cap \mathcal{I}$. Ora, per (iii), ${}^\star A_n \subset B_n$ e quindi $\mathbb{P}({}^\star A_n) \cap \mathcal{I} \subset \mathbb{P}(B_n) \cap \mathcal{I}$. Per provare l'inclusione opposta, sia $b \in \mathbb{P}(B_n) \cap \mathcal{I}$, cioè $b \subset B_n$ e b interno. Allora b è un'entità propria che, per la strettezza del monomorfismo $\star$, ha solo elementi interni. Pertanto $b \subset B_n \cap \mathcal{I} = {}^\star A_n$ (ipotesi induttiva). Ne segue $b \in \mathbb{P}({}^\star A_n) \cap \mathcal{I}$ e quindi, per l'arbitrarietà di b, $\mathbb{P}(B_n) \cap \mathcal{I} \subset \mathbb{P}({}^\star A_n) \cap \mathcal{I}$.

Quanto appena provato, tenuto conto dell'ipotesi induttiva e di (i), assicura che $B_{n+1} \cap \mathcal{I} = (B_n \cup \mathbb{P}(B_n)) \cap \mathcal{I} = (B_n \cap \mathcal{I}) \cup (\mathbb{P}(B_n) \cap \mathcal{I}) = {}^\star A_n \cup (\mathbb{P}({}^\star A_n) \cap \mathcal{I}) = {}^\star A_{n+1}$.

(v) Per i Teoremi 2.1.1(i) e 2.3.3(i), $a \in A_{n+1} \setminus A_n \Leftrightarrow {}^\star a \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A_n$. Basta allora provare che ${}^\star a \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A_n \Leftrightarrow {}^\star a \in B_{n+1} \setminus B_n$.

Per (iv), ${}^\star a \in^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A_n = (B_{n+1} \cap \mathcal{I}) \setminus (B_n \cap \mathcal{I}) = (B_{n+1} \setminus B_n) \cap \mathcal{I}$ e quindi ${}^\star a \in B_{n+1} \setminus B_n$.

Viceversa, dalla ${}^\star a \in B_{n+1} \setminus B_n$ segue, per (iv) e ${}^\star a \in \mathcal{I}$, ${}^\star a \in (B_{n+1} \setminus B_n) \cap \mathcal{I} = (B_{n+1} \cap \mathcal{I}) \setminus (B_n \cap \mathcal{I}) = {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A_n$. $\square$

Per completare lo studio della sovrastruttura interna $\mathcal{I}$ occorre ancora esaminare, in analogia a quanto fatto per la sovrastruttura $\hat{A}$, proprietà collegate alle relazioni ed alle applicazioni. Nel teorema seguente, la proposizione (i) assicura che prodotti cartesiani finiti di entità interne sono interni. La (iii) che relazioni interne hanno proiezioni interne. La (v) che relazioni inverse interne sono interne; in particolare, se una funzione interna è invertibile, allora anche la sua inversa risulta interna. La (vii) che composte di relazioni binarie interne sono interne. La (viii) che se un'applicazione è interna, le sue imagini sono interne. La (ix) che le restrizioni su insiemi interni di applicazioni interne sono ancora interne. Infine, la (ii), generalizzazione del Teorema 2.2.1, fornisce un criterio costruttivo per individuare relazioni interne.

Teorema 2.5.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A \Rightarrow b_1 \times \cdots \times b_s \in {}^\star A_{n+2s-1}$*;*

(ii) $b_1, \dots, b_s \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$, $W'(x_1, \dots, x_s)$ *predicato s-ario limitato di* $L' \Rightarrow \{(e_1, \dots, e_s) \in b_1 \times \cdots \times b_s | \mathcal{I} \Vdash W'(e_1, \dots, e_s)\} \in {}^\star A_{n+2s-1}$*;*

(iii) $b \in {}^\star A_{n+2s-1} \setminus {}^\star A$ *relazione s-aria e* $s \geq 2 \Rightarrow \pi^s_j(b) \in {}^\star A_{n+2s-3}$ *e* $p^s_j(b) \in {}^\star A_{n+4s-7}$*;*

(iv) $b \in {}^\star A_{n+3} \setminus {}^\star A$ *relazione binaria e* $b_1 \in {}^\star A_{n+1} \Rightarrow b[b_1] \in {}^\star A_{n+1}$*;*

(v) $b \in {}^\star A_{n+3} \setminus {}^\star A$ *relazione binaria* $\Rightarrow b^{-1} \in {}^\star A_{n+3}$*;*

(vi) $b \in {}^\star A_{n+3} \setminus {}^\star A$ *relazione binaria e* $b_1 \in {}^\star A_n \Rightarrow \{e \in {}^\star A_n \,|\, (b_1, e) \in b\} \in {}^\star A_{n+1}$ *e* $\{e \in {}^\star A_n \,|\, (e, b_1) \in b\} \in {}^\star A_{n+1}$*;*

(vii) $b_1, b_2 \in {}^\star A_{n+3} \setminus {}^\star A$ *relazioni binarie* $\Rightarrow b_1 \circ b_2 \in {}^\star A_{n+3}$*;*

(viii) $b_1, b_2 \in {}^\star A_{n+1} \setminus {}^\star A$ *e* $b_3 \in b_1$ *e* $f : b_1 \mapsto b_2$ *interna* $\Rightarrow f \in {}^\star A_{n+3}$ *e* $f(b_3) \in {}^\star A_n$*;*

(ix) f *applicazione interna di dominio* b_1 *e* $b \subset b_1$ *interno. Risulta allora interna anche la restrizione* $f|_b$*.*

Dimostrazione. Tutte le proposizioni, eccetto (vii) e (ix), si provano ricorrendo al Teorema 2.2.1.

(i) Osservato che, per i Teoremi 2.1.3(iv) e 2.2.3(iv), ogni s-pla di $b_1 \times \cdots \times b_s$ appartiene a ${}^\star A_{n+2s-2}$ e considerata la wff d L':

$$W'(x) : \sqcup x_1 \lessdot b_1 \cdots \sqcup x_s \lessdot b_s(\vec{x} \asymp x)$$

risulta $b_1 \times \cdots \times b_s = \{b \in {}^\star A_{n+2s-2})|\mathcal{I} \Vdash W'(b)\}$.

(ii) Notato che, per quanto appena visto, ogni s-pla di $b_1 \times \cdots \times b_s$ appartiene a ${}^\star A_{n+2s-2}$ e considerata la wff d L':

$$W''(x) : \sqcup x_1 \lessdot b_1 \cdots \sqcup x_s \lessdot b_s(\vec{x} \asymp x \wedge W'(\vec{x}\,))$$

otteniamo, indicato con E l'insieme in oggetto, $E = \{b \in {}^\star A_{n+2s-2}|\mathcal{I} \Vdash W''(b)\}$.

(iii) Ogni s-pla di b appartiene a ${}^\star A_{n+2s-2}$ e quindi, per il Teorema 2.2.3(vi), le sue componenti sono in ${}^\star A_{n+2s-4}$. Posto allora $m = n + 2s - 4$, e osservato che $m + 2s - 2 = n + 4s - 6 \geq n + 2s - 2$ $(s \geq 2)$, consideriamo la wff di L':

$$W'(x) : \sqcup x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_s \lessdot {}^\star A_m\,(\langle x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_s\rangle \lessdot b).$$

Risulta, $\pi^s_j(b) = \{e \in {}^\star A_{n+2s-4}\,|\,\mathcal{I} \Vdash W'(e)\}$ da cui la tesi essendo, per il Teorema 2.1.1(iv), ${}^\star A_{n+2s-4} \in {}^\star A_{n+2s-3}$.

Passando alla $p^s_j(b)$, considerata la wff di $L' : W''(\vec{x}_{-j}) : \sqcup x_j \lessdot {}^\star A_m\,(\vec{x} \lessdot b)$, otteniamo $p^s_j(b) = \{\vec{e}_{-j} \in {}^\star A_{n+4s-8}\,|\,\mathcal{I} \Vdash W''(\vec{e}_{-j})\}$.

(iv) Ricordato che le componenti delle coppie di b sono in ${}^\star A_n$, come pure gli elementi di b_1, considerata la wff di L':

$$W'(x) : \sqcup x_1 \lessdot b_1\,(\langle x_1, x\rangle \lessdot b)$$

otteniamo $b[b_1] = \{e \in {}^\star A_n|\mathcal{I} \Vdash W'(e)\}$.

(v) Notato che le componenti delle coppie di b sono in ${}^\star A_n$ e considerata la wff di L':

$$W'(x) : \sqcup x_1, x_2 \lessdot {}^\star A_n\,(\langle x_1, x_2\rangle \lessdot b \wedge \langle x_2, x_1\rangle \asymp x)$$

otteniamo $b^{-1} = \{e \in {}^\star A_{n+2}|\mathcal{I} \Vdash W'(e)\}$.

(vi) Tramite (iv), $\{e \in {}^\star A_n\,|\,(b_1, e) \in b\} = \{e \in {}^\star A_n\,|\,\exists y \in \{b_1\}((y, e) \in b)\} = b[\{b_1\}] \in {}^\star A_{n+1}$. Inoltre, per (v), $\{e \in {}^\star A_n\,|\,(e, b_1) \in b\} = \{e \in {}^\star A_n\,|\,(b_1, e) \in b^{-1}\} = b^{-1}[\{b_1\}] \in {}^\star A_{n+1}$.

(vii) Tenuto presente che le componenti delle coppie di entrambe le relazioni sono in ${}^\star A_n$ e considerata la wff di L':

$$W'(x) : \sqcup x_1, x_2, x_3 \lessdot {}^\star A_n\,(\langle x_1, x_2\rangle \lessdot b_1 \wedge \langle x_2, e_3\rangle \lessdot b_2 \wedge \langle x_1, x_3\rangle \asymp x),$$

otteniamo, per il Teorema 2.2.3(iv), $b_1 \circ b_2 = \{b \in {}^\star A_{n+2}|\mathcal{I} \Vdash W'(b)\}$.

(viii) Risulta, per (i), $(b_3, f(b_3)) \in f \subset b_1 \times b_2 \in {}^\star A_{n+3}$ e quindi $f(b_3) \in {}^\star A_n$ e per il Teorema 2.5.1(ii), $f \in {}^\star A_{n+3}$.

(ix) Esiste n tale che $f \in {}^\star A_{n+3}$ e quindi, per (iii), $b_1 = \pi^2_1(f), \pi^2_2(f) \in {}^\star A_{n+1}$. Allora, per il Teorema 2.5.1(ii), $b \in {}^\star A_{n+1}$ e quindi, per (i), $b \times \pi^2_2(f) \in {}^\star A_{n+3}$. Ne segue, mediante il Teorema 2.2.3(vii), $f|_b = (b \times \pi^2_2(f)) \cap f \in {}^\star A_{n+3}$. $\square$

Concludiamo la sezione con un teorema, per certi aspetti analogo ai Teoremi 2.3.4 e 2.4.4, che precisa, tra l'altro, che l'internalità di un prodotto cartesiano non vuoto di un numero finito di fattori assicura l'internalità dei medesimi.

Teorema 2.5.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Se $\{b_1, \ldots, b_s\}$ è *interno, allora lo sono anche* $b_1, \ldots, b_s$*;*

(ii) Se $(b_1, \ldots, b_s)$ è *interno, allora lo sono anche* $b_1, \ldots, b_s$*;*

(iii) Se $b_1 \times \cdots \times b_s \neq \emptyset$ è *interno, allora lo sono anche* $b_1, \ldots, b_s$*.*

Dimostrazione. (i) Segue dal Teorema 2.1.3(i),(iv).

(ii) Segue dal Teorema 2.2.3(v),(vi).

(iii) Segue dai Teoremi 2.1.3(i) e 2.5.2(iii), notato che $b_j = \pi^s_j(b_1 \times \cdots \times b_s)$. □

2.6 Immersioni

In questa sezione, assumiamo $A \subset B$ (dunque $\hat{A} \subset \hat{B}$). Ciò posto, le **immersioni** sono quei particolari monomorfismi tali che ${}^\star a = a$, per ogni $a \in A$.

Ovviamente $\star[A] = A$. Inoltre, sussistono le proprietà seguenti.

Teorema 2.6.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $a_1, \ldots, a_s \in A \Rightarrow {}^\star\{a_1, \ldots, a_s\} = \{a_1, \ldots, a_s\}$*;*

(ii) $a_1, \ldots, a_s \in A \Rightarrow {}^\star(a_1, \ldots, a_s) = (a_1, \ldots, a_s)$*;*

(iii) $a \in A^s \Rightarrow {}^\star a = a$*;*

(iv) $a \subset A^s \Rightarrow a = \star[a] \subset {}^\star a$*;*

(v) f *applicazione di* $a \subset A^s$ *in* $A \Rightarrow {}^\star f|_a = f$*.*

Dimostrazione. (i)-(ii) Conseguenza immediata del Teorema 2.3.3(v),(vi).

(iii) Segue da (ii), osservato che $a = (a_1, \ldots, a_s)$ per qualche $a_1, \ldots, a_s \in A$.

(iv) Conseguenza di (iii) e del Teorema 2.1.1(ii), osservato che gli elementi di a sono s-ple di A^s.

(v) Osserviamo, preliminarmente, che, per il Teorema 2.4.3(v), ${}^\star f : {}^\star a \mapsto {}^\star A$ e, per (iv), $a \subset {}^\star a$. Sia ora $a_1 \in a$. Allora $a_1 \in A^s$ e quindi, per (iii), $a_1 = {}^\star a_1$ da cui otteniamo, per il Teorema 2.4.3(vi), $({}^\star f)(a_1) = {}^\star f({}^\star a_1) = {}^\star(f(a_1))$ e quindi $({}^\star f)(a_1) = f(a_1)$. □

Le proposizioni (iv) e (v) meritano qualche considerazione. Nella prima, essendo a una relazione s-aria, anche $^\star a$ è, per il Teorema 2.4.3(ii), una relazione s-aria che risulta, per (iv), un'estensione di a. Per quanto riguarda la seconda proposizione, essendo come visto nella dimostrazione, $a \subset {}^\star a$ e $^\star f$ di dominio $^\star a$, l'applicazione trasformata $^\star f$ risulta, per (v), un prolungamento dell'applicazione f su $^\star a \subset {}^\star(A^s) = {}^\star A^s$ (Teorema 2.4.3(i)).

Queste semplici osservazioni permettono di dare alle due proposizioni in esame una nuova e più significativa formulazione.

Teorema 2.6.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) La trasformata $^\star a$ di una relazione s-aria a tra atomi è *un prolungamento di quest'ultima;*

(ii) La trasformata $^\star f$ di un'applicazione f di dominio $a \subset A^s$ e imagine in A è *un prolungamento di quest'ultima su $^\star a \subset {}^\star A^s$;*

(iii) La trasformata $^\star\oplus$ di una operazione $\oplus$ su $a \subset A$ è *un prolungamento di quest'ultima su $^\star a \subset {}^\star A$.*

Nel seguito, qualora non sia fonte di fraintendimenti e renda l'esposizione più snella, *indichiamo con la medesima notazione sia l'entit*à *considerata a che la sua trasformata $^\star a$, nel caso che la trasformata sia un'estensione di a*; poniamo cioè $^\star a = a$.

2.7 Allargamenti

Un monomorfismo non assicura, in generale, l'esistenza di elementi interni nonstandard. Ciò accade, ad esempio, se A è finito, perchè in questo caso ogni entità di $\hat{A}$ è finita e quindi, per il Teorema 2.3.3(v), non si "arricchisce" di elementi per effetto della trasformazione $\star$.[5] Anche se A è infinito tuttavia può accadere che manchino elementi interni nonstandard (cioè che sia $\mathcal{I} = \mathcal{S}$); un esempio è dato dall'applicazione identica di $\hat{A}$ in $\hat{B} = \hat{A}$. Monomorfismi siffatti non hanno evidentemente interesse alcuno per chi si pone il problema di ottenere un'ampliamento proprio di A, ampliamento che, come mostrano le precedenti considerazioni, si potrà avere solo se A è infinito.

[5]Se A è finito, da $a \in \hat{A}$ segue $a \subset A_{n+1}$ per qualche n e A_{n+1} è finito, come si prova immediatamente per induzione.

In questo ordine di idee, introduciamo una particolare classe di monomorfismi che forniscono un ampliamento proprio di A e che, come vedremo nel seguito, svolgono un ruolo centrale nelle applicazioni dell'analisi nonstandard.

A tale proposito, ricordiamo che una relazione *binaria* $\Bumpeq$ è detta **concorrente** se, per ogni *numero finito* di elementi $a_1, \ldots, a_s$ del suo dominio, esiste un a tale che a_i è in relazione con a, cioè $a_i \Bumpeq a$, per ogni $i = 1, \ldots, s$. Sono, ad esempio, concorrenti:
1. L'ordine in $\mathbb{N}$, e in ogni suo sottoinsieme finito, mentre l'ordine stretto in $\mathbb{N}$ lo è solo in $\mathbb{N}$;
2. La relazione di disuguaglianza in ogni insieme infinito;
3. La relazione $\Bumpeq$ di dominio l'insieme a e codominio l'insieme $\mathbb{P}_f(a)$ delle parti finite di a, così definita: $x \Bumpeq y \Leftrightarrow x \in y$;
4. La relazione di divisibilità in $\mathbb{N}$ (questo esempio assicura, tra l'altro, l'esistenza di una relazione d'ordine non totale concorrente).

Le considerazioni che seguono servono a chiarire il significato della nozione ora introdotta. Con riferimento ad una generica relazione binaria $\Bumpeq$ di dominio l'insieme a, è lecito chiedersi se, dati $a_1, \ldots, a_s$ in a, il sistema

$$\begin{cases} x \Bumpeq a_1 \\ \ldots\ldots \\ x \Bumpeq a_s \end{cases} \tag{2.1}$$

ammette soluzioni; cioè se esiste $e \in a$ tale che $e \Bumpeq a_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Ora, dire che $\Bumpeq$ è concorrente equivale a dire che, qualunque sia $s \geq 1$ e qualunque siano $a_1, \ldots, a_s \in a$, tale sistema è compatibile.

È interessante, nel nostro contesto, esaminare la relazione concorrente quando $\Bumpeq$ è un'entità di $\hat{A}$. È facile, in questo caso, provare che la restrizione di ${}^\star \Bumpeq$ su $\star[a]$ è pure concorrente. Pertanto, in analogia con quanto visto per $\Bumpeq$, si ha che il sistema:

$$\begin{cases} x \,{}^\star\!\Bumpeq\, b_1 \\ \ldots\ldots \\ x \,{}^\star\!\Bumpeq\, b_s \end{cases} \tag{2.2}$$

ammette soluzioni comunque si fissino $s \geq 1$ e $b_1, \ldots, b_s \in \star[a]$. Più in generale, al posto dei sistemi (2.1) e (2.2), si potevano considerare i sistemi (infiniti se a è infinito):

$$x \Bumpeq a' \quad \text{per ogni } a' \in a \tag{2.3}$$

$$x \ {}^{\star}\!\bumpeq \ b' \quad \text{per ogni } b' \in \star[a]. \tag{2.4}$$

La proprietà di concorrenza di $\bumpeq$ e ${}^{\star}\!\bumpeq |_{\star[a]}$ assicurano che ogni sottoinsieme *finito* di tali sistemi ammette soluzione. Ciò non significa, naturalmente, che tali sistemi siano compatibili. È possibile, però, provare che esistono monomorfismi che godono della proprietà di rendere compatibili *tutti* i sistemi del tipo (2.2), e ciò indipendentemente dal fatto che il corrispondente sistema (2.1) sia compatibile o non. Tali monomorfismi si dicono allarganti. Più precisamente, un monomorfismo è **allargante** (o un **allargamento**) se:
− per ogni relazione concorrente $\bumpeq \in \hat{A}$ di dominio a, esiste $b \in \mathcal{I}$ tale che $b \ {}^{\star}\!\bumpeq \ {}^{\star}a_1$, per ogni $a_1 \in a$ (${}^{\star}a_1 \in \star[a]$).

Osserviamo ancora che l'esistenza di monomorfismi allarganti garantisce che si può sempre "immergere"a in un ambiente più ampio, identificando a con $\star[a]$, nel quale il sistema (2.3) diventa compatibile; ciò almeno nel senso che questo accade se si sostituisce $\bumpeq$ con ${}^{\star}\!\bumpeq$, e con ciò (2.3) con (2.4).

In altri termini, il sistema (2.3), relativo ad una qualunque relazione concorrente di $\hat{A}$, trova soluzione aggiungendo ad $\hat{A}$ opportuni "elementi ideali", cioè ampliando $\hat{A}$ a $\mathcal{I}$. Si rifletta che questo modo di procedere è frequente e usuale in matematica. Ad esempio, si rende sempre compatibile l'equazione $n + x = m$, cioè l'operazione di sottrazione, aggiungendo ai numeri naturali, come "elementi ideali" gli interi negativi. E in questa ottica sono naturalmente riguardabili tutti gli altri ampliamenti numerici. Vi sono numerosi altri esempi di aggiunta di elementi ideali. Ci limitiamo qui a ricordarne uno, non riguardante insiemi numerici, e cioè l'introduzione nella geometria dei punti impropri.[6]

Il risultato seguente mostra che gli allargamenti assicurano l'esistenza di elementi interni nonstandard in ogni entità infinita.

Teorema 2.7.1. *Sia il monomorfismo allargante. Allora, per ogni entità infinita a, risulta ${}^{\star}a \setminus \star[a] \neq \emptyset$, e quindi esistono entità interne nonstandard.*

Dimostrazione. Consideriamo su a la relazione concorrente di disuguaglianza e poniamo $a_1 = \{(e_1, e_2) \in A^2 \,|\, \hat{A} \Vdash \neg(e_1 \asymp e_2)\}$. Allora, per il Teorema 2.4.1, ${}^{\star}a_1 = \{(e_1, e_2) \in ({}^{\star}a)^2 \,|\, \mathcal{I} \Vdash \neg(e_1 \asymp e_2)\}$. Ora, essendo $\star$ allargante, esiste $b \in {}^{\star}a$ tale che

[6] L'uso del termine "elemento ideale", evidentemente non appropriato, trova però motivazioni storiche. È, infatti, legato alla terminologia a suo tempo introdotta per i numeri complessi, nei quali distinguiamo ancora oggi la parte reale da quella "immaginaria". Questa terminologia denuncia chiaramente che agli inizi gli elementi ideali erano stati considerati veramente tali, vale a dire privi, in qualche modo, di realtà.

$(e_1, b) \in {}^\star a_1$ per ogni $e_1 \in \star[a]$, cioè $e_1 \neq b$ per ogni $e_1 \in a$. Conseguentemente, risulta $b \in {}^\star a \setminus \star[a]$. Allora, ${}^\star a \setminus \star[a] \neq \emptyset$ e quindi, per il Teorema 2.3.3(viii), ci sono entità interne nonstandard. $\square$

Il prossimo risultato fornisce una condizione sufficiente (che sarà provata anche necessaria (Teorema 4.7.1)) affinchè il monomorfismo sia allargante. A tale proposito, ricordiamo che una famiglia d'insiemi verifica la **proprietà dell'intersezione finita** se ogni intersezione di un *numero finito* di suoi elementi non è vuota.

Teorema 2.7.2. *Se per ogni entità propria $a \in \hat{A}$ che verifica la proprietà dell'intersezione finita risulta $\cap \star[a] \neq \emptyset$, allora $\star$ è un allargamento.*

Dimostrazione. Sia $\Bumpeq \in \hat{A}$ una relazione concorrente di dominio $a \in A_{n+1}$. Per ogni $e \in a$, consideriamo l'insieme:

$$a_e = \{e' \in a \,|\, e' \Bumpeq e\} = \{e' \in a \,|\, \hat{A} \Vdash \langle e', e\rangle \lessdot \Bumpeq\}.$$

Sia ora a' la totalità di tutti questi insiemi, cioè $a' = \{a_e \,|\, e \in a\}$. Osserviamo intanto che a' verifica la proprietà dell'intersezione finita. Infatti, dati $e_1, \ldots, e_s \in a$, risulta $a_{e_1}, \ldots, a_{e_s} \in a'$. Poichè $\Bumpeq$ è concorrente in a, esiste $e' \in a$ tale che $e' \Bumpeq e_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Ne segue $e' \in a_{e_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$, ovvero $\bigcap_{i=1}^{s} a_{e_i} \neq \emptyset$. Dunque $\cap \star[a'] \neq \emptyset$. Esiste allora $b \in \cap \{{}^\star a_e \,|\, e \in a\}$ e quindi, per il Teorema 2.4.1,

$$\begin{aligned} b \in {}^\star a_e &= \{e' \in {}^\star a \,|\, \mathcal{I} \Vdash \langle e', {}^\star e\rangle \lessdot {}^\star \Bumpeq)\} \\ &= \{e' \in {}^\star a \,|\, (e', {}^\star e) \in {}^\star \Bumpeq\} = \{e' \in {}^\star a \,|\, e' \,{}^\star\!\Bumpeq {}^\star e\} \end{aligned}$$

per ogni $e \in a$. Dunque, esiste $b \in \mathcal{I}$ tale che $b \,{}^\star\!\Bumpeq {}^\star e$, per ogni $e \in a$. Pertanto $\star$ è allargante. $\square$

Sull'esistenza delle immersioni strette allarganti

Essendo la questione essenzialmente tecnica e non avendo alcun riflesso sul seguito dell'esposizione, riportiamo, per amore di completezza, a grandi linee, la metodologia usata per costruire, a partire da una sovrastruttura, di base A, un'altra sovrastruttura, di base B, e una applicazione $\star$ della prima nella seconda che sia un'immersione stretta allargante.[7]

Iniziamo con l'introdurre la nozione di filtro, che fornisce il punto di partenza dell'intera costruzione. Dato un insieme $I \neq \emptyset$, un **filtro** (su I) è ogni famiglia

[7]Invitando il lettore, particolarmente interessato anche agli aspetti più tecnici, a consultare il paragrafo 2.5 di [6].

non vuota $\mathcal{F} \in \mathbb{P}(I)$ tale che:
1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$;
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$;
3. $F \in \mathcal{F}$ e $F \subset E \subset I \Rightarrow E \in \mathcal{F}$.
Dunque, per 3., I appartiene al filtro; inoltre, per 2., un filtro è chiuso per intersezioni finite.

Filtro di Fréchet Sia I l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali. Allora, la famiglia degli insiemi *cofiniti* (complementi di finiti) di I è un filtro *libero* su I; cioè non contiene alcun insieme finito. Infatti, l'insieme vuoto non vi appartiene, essendo I infinito. Poi, per le leggi di De Morgan, risulta chiuso per intersezioni finite. Infine, ogni soprainsieme di un suo elemento è cofinito (in quanto il passaggio ai complementari fa passare dalla relazione $\supset$ a quella d'inclusione). Sono dunque verificate le proprietà dei filtri. Che poi il filtro sia libero deriva immediatamente dalla sua stessa definizione.

Il seguente fondamentale teorema assicura che si può sempre immergere un filtro in **ultrafiltro**, cioè un filtro $\mathcal{F}$ che verifica la condizione aggiuntiva:
4. $E \in \mathcal{F}$ o $I \setminus E \in \mathcal{F}$, per ogni $E \subset I$.

Teorema (Cartan) *Ogni filtro può essere esteso ad un ultrafiltro.*

Ciò premesso, facciamo alcune considerazioni intuitive che suggeriscono il modo di usare gli ultrafiltri per introdurre, nell'ambito dei numeri reali, i desiderati numeri infiniti e infinitesimi (obiettivo dell'analisi nonstandard). È noto che le estensioni dei sistemi numerici classici (dai naturali ai relativi, ai razionali, ai reali e infine ai complessi) possono essere effettuate ricorrendo a opportuni insiemi quozienti. In particolare, seguendo l'impostazione di Cantor, i numeri reali vengono costruiti a partire dai razionali, considerando l'insieme delle successioni a valori razionali $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ e introducendo la relazione d'equivalenza:
– $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{n\geq 0}$ sono equivalenti se $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$,
limitata, però, alle successioni di Cauchy.[8]

Volendo ora ottenere, seguendo questa metodologia basata sostanzialmente sulle successioni, un'ampliamento dei numeri reali che contenga numeri infiniti (e quindi anche infinitesimi), si potrebbe pensare di aggiungere a $\mathbb{R}$ una successione divergente, come, ad esempio, la successione dei numeri naturali $0, 1, 2. \dots$ intesa come un numero reale infinito. Osservato che, in questo ordine di idee, anche le successioni $\sqrt{2}$, 100, e^2, -5, 70, 71, 72, $\dots$, e $\ln(2^{-1})$, $\sqrt{\pi}$, -30, $\dots$, $n, n+1, \dots$

[8]Successioni $(a_n)_{n\geq 0}$ tali che per ogni razionale $\xi > 0$ esiste un naturale m tale che per ogni $n, n' > m$ risulti $|a_n - a_{n'}| < \xi$. Per maggiori dettagli si veda, ad esempio, il capitolo sesto di M.Zamansky *Introduzione all'algebra e all'analisi moderna*, Feltrinelli, 1966.

sono candidate a rappresentare il medesimo numero infinito, viene naturale pensare di identificare due successioni che coincidono definitivamente (cioè da un certo punto in poi). Questa considerazione suggerisce d'introdurre in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la relazione d'equivalenza:

$$(a_n)_{n\geq 1} \doteq (b_n)_{n\geq 1} \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = b_n\} \in \mathcal{F}',$$

ove $\mathcal{F}'$ denota il filtro di Fréchet. Ora, indicata con $[\vec{a}\,]$ la classe di equivalenza della successione $\vec{a} = (a_n)_{n\geq 0}$, non è difficile provare che la struttura di campo dei reali può essere trasportata nell'ambiente delle successioni reali ponendo $[\vec{a}\,]+[\vec{b}\,] = [\vec{a}+\vec{b}\,]$ e $[\vec{a}\,]\cdot[\vec{b}\,] = [\vec{a}\cdot\vec{b}\,]$. Passando infine alla relazione d'ordine $\leq$, viene naturale assumere $[\vec{a}\,] \leq [\vec{b}\,] \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \leq b_n\} \in \mathcal{F}'$. Così facendo, però, questo ordine, a differenza di quello reale, non è totale; basta considerare le successioni nulla e $a_n = (-1)^n$. Per ovviare a questo inconveniente, bisogna "rafforzare"la relazione di equivalenza considerando, al posto del filtro di Fréchet, un ultrafiltro $\mathcal{U}$ che lo contenga (esistente per il Teorema di Cartan); infatti, in questo caso solo uno degli insiemi dei pari e dei dispari appartiene a $\mathcal{U}$, e quindi le due successioni considerate risultano confrontabili.

Abbandonando il caso particolare dei numeri reali, queste considerazioni suggeriscono d'introdurre - dati un ultrafiltro di riferimento $\mathcal{U}$ su un insieme di indici I e una sovrastruttura $\hat{A}$ - nell'insieme $\hat{A}^I$ delle applicazioni di I in $\hat{A}$ la relazione di **uguaglianza quasi ovunque** $\doteq$ così definita:

$$f \doteq g \Leftrightarrow \{i \in I \,|\, f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$$

per ogni $f, g \in \hat{A}^I$, che risulta, come facilmente si verifica, un'equivalenza.[9] Possiamo

[9] Per fornire una giustificazione a questa terminologia, osserviamo che, tramite l'ultrafiltro $\mathcal{U}$, possiamo introdurre la *valutazione* $v : \mathcal{U} \mapsto \{0,1\}$ così definita:

$$v(J) = \begin{cases} 1 & \text{se } J \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che è una *probabilit*à su $\mathbb{P}(I)$. Infatti, $v(I) = 1$; inoltre, dati $J_1, J_2 \in \mathcal{U}$ disgiunti, otteniamo:
− se, ad esempio, $J_1 \in \mathcal{U}$, allora anche l'unione vi appartiene (per 3.) e non vi può appartenere J_2 (per 1. e 2.). Conseguentemente, $v(J_1 \cup J_2) = 1 = 1 + 0 = v(J_1) + v(J_2)$. Analoga argomentazione nell'altro caso;
− se non vi appartengono entrambi, allora $v(J_1) = v(J_2) = 0$ e $I \setminus J_1, I \setminus J_2 \in \mathcal{U}$ da cui, per 2. e le formule di De Morgan, $I \setminus (J_1 \cup J_2) = (I \setminus J_1) \cap (I \setminus J_2) \in \mathcal{U}$ e quindi $J_1 \cup J_2 \notin \mathcal{U}$, cioè $v(J_1 \cup J_2) = 0$.

Gli elementi di $\hat{A}^I$ possono dunque essere interpretati, avendo introdotto la valutazione v, come *enti aleatori* a valori in $\hat{A}$ e quindi la relazione di "uguaglianza quasi ovunque" coincide con quella classica di "uguaglianza quasi certa", come lo prova la catena di equivalenze: $f \doteq g \Leftrightarrow \{i \in I \,|\, f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow v(\{i \in I \,|\, f(i) = g(i)\}) = 1 \Leftrightarrow f = g$ (v-q.c.).

siamo allora considerare, per ogni $f \in \hat{A}^I$ la relativa classe di equivalenza $[f] = \{g \in \hat{A}^I \,|\, g \doteq f\}$, detta *fibra* di f. Nell'insieme delle fibre è possibile introdurre, poi, una relazione di appartenenza così definita:

$$[f] \dot{\in} [g] \Leftrightarrow \{i \in I \,|\, f(i) \in g(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Ricorrendo, a questo punto, alla stratificazione in livelli della sovrastruttura $\hat{A}$, possiamo considerare la **ultrapotenza ridotta** $V = \bigcup_{n \geq 0} V_n$ ponendo:

$$\begin{aligned} V_0 &= \{[f] \,|\, f : I \mapsto A\} \\ V_{n+1} &= \{[f] \,|\, f : I \mapsto A_{n+1} \setminus A_n\}. \end{aligned}$$

Quindi, V_0 è l'insieme delle classi di equivalenza delle applicazioni a valori nell'insieme degli atomi; V_{n+1} quello delle classi di equivalenza delle applicazioni a valori in A_{n+1}, ma non in A_n.
Rappresentiamo infine la sovrastruttura $\hat{A}$ nell'ultrapotenza V mediante l'applicazione iniettiva φ tale che $\varphi(a) = [\bar{a}]$, che associa ad ogni entità $a \in \hat{A}$ la classe di equivalenza associata alla funzione costante $\bar{a}$ di valore a.

Tale rappresentazione, purtroppo, non è adeguata a rappresentare un insieme come la collezione dei suoi elementi. Infatti, considerato il livello A_1, otteniamo $\varphi(A_1) = [\bar{A}_1] = \{i \in I \,|\, f(i) = A_1\} \in \mathcal{U}$; conseguentemente, pur risultando $\varphi(a) \dot{\in} \varphi(A_1)$ per ogni $a \subset A$, la trasformata $\varphi(A_1)$ non si ottiene come l'insieme dei trasformati $\varphi(a)$ (relativamente all'appartennza $\dot{\in}$).

Occorre quindi, per avere una trasformazione "fedele" dal punto di vista insiemistico, individuare un'ulteriore applicazione m che consenta di esprimere $\varphi(A_1)$ come l'insieme dei suoi elementi. A tal fine, data la sovrastruttura $\hat{B} = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ di base V_0:

$$B = B_0 = V_0; \qquad B_{n+1} = B_n \cup \mathbb{P}(B_n) \qquad (n \geq 0),$$

introduciamo la *Mostowski Collapsing Function* $\mathsf{m} : V \mapsto \hat{B}$, definita per induzione, come segue:

$$\mathsf{m}([f]) = \begin{cases} [f] & \text{se } [f] \in V_0 \\ \{\mathsf{m}([g]) \,|\, [g] \in \bigcup_{i=0}^{n-1} V_i \,\text{e}\, [g] \in [f]\} & \text{se } [f] \in V_{n+1} \end{cases}.$$

Si prova allora che m conserva i livelli (cioè $\mathsf{m}[V_n] \subset B_n \setminus B_{n-1}$ $(n > 0)$) e che:
a. $[f] \doteq [g] \Leftrightarrow \mathsf{m}([f]) = \mathsf{m}([g])$;
b. $[f] \dot{\in} [g] \Leftrightarrow \mathsf{m}([f]) \in \mathsf{m}([g])$.

A questo punto, dopo un'approfondita analisi delle proprietà di m, si ricorre al seguente celebre teorema della teoria dei modelli:

Teorema (Łoś) *Sia $W(x_1, \dots, x_s)$ un predicato s-ario limitato del linguaggio L. Considerati allora $[f^{(1)}], \dots, [f^{(s)}] \in V$, risulta:*

$$\hat{B} \Vdash W^\star(\mathsf{m}([f^{(1)}]), \dots, \mathsf{m}([f^{(s)}])) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \hat{A} \Vdash W(f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(s)})\} \in \mathcal{U},$$

per provare che l'applicazione composta $\star = \mathsf{m} \circ \varphi : \hat{A} \mapsto \hat{B}$ è un monomorfismo stretto. Rimane ancora un problema, anche se di piccolo conto: $\star$ non è un'immersione, in quanto $A \neq \star[A] \subset B = {}^\star A$. Per ovviare a questo inconveniente, basta osservare che $\star|_A$ è iniettiva e quindi identificare, seguendo l'ordinaria pratica matematica, ogni elemento $a \in A$ con la sua imagine ${}^\star a \in B$, rendendo così $\star$ una immersione stretta.

La considerazione delle applicazioni di un insieme di indici I nella sovrastruttura $\hat{A}$ e di un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I consente, dunque, di costruire una sovrastruttura $\hat{B}$ e una immersione stretta $\star$ della prima sovrastruttura nella seconda, che non è detto, però, sia un allargamento. Per convincersi, basta, fissato $i_0 \in I$, constatare, come facilmente si vede, che $\star[A] = {}^\star A$, relativamente all'ultrafiltro $\mathcal{U} = \{U \in \mathbb{P}(I) \mid i_0 \in U\}$. Conseguentemente, se A è infinito, $\star$ non può essere, per il Teorema 2.7.1, allargante.

Al fine di ottenere un ultrafiltro "buono" ai nostri fini, poniamo:

$$I = \{e \in \hat{A} \mid e \text{ insieme finito non vuoto}\}$$

e consideriamo il filtro libero su I:

$$\mathcal{F} = \{F \subset I \mid \exists j \in I \, \forall i \in I \, (i \supset j \Rightarrow i \in F)\}.$$[10]

Infine, un ultrafiltro $\mathcal{U}'$ che includa $\mathcal{F}$ (certamente esistente per il Teorema di Cartan), consente di chiudere il cerchio, in quanto sussiste il seguente fondamentale teorema di esistenza.

Teorema (Robinson) *Se $\hat{B}$ viene costruito (come descritto precedentemente) a partire da $\hat{A}$ (A infinito) usando l'ultrafiltro $\mathcal{U}'$, allora $\star$ è un allargamento.*

---

[10] Sia $I_j = \{i \in I \mid i \supset j\}$ per ogni $j \in I$. Allora, per ogni $F \in \mathcal{F}$ esiste $j \in I$ tale che $I_j \subset F$. Osservato che $j \in I_j$, otteniamo, intanto, $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Considerati poi $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, esiste $j_h \in I$ tale che $I_{j_h} \subset F_h$ $(h = 1, 2)$. Allora $I_{j_1} \cap I_{j_2} = I_{j_1 \cup j_2} \subset F_1 \cap F_2$ e quindi $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, osservato che $j_1 \cup j_2 \in I$. Infine, ogni soprainsieme di un elemento di $\mathcal{F}$ appartiene alla famiglia. Sono dunque verificate le proprietà dei filtri. Per provare che $\mathcal{F}$ è libero, nel caso che ci interessa di A infinito, basta osservare che ogni suo elemento è infinito, dovendo contenere tutti i soprainsiemi finiti di qualche insieme finito.

Capitolo 3

Starconcetti

> To use nonstandard analysis we need to develop the ability to show that a given property can be expressed in a transferable form.
>
> *R.Goldblatt, Lectures on the Hyperreals*

Come abbiamo sottolineato al momento della definizione dei monomorfismi e come è emerso chiaramente in seguito, il Principio di Leibniz è lo strumento base indispensabile per lo studio della sovrastruttura interna, ovvero dei fondamenti dell'analisi nonstandard. La sua applicazione richiede, però, una preventiva formalizzazione limitata nel linguaggio L dei metaenunciati che interessano la nostra analisi. Questa è spesso la fase più critica; a causa della povertà del linguaggio L, che è dotato di soltanto quattro formule atomiche, essa rappresenta, infatti, un passaggio particolarmente oneroso appena si abbiano da formalizzare frasi di qualche complessità. Ad esempio, supposto che l'insieme ordinato dei numeri naturali $\mathbb{N}(\leq)$ sia incluso in A, la formalizzazione relativa al metapredicato $X(x)$: "x è un insieme finito" è data dalla wff:

$$
\begin{aligned}
W(x) : \sqcup x_1 \lessdot \mathbb{P}(\mathbb{N})\,(\sqcup z \lessdot \mathbb{N}\,(\sqcap z_1 \lessdot x_1\,(z_1 \lessdot \mathbb{N} \wedge \langle z_1, z\rangle \lessdot \leq) \\
\wedge \sqcap\, z_1 \in \mathbb{N}\,(\langle z_1, z\rangle \lessdot\, \leq \to z_1 \lessdot x_1)) \\
\wedge \sqcup\, u\,(\sqcap u_1 \lessdot u\, \sqcup y \lessdot x \sqcup z_2 \lessdot x_1\,(\langle y, z_2\rangle \asymp u_1) \\
\wedge \sqcap\, y_1 \lessdot x\, \sqcap z_3, z_4 \lessdot x_1\,(\langle y_1, z_3\rangle \lessdot u \wedge \langle y_1, z_4\rangle \lessdot u \to z_3 \asymp z_4)) \\
\wedge \sqcap\, y_2, y_3 \lessdot x\, \sqcap z_5 \lessdot x_1\,(\langle y_2, z_5\rangle \lessdot u \wedge \langle y_3, z_5\rangle \lessdot u \to y_2 \asymp y_3)),
\end{aligned}
$$

ove la prima wff formalizza che x_1 è un insieme di numeri naturali coincidente con il segmento iniziale $\{0, \ldots, z\}$; la seconda che u è una relazione fra x e x_1, la terza che u è un'applicazione; la quarta, infine, che u è iniettiva.

Sia ora a una entità propria di $\hat{A}$. Esiste allora un numero naturale n tale che $a \in A_{n+1}$. Conseguentemente, considerata la wfs limitata:

$$\begin{aligned} W : \sqcup x_1 \lessdot \mathbb{P}(\mathbb{N})\, (\sqcup z \lessdot \mathbb{N} \sqcap z_1 \lessdot \mathbb{N}\, (z_1 \lessdot x_1 \to \langle z_1, z\rangle \lessdot \leq) \\ \wedge \sqcap z_1 \lessdot \mathbb{N}\, (\langle z_1, z\rangle \lessdot \leq \to z_1 \lessdot x_1)) \\ \wedge \sqcup u \lessdot A_{n+3}\, (\sqcap u_1 \lessdot A_{n+2}\, (u_1 \lessdot u \to \sqcup y \lessdot a \sqcup z_2 \lessdot A\, (z_2 \lessdot x_1 \\ \to \langle y, z_2\rangle \asymp u_1))) \\ \wedge \sqcap y_1 \lessdot a \sqcap z_3, z_4 \lessdot A\, (z_3, z_4 \lessdot x_1 \wedge \langle y_1, z_3\rangle \lessdot u \wedge \langle y_1, z_4\rangle \lessdot u \\ \to z_3 \asymp z_4)) \\ \wedge \sqcap y_2, y_3 \lessdot a \sqcap z_5 \lessdot A(z_5 \lessdot x_1 \wedge \langle y_2, z_5\rangle \lessdot u \wedge \langle y_3, z_5\rangle \lessdot u \\ \to y_2 \asymp y_3)) \end{aligned}$$

risulta, per i Teoremi 1.1.1(i),(iii) e 1.1.2(ii), ${}^{\imath_{\hat{A}}}W(a)$ equivalente a ${}^{\imath_{\hat{A}}}W$. Allora, per il Principio dl Leibniz, ${}^{\imath_{\hat{A}}}W(a)$ è anche equivalente alla:

$$\begin{aligned} {}^{\imath_{\mathcal{I}}}W^\star : \exists x_1 \in {}^\star\mathbb{P}(\mathbb{N})\, (\exists z \in {}^\star\mathbb{N} \forall z_1 \in {}^\star\mathbb{N}\, (z_1 \in x_1 \Rightarrow (z_1, z) \in {}^\star \leq) \\ \mathrm{e} \forall z_1 \in {}^\star\mathbb{N}\, ((z_1, z) \in {}^\star \leq \Rightarrow z_1 \in x_1)) \\ \mathrm{e} \exists u \in {}^\star A_{n+3}\, (\forall u_1 \in {}^\star A_{n+2}\, (u_1 \in u \Rightarrow \exists y \in {}^\star a \exists z_2 \in {}^\star A\, (z_2 \in x_1 \\ \Rightarrow (y, z_2) = u_1))) \\ \mathrm{e} \forall y_1 \in {}^\star a \forall z_3, z_4 \in {}^\star A\, (z_3, z_4 \in x_1\, \mathrm{e}\, (y_1, z_3) \in u\, \mathrm{e}\, (y_1, z_4) \in u \\ \Rightarrow z_3 = z_4)) \\ \mathrm{e} \forall y_2, y_3 \in {}^\star a \forall z_5 \in {}^\star A\, (z_5 \in x_1\, \mathrm{e}\, (y_2, z_5) \in u\, \mathrm{e}\, (y_3, z_5) \in u \\ \Rightarrow y_2 = y_3)) \end{aligned}$$

e quindi, per il Teoremi 2.1.3(iv), 2.3.3(vii) e 2.5.1(ii), anche alla:

$$\begin{aligned} \exists x_1 \in {}^\star\mathbb{P}(\mathbb{N})\, (\exists z \in {}^\star\mathbb{N}\, (\forall z_1 \in x_1\, (z_1 \in {}^\star\mathbb{N}\, \mathrm{e}\, (z_1, z) \in {}^\star \leq) \\ \mathrm{e} \forall z_1 \in {}^\star\mathbb{N}\, ((z_1, z) \in {}^\star \leq \Rightarrow z_1 \in x_1)) \\ \mathrm{e} \exists u \in {}^\star A_{n+3}\, (\forall u_1 \in u \exists y \in {}^\star a \exists z_2 \in x_1\, ((y, z_2) = u_1) \\ \mathrm{e} \forall y_1 \in {}^\star a \forall z_3, z_4 \in x_1\, ((y_1, z_3) \in u\, \mathrm{e}\, (y_1, z_4) \in u \Rightarrow z_3 = z_4)) \\ \mathrm{e} \forall y_2, y_3 \in {}^\star a \forall z_5 \in x_1\, ((y_2, z_5) \in u\, \mathrm{e}\, (y_3, z_5) \in u \Rightarrow y_2 = y_3), \end{aligned}$$

ove la prima proposizione afferma che x_1 è, per il Teorema 2.3.3(vii), un insieme *interno* coincidente con il segmento iniziale $\{0, \dots, z\}$ di ${}^\star\mathbb{N}$[1]; le altre che u è un'applicazione iniettiva *interna* di ${}^\star a$ in x_1.

Dunque: a è un insieme finito se e solo se esiste un'applicazione iniettiva interna che mappa ${}^\star a$ in un segmento iniziale chiuso di ${}^\star\mathbb{N}$ secondo l'ordine ${}^\star \leq$.

Introdotto allora il metapredicato:

– $\star$-$X(x)$: Esiste un'applicazione iniettiva interna che mappa x in un segmento iniziale chiuso di ${}^\star\mathbb{N}$ secondo l'ordine ${}^\star \leq$",[2]

otteniamo l'equivalenza:

$$X(a) \Leftrightarrow \star\text{-}X({}^\star a) \text{ per ogni } a \in \hat{A}.$$

A questo punto si potrebbe evitare una completa formalizzazione delle frasi del metalinguaggio riguardanti insiemi finiti, passando ad una *semi-formalizzazione* che contempli $X(x)$ come una nuova formula atomica da aggiungere alle quattro formule atomiche già presenti; naturalmente, ai fini dell'applicazione del Principio di Leibniz a questo nuovo contesto, bisognerebbe associare a $X(a)$, come trasformato, il metaenunciato $\star$-$X({}^\star a)$.

Ma il problema della formalizzazione, anche nel nuovo contesto, si ripresenterebbe con riferimento ad altri concetti (ad esempio a quello di "applicazione composta"). È naturale allora chiedersi se sia possibile affrontare il problema da un punto di vista più generale. Precisamente: a partire da una acquisita conoscenza del comportamento via trasferimento di certi concetti (riguardati come "formule atomiche"di un linguaggio in evoluzione) si tratta di vedere se sia possibile stabilire regole per lo studio del comportamento, via trasferimento, di nuovi concetti (composti mediante le già acquisite formule atomiche) in vista di ottenere un ulteriore arricchimento delle "formule atomiche".

Cioè, se sia possibile introdurre una metodologia generale che consenta di associare ad ogni metafrase $X(x_1, \dots, x_s)$ una metafrase $\star$-$X(x_1, \dots, x_s)$ in modo tale che, in analogia a quanto visto prima, sussista l'equivalenza

$$X(a_1, \dots, a_s) \Leftrightarrow \star\text{-}X({}^\star a_1, \dots, {}^\star a_s) \text{ per ogni } a_1, \dots, a_s \in \hat{A} \tag{3.1}$$

che può anche esprimersi così: se $a_1, \dots, a_s \in \hat{A}$ realizzano il *concetto* espresso

[1]Per il Teorema 2.4.3(ii), ${}^\star \leq$ è una relazione binaria. È facile poi rendersi conto che è anche una relazione d'ordine in ${}^\star\mathbb{N}$, ricorrendo a PdL e alle formalizzazioni delle proprietà, riflessiva, simmetrica e transitiva, che lasciamo, come esercizio, al lettore.

[2]La dichiarazione d'internalità di x può essere omessa, essendo x dominio di una applicazione interna (Teorema 2.5.2(iii)).

dalla $X(x_1, \ldots, x_s)$, allora le loro trasformate ${}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s$ soddisfano allo $\star$-*concetto* $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$; e viceversa.

Come vedremo nelle prossime sezioni, la risposta al quesito posto è positiva. Anzi, grazie alla procedura che seguiremo per la costruzione di $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$, la (3.1) apparirà come una generalizzazione del Principio di Leibniz.

Passiamo ora ad una breve descrizione del contenuto del capitolo. Nelle prime due sezioni viene dapprima costruito un opportuno prolungamento $(\star)$ del monomorfismo $\star$ ai sottoinsiemi C di $\hat{A}$ (anche non entità di $\hat{A}$), tramite il passaggio al limite di opportune successioni di entità proprie standard, e poi studiate le sue principali proprietà.

Nella terza viene finalmente introdotta la nozione cardine di *starconcetto* ($\star$-*concetto*) provandone due proprietà fondamentali: il *principio di trasferimento*, estensione del Principio di Leibniz a questo nuovo contesto, e il *principio di sostituzione.*

Nella quarta si studiano le proprietà relative alla composizione, con i connettivi logici e i quantificatori, degli $\star$-concetti; in particolare, si fornisce una condizione sufficiente (e necessaria, nel caso che $\star$ sia un allargamento) per poter scambiare tra loro il simbolo $\star$ e i quantificatori - nel senso che sussistono le equivalenze $\star$-$(\exists X) \Leftrightarrow \exists \star$-$X$ e $\star$-$(\forall X) \Leftrightarrow \forall \star$-$X$ - che conduce alla nozione di *quantificatore finitamente limitabile*, basilare in tutto quello che segue.

Dopo aver generalizzato nella quinta il Teorema 2.4.1, forniamo nella sesta un "catalogo" degli $\star$-concetti che più frequentemente vengono usati nella seconda e terza parte del testo.

Infine nell'ultima si studiano, tramite gli $\star$-concetti fondamentali, le trasformate di alcune strutture algebriche (monoidi, gruppi e campi) e quelle di alcune applicazioni, intese come entità della sovrastruttura $\hat{A}$, completando così il Teorema 2.4.3 con ulteriori proprietà.

Per il lettore non particolarmente interessato agli aspetti tecnici consigliamo di limitarsi a leggere le sezioni prima, terza, sesta e settima; i teoremi (eventualmente senza dimostrazione) 3.4.1 e 3.5.1; per quanto riguarda gli $\star$-concetti fondamentali (escluso quello relativo all'insieme potenza) tenere sempre presente che la loro espressione coincide con quella dei concetti da cui derivano, salvo la condizione di internalità per le variabili libere.

3.1 Prolungamento del monomorfismo

Riprendendo in esame il problema sopra posto, cominciamo con l'osservare che in (3.1) le metafrasi $X(x_1,\dots,x_s)$ e $\star$-$X(x_1,\dots,x_s)$ intervengono come metaenunciati dopo una preliminare sostituzione delle "variabili" $x_1,\dots,x_s$ con entità di $\hat{A}$ e $\mathcal{I}$ (Teorema 2.1.3(i)), rispettivamente.

Questo vincolo posto sulla scelta delle variabili conferisce ai concetti espressi dalle due metafrasi un significato *relativizzato* alla sovrastruttura $\hat{A}$ e alla sovrastruttura interna $\mathcal{I}$, rispettivamente. Ora, ogni concetto relativizzato ad una sovrastruttura (interna o no) può essere espresso, equivalentemente, dal concetto di appartenenza ad un opportuno sottoinsieme. Infatti, con riferimento ad $\hat{A}$ e a $X(x_1,\dots,x_s)$, poniamo:

$$C = \{(e_1,\dots,e_s) \in \hat{A}^s \,|\, X(e_1,\dots,e_s)\}.$$

Poichè, per il teorema 1.1.2(i), $\hat{A}^s \subset \hat{A}$, risulta

$$(a_1,\dots,a_s) \in C \Leftrightarrow X(a_1,\dots,a_s)$$

per ogni $a_1,\dots,a_s \in \hat{A}$. Per quanto riguarda $\mathcal{I}$ e $\star$-$X(x_1,\dots,x_s)$, basta sostituire, nelle considerazioni precedenti, $\hat{A}$ con $\mathcal{I}$, X con $\star$-X, C con C' e ricorrere ai Teoremi 2.1.3(i) e 2.2.3(iv), per constatare che $\mathcal{I}^s \subset \mathcal{I}$.

Dunque, ogni concetto relativizzato ad $\hat{A}$ (a $\mathcal{I}$) trova una sua rappresentazione in un sottoinsieme C; viceversa, ogni sottoinsieme C di $\hat{A}$ (di $\mathcal{I}$) rappresenta un concetto relativizzato (almeno la relazione di appartenenza a C).

Queste considerazioni lasciano intendere come il problema di associare a $X(x_1,\dots,x_s)$ una $\star$-$X(x_1,\dots,x_s)$ in modo che sussista (3.1) possa essere ricondotto a quello di costruire un'applicazione $(\star)$ che associ ad ogni sottoinsieme C di $\hat{A}$ un sottoinsieme ${}^{(\star)}C$ di $\mathcal{I}$ (ovvero un'applicazione di $\mathbb{P}(\hat{A})$ in $\mathbb{P}(\mathcal{I})$) in modo che, *identificato* $\star$-$(x \in C)$ con l'appartenenza $x \in {}^{(\star)}C$, sia verificata la seguente riformulazione di (3.1):

$$a \in C \Leftrightarrow {}^{\star}a \in {}^{(\star)}C \text{ per ogni } a \in \hat{A}. \tag{3.2}$$

Prima di passare alla costruzione dell'applicazione osserviamo che, essendo $\hat{A} \setminus A = \bigcup_{n\geq 1}(A_n \setminus A) \subset \mathbb{P}(\hat{A})$ (Teorema 1.1.1(ii)), (3.2) deve valere, in particolare, per ogni entità propria di $\hat{A}$. Per il Teorema 2.1.1(i), allora, ad ogni entità propria C di $\hat{A}$, l'applicazione in oggetto dovrà associare un sottoinsieme ${}^{(\star)}C$ tale che ${}^{\star}a \in {}^{\star}C \Leftrightarrow {}^{\star}a \in {}^{(\star)}C$. Viene allora naturale richiedere che ${}^{(\star)}C = {}^{\star}C$, cioè che $(\star)$ sia un prolungamento del monomorfismo $\star$.

Veniamo ora alla definizione dell'applicazione $(\star)$. Sia $C \subset \hat{A}$. In generale C non è un'entità. Tenuto conto, però, che $A_n \uparrow \hat{A}$[3], per l'insieme $C_n = C \cap A_n$ $(n \geq 0)$ risulta $C_n \in \hat{A} \setminus A$ per ogni n e $C_n \uparrow C$. L'insieme C è quindi raggiungibile come limite di una successione non decrescente di entità proprie. Viene naturale a questo punto pensare di raggiungere ${}^{(\star)}C$ in modo analogo ponendo:

$$ {}^{(\star)}C = \lim_{n\to\infty} {}^{\star}C_n = \bigcup_{n\geq 0} {}^{\star}(C \cap A_n), \quad \text{per ogni } C \subset \hat{A}, \tag{3.3} $$

osservato che la successione $({}^{\star}C_n)_{n\geq 0}$ è non decrescente (Teorema 2.1.1(iii)).

Ora, dalla $C_n \subset A_n$ otteniamo ${}^{\star}C_n \subset {}^{\star}A_n$ e quindi, per il Teorema 2.1.3(i), ${}^{(\star)}C = \bigcup_{n\geq 0} {}^{\star}C_n \subset \bigcup_{n\geq 0} {}^{\star}A_n = \mathcal{I}$; dunque, come desiderato, $(\star)$ è un'applicazione di $\mathbb{P}(\hat{A})$ in $\mathbb{P}(\mathcal{I}) \subset \mathbb{P}(\hat{B})$.

Inoltre, la restrizione di $(\star)$ su $\hat{A} \setminus A$ coincide con il monomorfismo $\star$. Basta osservare, per questo, che se C è un'entità propria riesce $C \in A_m$ per qualche m e quindi $C_n = C$ definitivamente (cioè per ogni $n \geq m$). È allora definitivamente ${}^{\star}C_n = {}^{\star}C$, da cui ${}^{(\star)}C = \lim_{n\to\infty} {}^{\star}C_n = {}^{\star}C$.

Rimane ancora da provare che sussiste (3.2). Dato $a \in \hat{A}$, assumiamo $a \in C$. Esiste $m \geq 0$ tale che $a \in A_m$ e quindi $a \in C_m$. Ne segue, per il Teorema 2.1.1(i),${}^{\star}a \in {}^{\star}C_m$ da cui otteniamo ${}^{\star}a \in \bigcup_{n\geq 0} {}^{\star}C_n = \lim_{n\to\infty} {}^{\star}C_n = {}^{\star}C$. In modo analogo si prova l'implicazione opposta.

L'applicazione $(\star)$ è inoltre **iniettiva**. Infatti, sia ${}^{(\star)}C = {}^{(\star)}C'$. Per (3.2) si ha $a \in C \Leftrightarrow {}^{\star}a \in {}^{(\star)}C = {}^{(\star)}C' \Leftrightarrow a \in C'$ e quindi $C = C'$.

Dalla $(C_{n+h} \setminus C_n) \cap A_n = (C_{n+h} \cap A_n) \setminus C_n = ((C \cap A_{n+h}) \cap A_n) \setminus C_n = C_n \setminus C_n = \emptyset$ otteniamo, per il Teorema 2.3.3(i),(iii), $({}^{\star}C_{n+h} \setminus {}^{\star}C_n) \cap {}^{\star}A_n = \emptyset$. Tenuto conto anche delle $C_n \subset A_n$, ${}^{\star}C_n \subset {}^{\star}A_n$, le entità C_n e ${}^{\star}C_n$ possono allora essere riguardate come le "approssimazioni" di C e di ${}^{(\star)}C$ ai livelli A_n e ${}^{\star}A_n$, rispettivamente.

La proposizione (ii) del teorema seguente fornisce un utile criterio per determinare lo $(\star)$-trasformato di un insieme di s-ple.

[3]Considerati un insieme C e una successione $(C_n)_{n\geq 1}$ qualsiasi, adottiamo, per semplicità di esposizione, la notazione $C_n \uparrow C$ per indicare che la successione è non decrescente e che $C = \lim_{n\to\infty} C_n$.

Teorema 3.1.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) ${}^{(\star)}(\hat{A}^s) \subset \mathcal{I}^s$;

(ii) Sia $C \subset \hat{A}^s$ *e* $C'_n = C \cap A^s_n$ $(n \geq 0)$*. Allora,* ${}^\star C'_n \uparrow {}^{(\star)}C$.

Dimostrazione. (i) Tramite i Teoremi 1.1.2(ii) e 1.1.4(v), si ha

$$\hat{A}^s \cap A_{n+2s-2} \subset \pi^s_1(A_{n+2s-2}) \times \cdots \times \pi^s_s(A_{n+2s-2}) \in \hat{A}$$

da cui, mediante i Teoremi 2.1.1(iii), 2.1.2(i) e 2.4.3(i), otteniamo

$$\begin{aligned} {}^\star(\hat{A}^s \cap A_{n+2s-2}) &\subset {}^\star(\pi^s_1(A_{n+2s-2}) \times \cdots \times \pi^s_s(A_{n+2s-2})) \\ &= {}^\star(\pi^s_1(A_{n+2s-2})) \times \cdots \times {}^\star(\pi^s_s(A_{n+2s-2})) \subset \mathcal{I}^s. \end{aligned}$$

Risulta allora ${}^{(\star)}(\hat{A}^s) = \bigcup_{n\geq 0} {}^\star(\hat{A}^s \cap A_{n+2s-2}) \subset \mathcal{I}^s$.

(ii) Essendo, per il Teorema 1.1.2(i), $A^s_n \subset A_{n+2s-2}$, risulta $C'_n = (C \cap A^s_n) \cap A_{n+2s-2} = C_{n+2s-2} \cap A^s_n$. Trasformando si ottiene, per il Teorema 2.3.3(iii), ${}^\star C'_n = {}^\star C_{n+2s-2} \cap {}^\star A^s_n$ e quindi passando al limite, tenuto conto che $C'_n \subset C'_{n+1}$ $(n \geq 0)$ e dei Teoremi 2.1.3(i), 2.2.3(vi), risulta

$$\lim_{n\to\infty} {}^\star C'_n = \bigcup_{n\geq 1} ({}^\star C_{n+2s-2} \cap {}^\star A^s_n) = (\bigcup_{n\geq 1} {}^\star C_{n+2s-2}) \cap (\bigcup_{n\geq 1} {}^\star A^s_n) = {}^{(\star)}C \cap \mathcal{I}^s.$$

Ora, tenuto conto che dalla $C \subset \hat{A}^s$ segue ${}^{(\star)}C = \bigcup_{n\geq 0} {}^\star(C \cap A_n) \subset \bigcup_{n\geq 0} {}^\star(\hat{A}^s \cap A_n) = {}^{(\star)}(\hat{A}^s)$, tramite (i) si ha la tesi. □

Osservato che le successioni non decrescenti $(C'_n)_{n\geq 0}$ e $(C_n)_{n\geq 0}$ convergono allo stesso limite C, la (ii) del teorema appena provato assicura che le corrispondenti successioni trasformate convergono al trasformato ${}^{(\star)}C$ di C. Può allora nascere il sospetto che questo risultato sussista in generale, che valga, cioè, la proposizione: se due successioni non decrescenti convergono ad uno stesso limite in $\hat{A}$, anche le loro successioni $(\star)$-trasformate convergono allo stesso limite in $\mathcal{I}$. Il controesempio seguente prova, però, che ciò non è vero. Dato $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ numerabile, consideriamo le successioni $D_n = A$ e $D'_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $(n \geq 0)$. Riesce ovviamente D_n, $D'_n \uparrow A$, mentre ${}^\star D_n \uparrow {}^\star A$ e ${}^\star D'_n = \{{}^\star a_1, \ldots, {}^\star A_n\} \uparrow \star[A]$. Ne segue l'asserto tutte le volte che il monomorfismo $\star$ è allargante (Teorema 2.7.1).

3.2 Alcune proprietà del prolungamento

Il prolungamento $(\star)$ verifica proprietà analoghe a quelle del monomorfismo $\star$. Nel teorema seguente ne riportiamo quelle che hanno particolare interesse per gli sviluppi successivi.

Proviamo preliminarmente un lemma che fornisce alcune proprietà dei limiti di successioni non decrescenti di insiemi. Per alleggerire l'esposizione, introduciamo la notazione seguente inerente le s-ple che sono "decurtate" del termine i-simo: $\vec{x}_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_s)$ $(i = 1, \dots, s)$ e quella delle $(s-1)$-uple che vengono invece "aumentate" inserendovi x come termine i-simo: $(\vec{x}_{-i}; x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_s)$ $(i = 1, \dots, s)$.

Lemma 3.2.1. *Sia $E_n \uparrow E$ e $F_n \uparrow F$. Allora, $E_n \cap F_n \uparrow E \cap F$, $F \cap E_n \uparrow F \cap E$, $E_n^s \uparrow E^s$ e $p_j^s(E_n) \uparrow p_j^s(E)$.*

Dimostrazione. Osserviamo, innanzitutto, che le successioni considerate sono tutte non decrescenti.

Per quanto riguarda la prima convergenza, dobbiamo verificare che $\bigcup_{n\geq 0}(E_n \cap F_n) = (\bigcup_{n\geq 0} E_n) \cap (\bigcup_{n\geq 0} F_n)$. Ora, essendo l'inclusione $\subset$ banale, proviamo l'opposta. Sia $e \in (\bigcup_{n\geq 0} E_n) \cap (\bigcup_{n\geq 0} F_n)$; cioè, $e \in \bigcup_{n\geq 0} E_n$ e $e \in \bigcup_{n\geq 0} F_n$. Esistono dunque h, k tali che $e \in E_h$ e $e \in F_k$. Posto allora $n = \max(h, k)$, risulta $e \in E_n \cap F_n \subset \bigcup_{n\geq 0}(E_n \cap F_n)$.

La seconda convergenza si ottiene dalla prima, ponendo $F_n = F$ per ogni $n \geq 0$.

Passando alla terza convergenza, dobbiamo provare $(\bigcup_{n\geq 0} E_n)^s = \bigcup_{n\geq 0} E_n^s$. Sia intanto $e' \in (\bigcup_{n\geq 0} E_n)^s$. Esistono allora $e_1, \dots, e_s \in \bigcup_{n\geq 0} E_n$ tali che $e' = \vec{e}$. Conseguentemente, $e_i \in E_{n_i}$ $(i = 1, \dots, s)$ e quindi, posto $n = \max(n_1, \dots, n_s)$, risulta $e_i \in E_n$ $(i = 1, \dots, s)$; dunque $e' \in E_n^s \subset \bigcup_{n\geq 0} E_n^s$. Viceversa, sia $e' \in \bigcup_{n\geq 0} E_n^s$. Esiste allora m tale che $e' \in E_m^s$. Ne segue che esistono $e_1, \dots, e_s \in E_m \subset \bigcup_{n\geq 0} E_n$ tali che $e' = \vec{e}$ e quindi $e' \in (\bigcup_{n\geq 0} E_n)^s$.

Considerando infine l'ultima convergenza, poniamo, per semplicità, $p = p_j^s$. Dobbiamo provare che $p(\bigcup_{n\geq 0} E_n) = \bigcup_{n\geq 0} p(E_n)$. Sia intanto $e \in p(\bigcup_{n\geq 0} E_n)$. Esistono allora $e_1, \dots, e_s$ tali che $e = \vec{e}_{-j}$ e $\vec{e} \in \bigcup_{n\geq 0} E_n$. Ne segue che esiste m tale che $\vec{e} \in E_m$ e quindi $e \in p(E_m) \subset \bigcup_{n\geq 0} p(E_n)$. Viceversa, sia $e \in \bigcup_{n\geq 0} p(E_n)$. Dunque $e \in p(E_m)$ per qualche m. Esistono quindi $e_1, \dots, e_s$ tali che $e = \vec{e}_{-j}$ e $\vec{e} \in E_m \subset \bigcup_{n\geq 0} E_n$, cioè $e \in p(\bigcup_{n\geq 0} E_n)$. □

Teorema 3.2.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $^{(\star)}C \cap {}^{\star}A_n = {}^{\star}C_n$;

(ii) $^{(\star)}\hat{A} = \mathcal{I}$;

(iii) $C^{(1)} \subset C^{(2)} \Leftrightarrow {}^{(\star)}C^{(1)} \subset {}^{(\star)}C^{(2)}$;

(iv) ${}^{(\star)}(C^{(1)} \setminus C^{(2)}) = {}^{(\star)}C^{(1)} \setminus {}^{(\star)}C^{(2)}$;

(v) ${}^{(\star)}(C^{(1)} \cap \cdots \cap C^{(s)}) = {}^{(\star)}C^{(1)} \cap \cdots \cap {}^{(\star)}C^{(s)}$;

(vi) ${}^{(\star)}(C^{(1)} \cup \cdots \cup C^{(s)}) = {}^{(\star)}C^{(1)} \cup \cdots \cup {}^{(\star)}C^{(s)}$;

(vii) ${}^{(\star)}(C^{(1)} \times \cdots \times C^{(s)}) = {}^{(\star)}C^{(1)} \times \cdots \times {}^{(\star)}C^{(s)}$;

(viii) $C \subset \hat{A}^s \Leftrightarrow {}^{(\star)}C \subset \mathcal{I}^s$;

(ix) ${}^{(\star)}(p_j^s(C)) \supset p_j^s({}^{(\star)}C)$;

(x) *Se per ogni* n *esiste* h *tale che* $A_n^{s-1} \cap p_j^s(C \cap A_h^s) = A_n^{s-1} \cap p_j^s(C)$, *allora* ${}^{(\star)}(p_j^s(C)) = p_j^s({}^{(\star)}C)$;

(xi) ${}^{(\star)}(p_j^s(C)) \cap \star[\hat{A}] = p_j^s({}^{(\star)}C) \cap \star[\hat{A}]$;

(xii) ${}^{(\star)}(\overset{s,r}{\underset{\hat{A}}{\rightharpoondown}}(C)) = \overset{s,r}{\underset{\mathcal{I}}{\rightharpoondown}}({}^{(\star)}C)$ *e* ${}^{(\star)}(\overset{s,r}{\underset{\hat{A}}{\leftharpoondown}}(C)) = \overset{s,r}{\underset{\mathcal{I}}{\leftharpoondown}}({}^{(\star)}C)$.[4]

Dimostrazione. (i) Dato n, dalla ${}^\star C_m \cap {}^\star A_n = {}^\star(C_m \cap A_n) = {}^\star(C \cap (A_m \cap A_n)) = {}^\star C_n$ $(m \geq n)$ si ha ${}^{(\star)}C \cap {}^\star A_n = (\bigcup_{m \geq n} {}^\star C_m) \cap {}^\star A_n = \bigcup_{m \geq n}({}^\star C_m \cap {}^\star A_n) = {}^\star C_n$.

(ii) Risulta, per il Teorema 2.1.3(i), ${}^{(\star)}\hat{A} = \lim_{n \to \infty} {}^\star(\hat{A} \cap A_n) = \lim_{n \to \infty} {}^\star A_n = \mathcal{I}$.

(iii) Sia $C^{(1)} \subset C^{(2)}$. Risulta, per (i), ${}^{(\star)}C^{(1)} = \bigcup_{n \geq 0}({}^{(\star)}C^{(1)} \cap {}^\star A_n) \subset \bigcup_{n \geq 0}({}^{(\star)}C^{(2)} \cap {}^\star A_n) = {}^{(\star)}C^{(2)}$. Sia ora ${}^{(\star)}C^{(1)} \subset {}^{(\star)}C^{(2)}$ e $e \in C^{(1)}$. Allora, per (3.2), ${}^\star e \in {}^{(\star)}C^{(1)}$. Ne segue ${}^\star e \in {}^{(\star)}C^{(2)}$ e quindi, sempre per (3.2), $e \in C^{(2)}$.

(iv) Posto $C = C^{(1)} \setminus C^{(2)}$, riesce, qualunque sia $n \geq 0$, $C_n = (C^{(1)} \setminus C^{(2)}) \cap A_n = (C^{(1)} \cap A_n) \setminus (C^{(2)} \cap A_n) = C_n^{(1)} \setminus C_n^{(2)}$ e quindi, per il Teorema 2.3.3(i), ${}^\star C_n = {}^\star C_n^{(1)} \setminus {}^\star C_n^{(2)}$.

Proviamo ora l'inclusione $\subset$. Sia $e \in {}^{(\star)}C$. Esiste allora n tale che $e \in {}^\star C_n$. Tenuto presente che la successione di termini ${}^\star C_n$ è non decrescente, otteniamo

---

[4] Ove, qualunque siano gli insiemi E, F tali che $F \subset E$,

$$\begin{aligned} \overset{s,r}{\underset{E}{\rightharpoondown}}(F) &= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in E^{s+r} \mid (e_1, \ldots, e_s) \in F\} \\ \overset{s,r}{\underset{E}{\leftharpoondown}}(F) &= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in E^{s+r} \mid (e_{r+1}, \ldots, e_{r+s}) \in F\} \end{aligned}$$

sono, rispettivamentre, il *cilindro* destro e sinistro di F.

$e \in {}^\star C_{n+h} = {}^\star C^{(1)}_{n+h} \setminus {}^\star C^{(2)}_{n+h}$ per ogni $h \geq 0$. Ne segue $e \in \bigcup_{h\geq 0} {}^\star C^{(1)}_{n+h} = {}^{(\star)}C^{(1)}$, $e \notin \bigcup_{h\geq 0} {}^\star C^{(2)}_{n+h} = {}^{(\star)}C^{(2)}$ e quindi $e \in {}^{(\star)}C^{(1)} \setminus {}^{(\star)}C^{(2)}$.

Proviamo infine l'inclusione opposta. Sia $e \in {}^{(\star)}C^{(1)} \setminus {}^{(\star)}C^{(2)}$. Esiste dunque m tale che $e \in {}^\star C^{(1)}_m$, mentre $e \notin {}^\star C^{(2)}_n$ qualunque sia $n \geq 0$. Riesce pertanto $e \in {}^\star C^{(1)}_m \setminus {}^\star C^{(2)}_m = {}^\star C_m \subset {}^{(\star)}C$.

(v) Posto $C = C^{(1)} \cap \cdots \cap C^{(s)}$, si ha $C_n = C^{(1)}_n \cap \cdots \cap C^{(s)}_n$ da cui, tramite il Teorema 2.3.3(iii), otteniamo

$$\begin{aligned} {}^{(\star)}C &= \bigcup_{n\geq 0} {}^\star(C^{(1)}_n \cap \cdots \cap C^{(s)}_n) = \bigcup_{n\geq 0} ({}^\star C^{(1)}_n \cap \cdots \cap {}^\star C^{(s)}_n) \\ &= (\bigcup_{n\geq 0} {}^\star C^{(1)}_n) \cap \cdots \cap (\bigcup_{n\geq 0} {}^\star C^{(2)}_n) = {}^{(\star)}C^{(1)} \cap \cdots \cap {}^{(\star)}C^{(2)}. \end{aligned}$$

(vi) Prova analoga alla precedente, usando il Teorema 2.3.3(iv).

(vii) Posto $C = C^{(1)} \times \cdots \times C^{(s)}$, risulta

$$C'_n = (C^{(1)} \times \cdots \times C^{(s)}) \cap A^s_n = (C^{(1)} \cap A_n) \times \cdots \times (C^{(s)}) \cap A_n) = C^{(1)}_n \times \cdots \times C^{(s)}_n$$

da cui, tramite (i) e il Teorema 2.4.3(i), otteniamo

$$\begin{aligned} {}^\star C'_n &= {}^\star C^{(1)}_n \times \cdots \times {}^\star C^{(s)}_n = ({}^{(\star)}C^{(1)} \cap {}^\star A_n) \times \cdots \times ({}^{(\star)}C^{(s)} \cap {}^\star A_n) \\ &= ({}^{(\star)}C^{(1)} \times \cdots \times {}^{(\star)}C^{(s)}) \cap ({}^\star A_n)^s \end{aligned}$$

e quindi passando al limite, tenuto conto dei teoremi 2.1.3(i), 3.1.1(ii) e del Lemma 3.2.1, risulta

$$\begin{aligned} {}^{(\star)}C &= \lim_{n\to\infty} {}^\star C'_n = ({}^{(\star)}C^{(1)} \times \cdots \times {}^{(\star)}C^{(s)}) \cap \lim_{n\to\infty} ({}^\star A_n)^s \\ &= ({}^{(\star)}C^{(1)} \times \cdots \times {}^{(\star)}C^{(s)}) \cap (\lim_{n\to\infty} {}^\star A_n)^s = ({}^{(\star)}C^{(1)} \times \cdots \times {}^{(\star)}C^{(s)}) \cap \mathcal{I}^s \\ &= ({}^{(\star)}C^{(1)} \cap \mathcal{I}) \times \cdots \times ({}^{(\star)}C^{(s)} \cap \mathcal{I}) = {}^{(\star)}C^{(1)} \times \cdots \times {}^{(\star)}C^{(s)}. \end{aligned}$$

(viii) Tramite (ii), (iii) e (vii), sussiste la catena di equivalenze: $C \subset \hat{A}^s \Leftrightarrow {}^{(\star)}C \subset {}^{(\star)}(\hat{A}^s) \Leftrightarrow {}^{(\star)}C \subset ({}^{(\star)}\hat{A})^s \Leftrightarrow {}^{(\star)}C \subset \mathcal{I}^s$.

Per snellire l'esposizione poniamo, nelle prove seguenti, p al posto di p^s_j.

(ix) Sia $D = p(C)$. Allora, tramite il Teorema 1.1.4(iv), è facile verificare che $p(C_n) \subset D_n$ e quindi, per i Teoremi 2.1.1(iii) e 2.4.3(iii), $p({}^\star C_n) = {}^\star(p(C_n)) \subset {}^\star D_n$. Ne segue, passando al limite e tenendo presente il Lemma 3.2.1, $p({}^{(\star)}C) = p(\lim_{n\to\infty} {}^\star C_n) = \lim_{n\to\infty} p({}^\star C_n) \subset \lim_{n\to\infty} {}^\star D_n = {}^{(\star)}D = {}^{(\star)}p(C)$.

(x) Posto $D = p(C)$, sia $C \subset \hat{A}^s$. Per ipotesi, per ogni n esiste h tale che

$$A^{s-1}_n \cap p(C \cap A^s_h) = A^{s-1}_n \cap p(C). \tag{3.4}$$

Proviamo ora che possiamo assumere nella (3.4), $h \geq n$. Infatti, dato $k \geq h$, sia $e' \in A_n^{s-1} \cap p(C)$. Esistono quindi $e_1, \ldots, e_s$ tali che $e' = \vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$ e $\vec{e} \in C \cap A_h^s \subset C \cap A_k^s$. Allora, $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$ e $\vec{e} \in C \cap A_k^s$, cioè $e' \in A_n^{s-1} \cap p(C \cap A_k^s)$. Viceversa, sia $e' \in A_n^{s-1} \cap p(C \cap A_k^s)$. Esistono allora $e_1, \ldots, e_s$ tali che $e' = \vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$ e $\vec{e} \in C \cap A_k^s \subset C$, cioè $e' \in A_n^{s-1} \cap p(C)$.

Ne segue, notato che, per l'ipotesi $C \subset \hat{A}^s$, si ha $D \subset \hat{A}^{s-1}$, otteniamo

$$D'_n = A_n^{s-1} \cap p(C) = A_n^{s-1} \cap p(C \cap A_h^s) = A_n^{s-1} \cap p(C'_h)$$

e quindi, per il Teoremi 2.3.3(iii), 2.4.3(i),(iii), ${}^\star D'_n = {}^\star A_n^{s-1} \cap p({}^\star C'_h)$. Passando al limite, tramite i Teoremi 2.1.3(i), 3.1.1(ii), il Lemma 3.2.1 e considerato che $h \geq n$, otteniamo ${}^{(\star)}D = \mathcal{I}^{s-1} \cap p({}^{(\star)}C) = p({}^{(\star)}C)$, ove l'ultima uguaglianza si ottiene osservando che, per il Teorema 2.2.3(iv),(v),(vi), $p({}^{(\star)}C)$ è formato da $(s-1)$-uple interne.

Per $C \subset \hat{A}$ qualunque, dalle $p(C) = p(C \cap \hat{A}^s)$ e $p({}^{(\star)}C) = p({}^{(\star)}C \cap \mathcal{I}^s)$, perveniamo alla tesi, sfruttando il risultato appena provato e le proposizioni (ii), (v) e (vii).

(xi) Si tratta di provare che ${}^{(\star)}p(C)$ e $p({}^{(\star)}C)$ hanno la medesima parte standard. In forza di (ix) è sufficiente verificare che ogni elemento standard di ${}^{(\star)}p(C)$ è anche elemento di $p({}^{(\star)}C)$. Posto $D = p(C)$, sia $\vec{e}_{-j} \in {}^{(\star)}D$ una $(s-1)$-upla standard. Allora, per il Teorema 2.3.4(ii), $e_i = {}^\star a_i$ $(i \neq j)$ e quindi, per il Teorema 2.3.3(vi), ${}^\star\vec{a}_{-j} \in {}^{(\star)}D$. Pertanto, esiste n tale che ${}^\star\vec{a}_{-j} \in {}^\star D_n$. Ne segue, per il Teorema 2.1.1(i), $\vec{a}_{-j} \in D_n \subset p(C) = p(\bigcup_{n \geq 0} C_n) = \bigcup_{n \geq 0} p(C_n)$ e quindi, per qualche h, $\vec{a}_{-j} \in p(C_h)$. Allora, per i Teoremi 2.1.1(i) e 2.4.3(iii), $\vec{e}_{-j} = {}^\star\vec{a}_{-j} \in {}^\star(p(C_h)) = p({}^\star C_h) \subset p({}^{(\star)}C)$.

(xii) Posto $D = \underset{\hat{A}}{\overset{s,r}{\rightharpoondown}}(C)$, tramite il Teorema 1.1.2(i) otteniamo

$$\begin{aligned}
D'_n &= \underset{\hat{A}}{\overset{s,r}{\rightharpoondown}}(C) \cap A_n^{s+r} = \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in A_n^{s+r} \mid \vec{e} \in C\} \\
&= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in A_n^{s+r} \mid \vec{e} \in C_{n+2s-2}\} \\
&= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in A_n^{s+r} \mid \hat{A} \Vdash \langle e_1, \ldots, e_s \rangle \lessdot C_{n+2s-2}\}
\end{aligned}$$

da cui, per (i) e i Teoremi 2.2.3(iv) e 2.4.1,

$$\begin{aligned}
{}^\star D'_n &= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in {}^\star A_n^{s+r} \mid \mathcal{I} \Vdash \langle e_1, \ldots, e_s \rangle \lessdot {}^\star C_{n+2s-2}\} \\
&= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in {}^\star A_n^{s+r} \mid \vec{e} \in {}^\star C_{n+2s-2}\} \\
&= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in {}^\star A_n^{s+r} \mid \vec{e} \in {}^\star C_{n+2s-2} = {}^{(\star)}C \cap {}^\star A_{n+2s-2}\} \\
&= \{(e_1, \ldots, e_{s+r}) \in {}^\star A_n^{s+r} \mid \vec{e} \in {}^{(\star)}C\}
\end{aligned}$$

e quindi, passando al limite, per il Teorema 3.1.1(ii),

$$\begin{aligned}
{}^{(\star)}D &= \lim_{n\geq 0}\{(e_1,\ldots,e_{s+r})\in {}^\star A_n^{s+r}\,|\,\vec{e}\in {}^{(\star)}C\}\\
&= \bigcup_{n\geq 0}\{(e_1,\ldots,e_{s+r})\in {}^\star A_n^{s+r}\,|\,\vec{e}\in {}^{(\star)}C\}\\
&= \{(e_1,\ldots,e_{s+r})\in \bigcup_{n\geq 0}{}^\star A_n^{s+r}\,|\,\vec{e}\in {}^{(\star)}C\}\\
&= \{(e_1,\ldots,e_{s+r})\in \lim_{n\to\infty}{}^\star A_n^{s+r}\,|\,\vec{e}\in {}^{(\star)}C\}.
\end{aligned}$$

Per il Teorema 2.1.3(i) e il Lemma 3.2.1 si ha infine ${}^{(\star)}D = \{(e_1,\ldots,e_{s+r})\in \mathcal{I}^{s+r}\,|\,\vec{e}\in {}^{(\star)}C\} = \underset{\mathcal{I}}{\overset{s,r}{\nearrow}}({}^{(\star)}C)$.

In modo analogo si consegue la dimostrazione per il cilindro sinistro. □

Circa le proprietà della proiezione p_j^s, osserviamo che l'uguaglianza tra "trasformata della proiezione" e "proiezione della trasformata" è sempre valida, senza condizioni aggiuntive, nel caso del monomorfismo $\star$, mentre per il prolungamento $(\star)$ essa è stabilita sotto le condizioni del Teorema 3.2.2(x). Qui si riesce ad assicurare, senza aggiungere condizioni, un risultato più limitato, cioè solo l'inclusione prevista dal Teorema 3.2.2(ix). L'esempio seguente mostra che è possibile che l'inclusione sia propria. Siano $A_0 = \{a_0, a_1, \ldots\}$ un insieme numerabile e $\star$ un monomorfismo allargante. Considerato l'insieme $C = \{(a_0, A_0), (a_1, A_1), \ldots\}$, riesce $p_2^2(C) = A_0$ e quindi ${}^{(\star)}(p_2^2(C)) = {}^\star A_0$. D'altra parte, tenuto conto che $C'_n = C\cap A_n^2 = \{(a_0, A_0), \ldots, (a_n, A_n)\}$, si ha, per i Teoremi 2.3.3(v) e 3.1.1(ii), ${}^{(\star)}C = \{({}^\star a_0, {}^\star A_0), ({}^\star a_1, {}^\star A_1), \ldots\}$ e quindi $p_2^2({}^{(\star)}(C)) = \{{}^\star a_0, {}^\star a_1, \ldots\} = \star[A_0] \subsetneqq {}^\star A_0 = {}^{(\star)}(p_2^2(C))$ (Teorema 2.7.1).

Riportiamo infine una proposizione, equivalente a quella considerata come ipotesi nel Teorema 3.2.2(x), che interviene, nel seguito, nell'ambito delle composizioni che coinvolgono quantificatori metalinguistici.

Teorema 3.2.3. *Sono equivalenti le proposizioni:*

(i) Per ogni n esiste h tale che:

$$A_n^{s-1}\cap p_j^s(C\cap A_h^s) = A_n^{s-1}\cap p_j^s(C); \tag{3.5}$$

(ii) Per ogni n esiste h tale che, qualunque siano le entità $e_1,\ldots,e_{j-1},e_{j+1},\ldots,e_s\in A_n$, risulta:

$$\exists x((\vec{e}_{-j};x)\in C) \Leftrightarrow \exists x\in A_h((\vec{e}_{-j};x)\in C). \tag{3.6}$$

DIMOSTRAZIONE. Come al solito, poniamo $p = p_j^s$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Fissato n esiste allora h tale che sussiste (3.5). Scelto $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$ proviamo che (3.6) è verificata per tale h. Poichè l'implicazione $\Leftarrow$ è ovvia proviamo l'opposta. Sia e tale che $(\vec{e}_{-j}; e) \in C$. Ne segue $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1} \cap p(C)$ e quindi, per (3.5), $\vec{e}_{-j} \in p(C \cap A_h^s)$. Esiste allora e' tale che $(\vec{e}_{-j}; e') \in C \cap A_h^s$ e quindi esiste $e' \in A_h$ tale che $(\vec{e}_{-j}; e') \in C$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fissato n esiste allora h' tale che sussiste (3.6). Proviamo che (3.5) sussiste per $h = \max(h', n)$. Poichè l'inclusione $\subset$ è ovvia proviamo l'opposta. Sia $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1} \cap p(C)$. Esiste allora e tale che $e_i \in A_n$ $(i \neq j)$ e $(\vec{e}_{-j}; e) \in C$. Ne segue, per (3.6), che esiste $e' \in A_{h'}$ tale che $(\vec{e}_{-j}; e') \in C$. Poichè $e', e_i \in A_h$ $(i \neq j)$, risulta $(\vec{e}_{-j}; e') \in A_h^s \cap C$ e quindi $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1} \cap p(C \cap A_h^s)$. $\square$

Concludiamo la sezione, provando che, qualora il monomorfismo sia allargante, la condizione considerata nella proposizione (x) del Teorema 3.2.2, oltre che sufficiente è anche necessaria per l'uguaglianza in oggetto.[5]

Teorema 3.2.4. *Sia $\star$ un allargamento. Se esiste n_0 tale che, qualunque sia $h \geq 0$, risulta $A_{n_0}^{s-1} \cap p_j^s(C \cap A_h^s) \neq A_{n_0}^{s-1} \cap p_j^s(C)$, allora ${}^{(\star)}p_j^s(C) \neq p_j^s({}^{(\star)}C)$.*

DIMOSTRAZIONE. Posto, come al solito, $p = p_j^s$, la famiglia di insiemi:

$$E_h = (p(C) \setminus p(C \cap A_h^s)) \cap A_{n_0}^{s-1} \quad (h \geq 0)$$

è, per ipotesi, costituita da insiemi non vuoti e quindi esiste, per l'assioma della scelta[6], un'applicazione di scelta $f : \mathbb{N} \mapsto \bigcup_{h \geq 0} E_h$ tale che $f(h) \in E_h$ per ogni $h \geq 0$.

Dalla $p(C) = p(C \cap \hat{A}^s)$ risulta $p(C) = \bigcup_{h \geq 0} p(C \cap A_h^s)$; è pertanto lecito considerare l'applicazione $k : p(C) \mapsto \mathbb{N}$ definita dalla:

$$k(x) = \min h(x \in p(C \cap A_h^s))$$

che associa ad ogni $x \in p(C)$ il minimo numero naturale h tale che $x \in p(C \cap A_h^s)$.

Essendo $(A_h^s)_{h \geq 0}$ una successione crescente d'insiemi, la successione $(p(C \cap A_h^s))_{h \geq 0}$ è non decrescente e quindi

$$e \in p(C \cap A_h^s) \Leftrightarrow k(e) \leq h. \tag{3.7}$$

[5]Essendo la dimostrazione alquanto complessa, la si può trascurare in una prima lettura.

[6]Per *assioma della scelta* s'intende la proposizione: Per ogni famiglia $\mathcal{F}$ non vuota di insiemi non vuoti, esiste un'applicazione di scelta $f : \mathcal{F} \mapsto \bigcup \mathcal{F}$ tale che $f(F) \in F$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

Infine, l'applicazione composta $f \circ k$ è un'applicazione di $p(C)$ in $\bigcup_{h\geq 0} E_h \subset p(C)$. Si può allora definire, per induzione, un'applicazione $g : \mathbb{N} \mapsto p(C)$ tale che:

$$g(0) = f(0), \qquad g(n+1) = f(k(g(n))).$$

Tale applicazione associa dunque allo zero l'elemento scelto in E_0 e ad $n+1$ l'elemento scelto nel primo E_h al quale *non* appartiene l'elemento $g(n)$ scelto precedentemente.

Indicato, come di consueto, l'elemento $g(n)$ con il simbolo g_n, risulta, ovviamente, $g_{n+1} \in E_{k(g(n))}$ e $g_n \in p(C)$. Sussistono inoltre le proposizioni seguenti.
1. $g[\mathbb{N}] \subset A^{s-1}_{n_0}$. Infatti $E_h \subset A^{s-1}_{n_0}$ per ogni h.
2. L'applicazione $k \circ g$ è una successione crescente. Infatti, dalla $g_{n+1} \in E_{k(g(n))}$, si ha $g_{n+1} \notin p(C \cap A^s_{k(g_n)})$ e, da (3.7), $g_{n+1} \in p(C \cap A^s_{k(g_{n+1})})$; quindi $k(g_n) < k(g_{n+1})$.
3. L'applicazione g è iniettiva. Infatti, dalla $g_n = g_m$ riesce $(k \circ g)(n) = (k \circ g)(m)$ e quindi, per 2., $n = m$.

Sia ora $D_n = \{\vec{e} \in C \mid \vec{e}_{-j} = g_n\}$.
4. $p(D_n) = \{g_n\}$. Proviamo intanto l'inclusione $\subset$. Sia $\vec{e}_{-j} \in p(D_n)$. Esiste allora e_j tale che $\vec{e} \in D_n$ da cui $\vec{e}_{-j} = g_n$ e quindi $\vec{e}_{-j} \in \{g_n\}$. Proviamo infine l'inclusione opposta. Dalla $g_n \in p(C)$ otteniamo $g_n = \vec{e}_{-j} \in p(C)$. Esiste pertanto e_j tale che $\vec{e} \in C$ da cui $\vec{e} \in D_n$ e quindi $g_n \in p(D_n)$.
5. $D_n \cap A^s_m = \emptyset$ per ogni $m < k(g_n)$. Infatti sia, per assurdo, $\vec{e} \in D_n \cap A^s_m$ con $m < k(g_n)$. Allora, essendo $D_n \subset C$, risulta $\vec{e} \in C \cap A^s_m$ e quindi $g_n \in p(C \cap A^s_m)$. Ne segue, per (3.7), $m \geq k(g_n)$ che contraddice l'ipotesi.
6. $p(D_n \cap A^s_m) = \{g_n\}$ per ogni $m \geq k(g_n)$. Infatti, sia $m \geq k(g_n)$. Dalla $p(D_n \cap A^s_m) \subset p(D_n)$ otteniamo, tramite 4., $p(D_n \cap A^s_m) \subset \{g_n\}$. D'altra parte, essendo $m \geq k(g_n)$, si ha, per (3.7), $g_n = \vec{e}_{-j} \in p(C \cap A^s_m)$ e quindi esiste e_j tale che $\vec{e} \in C \cap A^s_m$. Ne segue, $\vec{e} \in D_n \cap A^s_m$ da cui $g_n \in p(D_n \cap A^s_m)$, cioè $\{g_n\} \subset p(D_n \cap A^s_m)$.

Considerato infine l'insieme $D = \bigcup_{n\geq 0} D_n$, risulta:
7. $p(D) = g[\mathbb{N}] = \{g_0, g_1, \dots\}$. Infatti, $p(D) = \bigcup_{n\geq 0} p(D_n)$ da cui, tramite 4., $p(D) = \bigcup_{n\geq 0}\{g_n\} = \{g_0, g_1, \dots\}$.

Essendo, per 2., la successione $k \circ g$ crescente, ha senso considerare l'applicazione l così definita:

$$l(m) = \min n(k(g_n) > m).$$

8. $p(D \cap A^s_m) \subset \{g_0, \dots, g_{l(m) \veebar 1}\}$.[7] Infatti, $p(D \cap A^s_m) = \bigcup_{n\geq 0} p(D_n \cap A^s_m)$ da cui, per 5. e la crescenza di $k \circ g$, otteniamo $p(D \cap A^s_m) = \bigcup_{n<l(m)} p(D_n \cap A^s_m)$ e quindi, tramite 6., $p(D \cap A^s_m) = \bigcup_{n<l(m)}\{g_n\} \subset \{g_0, \dots, g_{l(m)\veebar 1}\}$.
9. $p(D) \cap p(C \setminus D) = \emptyset$. infatti sia, per assurdo, $e \in p(D) \cap p(C \setminus D)$. Allora $e \in p(D) = \bigcup_{n\geq 0} p(D_n)$ per cui $e \in p(D_n)$ per qualche n. Ne segue, usando 4.,

[7] Ove $h \veebar k = 0$, se $h < k$, e $h \veebar k = h - k$, se $h \geq k$.

$e = g_n$ da cui, per l'ipotesi assurda, $g_n = \vec{e}_{-j} \in p(C \setminus D)$. Esiste allora e_j tale che $\vec{e} \in C$, $\vec{e} \notin D$; risulta pertanto, dalla prima appartenenza, $\vec{e} \in D_n$ da cui $\vec{e} \in D$, contraddicendo così la seconda appartenenza.

Usando le proprietà dell'insieme D siamo finalmente in grado di provare la tesi del teorema. A tal fine consideriamo le seguenti proposizioni relative all'insieme $p({}^{(\star)}D)$.

10. $p({}^{(\star)}D) \subset \star[p(D)]$. Infatti, per 8., $p(D'_m) = p(D \cap A^s_m) \subset \{g_0, \ldots, g_{l(m)\veebar 1}\}$ da cui, per i Teoremi 2.1.1(iii), 2.3.3(v) e 2.4.3(iii), ${}^\star(p(D'_m)) = p({}^\star D'_m) \subset {}^\star(\{g_0, \ldots, g_{l(m)\veebar 1}\}) = \{{}^\star g_0, \ldots, {}^\star g_{l(m)\veebar 1}\} \subset \{{}^\star g_0, {}^\star g_1, \ldots\}$. Ora, tenendo conto della $D \subset \hat{A}^s$ e del Teorema 3.1.1, risulta, passando al limite, $p({}^{(\star)}D) = \bigcup_{m \geq 0} p({}^\star D'_m) \subset \{{}^\star g_0, {}^\star g_1, \ldots\}$ e quindi, per 7., quanto dichiarato.

11. $p({}^{(\star)}D) \subsetneqq {}^{(\star)}p(D)$. Infatti, per 1. e 7., $p(D) \subset A^{s-1}_{n_0}$ e quindi si ha ${}^{(\star)}p(D) = \bigcup_{n \geq 0} {}^\star(p(D) \cap A_n) = {}^\star p(D)$. Ne segue, essendo $\star$ allargante e, per 3. e 7., $p(D)$ infinito, $\star[p(D)] \subsetneqq {}^{(\star)}p(D)$ (Teorema 2.7.1) da cui, per 10., otteniamo quanto dichiarato. Dalla $C = (C \setminus D) \cup D$ e dal Teorema 3.2.2(vi) risulta poi

$$\begin{aligned} {}^{(\star)}p(C) &= {}^{(\star)}(p(C \setminus D) \cup p(D)) = {}^{(\star)}(C \setminus D) \cup {}^{(\star)}p(D) \\ p({}^{(\star)}C) &= p({}^{(\star)}(C \setminus D) \cup {}^{(\star)}D) = p({}^{(\star)}(C \setminus D)) \cup p({}^{(\star)}D). \end{aligned}$$

Da queste e dalle

$$p({}^{(\star)}(C \setminus D)) \subset {}^{(\star)}p(C \setminus D), \quad p({}^{(\star)}D) \subsetneqq {}^{(\star)}p(D), \quad {}^{(\star)}p(C \setminus D) \cap {}^{(\star)}p(D) = \emptyset,$$

ove la prima deriva dal Teorema 3.2.2(ix), la seconda da 11. e l'ultima da 9. e dal Teorema 3.2.2(v), si ha finalmente la tesi. □

3.3 Starconcetti. Prime proprietà

La nozione di starconcetto è già stata delineata all'inizio del capitolo. Approfondiamo ora l'argomento, trattandolo in modo sistematico, anche ripetendo, ove occorra per maggior chiarezza, cose già dette in modo più o meno esplicito.

Sia dunque $X(x_1, \ldots, x_s)$ un metapredicato, con $x_1, \ldots, x_s$ uniche "variabili libere". Poichè il nostro universo del discorso di partenza è $\hat{A}$, quello che interessa è limitare i possibili valori delle variabili libere imponendo che appartengano alla sovrastruttura. Viene così naturale considerare in $\hat{A}$ (o equivalentemente in $\hat{A}^s$) l'insieme:

$$\mathcal{X} = \{(e_1, \ldots, e_s) \in \hat{A}^s \mid X(e_1, \ldots, e_s)\}$$

che rappresenta il concetto espresso dal metapredicato $X(x_1, \ldots, x_s)$, *relativizzato* a $\hat{A}$; e ciò nel senso che è l'insieme che raccoglie tutti e soli gli elementi di $\hat{A}$ che soddisfano $X(x_1, \ldots, x_s)$.

A questo punto, conveniamo, per non introdurre ulteriori simboli alla simbologia di per sé già corposa, *di identificare il metapredicato* $X(x_1, \ldots, x_s)$ *con la sua relativizzazione* $(x_1, \ldots, x_s) \in \mathcal{X}$ e quindi assumere l'equivalenza:

$$X(x_1, \ldots, x_s) \Leftrightarrow (x_1, \ldots, x_s) \in \mathcal{X}. \tag{3.8}$$

Osservato infine che, per il Teorema 3.2.2(viii), ${}^{(\star)}\mathcal{X}$ è un insieme di s-ple, possiamo considerare, accanto a $X(x_1, \ldots, x_s)$, il metapredicato:

$$\star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s) : (x_1, \ldots, x_s) \in {}^{(\star)}\mathcal{X} \tag{3.9}$$

e chiamare **$\star$-concetto relativo a $X(x_1, \ldots, x_s)$ il concetto espresso da $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$.**

Quindi, lo $\star$-concetto espresso dal metapredicato $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$ riguarda, per il Teorema 3.2.2(viii), una proprietà relativa *solo a elementi interni.*

Una prima notevole proprietà degli starconcetti si ottiene rimpiazzando tutte le variabili libere di $X(x_1, \ldots, x_s)$ con entità di $\hat{A}$ e quelle di $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$ con le corrispondenti $\star$-trasformate. Sussiste infatti il teorema seguente, che fornisce una formulazione del Principio di Leibniz in termini di $\star$-concetti, e che può, da un punto di vista interpretativo, così formularsi: se le entità $a_1, \ldots, a_s$ di $\hat{A}$ verificano il concetto espresso dal metapredicato $X(x_1, \ldots, x_s)$, allora le entità trasformate ${}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s$ di $\mathcal{I}$ verificano il corrispondente $\star$-concetto espresso dal metapredicato $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$; e viceversa.

Teorema 3.3.1 (Principio di trasferimento[8]). *Siano* $a_1, \ldots, a_s \in \hat{A}$. *Risulta allora:*

$$X(a_1, \ldots, a_s) \Leftrightarrow \star\text{-}X({}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s).$$

Dimostrazione. Tramite (3.2) e il Teorema 2.3.3(vi) otteniamo le equivalenze: $X(\vec{a}) \Leftrightarrow \vec{a} \in \mathcal{X} \Leftrightarrow {}^\star\vec{a} \in {}^{(\star)}\mathcal{X} \Leftrightarrow ({}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s) \in {}^{(\star)}\mathcal{X} \Leftrightarrow \star\text{-}X({}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s)$. □

Il rimpiazzamento di variabili libere con entità non è l'unico modo per ottenere metaenunciati. Infatti, un metapredicato unario diviene un metaenunciato mediante la quantificazione della variabile libera. È allora naturale

[8] Osserviamo che la denominazione qui adottata non è conforme a quella che comunemente viene usata in letteratura, ove per Principio di trasferimento (Transfer Principle) si intende il Principio di Leibniz.

completare la formulazione del Principio di Leibniz in termini di $\star$-concetti, data dal Principio di trasferimento (in breve PdT), fornendo, nel caso unario, il comportamento via trasferimento dei metaenunciati così ottenuti.

Teorema 3.3.2. *Sia $X(x)$ un metapredicato unario. Risulta allora:*

$$\exists x \in C\, X(x) \Leftrightarrow \exists x \in {}^{(\star)}C \star\text{-}X(x), \qquad \forall x \in C\, X(x) \Leftrightarrow \forall x \in {}^{(\star)}C \star\text{-}X(x).^9$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto riguarda la prima equivalenza, si ha, tramite (3.2) e il Teorema 3.2.2(v), $\exists x \in C\, X(x) \Leftrightarrow C \cap \mathcal{X} \neq \emptyset \Leftrightarrow {}^{(\star)}(C \cap \mathcal{X}) \neq \emptyset \Leftrightarrow {}^{(\star)}C \cap {}^{(\star)}\mathcal{X} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x \in {}^{(\star)}C \star\text{-}X(x)$. Passando alla seconda, risulta $\forall x \in C\, X(x) \Leftrightarrow C \cap \mathcal{X} = C \Leftrightarrow {}^{(\star)}(C \cap \mathcal{X}) = {}^{(\star)}C \Leftrightarrow {}^{(\star)}C \cap {}^{(\star)}\mathcal{X} = {}^{(\star)}C \Leftrightarrow \forall x \in {}^{(\star)}C \star\text{-}X(x)$. $\square$

La seconda notevole proprietà degli $\star$-concetti riguarda lo $\star$-concetto associato ad un metapredicato nel quale alcune variabili siano state sostituite con entità.

Teorema 3.3.3 (Principio di sostituzione). *Considerato il metapredicato $X(x_1, \ldots, x_s)$ $(s \geq 2)$, sia X' il metapredicato che si ottiene rimpiazzando $r < s$ variabili di X con altrettante entità della sovrastruttura. Allora, lo $\star$-concetto relativo a X' si ottiene da $\star$-X, sostituendo le r variabili rimpiazzate con le trasformate delle relative entità.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $r = 1$ e x_j la variabile rimpiazzata con l'entità a. Riesce allora $X'(\vec{x}_{-j}) = X((\vec{x}_{-j}; a))$. Indicata con C la rappresentazione insiemistica di $\mathcal{X}'$ in $\hat{A}$, risulta allora

$$C'_n = C \cap A_n^{s-1} = \{\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1} \,|\, (\vec{x}_{-j}; a) \in \mathcal{X}\}.$$

Sia ora $a \in A_m$ e $n \geq m$. Allora, osservato che e_i $(i \neq j)$ è ristretta a A_n, dal Teorema 1.1.2(i), risulta $C'_n = \{\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1} \,|\, \hat{A} \Vdash W(\vec{e}_{-j})\}$, con

$$W(\vec{x}_{-j}) : \sqcup y \lessdot \mathcal{X}'_{n+2s-2} \sqcup z \lessdot A_n(\langle \vec{x}_{-j}; z\rangle \asymp y \wedge z \asymp a).^{10}$$

Ne segue, per il Teorema 2.4.1, ${}^\star C'_n = \{\vec{e}_{-j} \in {}^\star A_n^{s-1} \,|\, \mathcal{I} \Vdash W^\star(\vec{e}_{-j})\}$, con

$$W^\star(\vec{x}_{-j}) : \sqcup y \lessdot {}^\star\mathcal{X}'_{n+2s-2} \sqcup z \lessdot {}^\star A_n(\langle \vec{x}_{-j}; z\rangle \asymp y \wedge z \asymp {}^\star a),$$

[9] È evidente che possiamo estendere, via induzione, questo risultato al caso multidimensionale. Così, ad esempio, si ha l'equivalenza: $\exists x \in C\, \forall y \in C'\, X(x, y) \Leftrightarrow \exists x \in {}^{(\star)}C\, \forall y \in {}^{(\star)}C' \star\text{-}X(x, y)$.

[10] Ovviamente la notazione $\langle \vec{x}_{-j}; z\rangle$ ha lo stesso significato attribuito alla $(\vec{x}_{-j}; z)$.

e quindi, tenuto conto che $e_i\,(i \neq j), {}^\star a$ sono ristrette a ${}^\star A_n$ e che y è ristretta a ${}^\star\mathcal{X}'_{n+2s-2} \subset {}^\star A_{n+2s-2}$, risulta

$$ {}^\star C'_n = \{\vec{e}_{-j} \in {}^\star A_n^{s-1} \,|\, (\vec{x}_{-j}; {}^\star a) \in {}^\star\mathcal{X}'_{n+2s-2}\} = \{\vec{e}_{-j} \in {}^\star A_n^{s-1} \,|\, (\vec{x}_{-j}; {}^\star a) \in {}^{(\star)}\mathcal{X}\}. $$

Passando al limite, per i Teoremi 3.1.1(ii), 3.2.2(ii) e il Lemma 3.2.1, otteniamo infine

$$ {}^{(\star)}C = \{\vec{e}_{-j} \in \mathcal{I}^{s-1} \,|\, (\vec{x}_{-j}; {}^\star a) \in {}^{(\star)}\mathcal{X}\} $$

e quindi $\star\text{-}X'(\mathbf{x}_{-j}) \Leftrightarrow \star\text{-}X((\vec{x}_{-j}; {}^\star a))$, come volevasi.

A questo punto, la dimostrazione si consegue facilmente per induzione su r. $\square$

Proviamo ora un teorema d'isolamento che è una versione del fondamentale Teorema 2.4.1 in termini di $\star$-concetti.

Teorema 3.3.4. *Siano $a_1, \ldots, a_s$ entità proprie di $\hat{A}$ e $X(x_1, \ldots, x_s)$ un metapredicato s-ario. Posto $E = \{(e_1, \ldots, e_s) \in a_1 \times \cdots \times a_s \,|\, X(e_1, \ldots, e_s)\}$, riesce ${}^\star E = \{(e_1, \ldots, e_s) \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \,|\, \star\text{-}X(e_1, \ldots, e_s)\}$.*

Dimostrazione. Siano $a_1, \ldots, a_s \in A_{n+1} \setminus A$. Allora, per il Teorema 1.1.1(ii), $a_1, \ldots, a_s \subset A_n$ e quindi, per il Teorema 2.1.1(iii), ${}^\star a_1, \ldots, {}^\star a_s \subset {}^\star A_n$.

Dalla $E = \{\vec{e} \in a_1 \times \cdots \times a_s \,|\, \vec{e} \in \mathcal{X}\}$ otteniamo

$$ E'_n = E \cap A_n^s = \{\vec{e} \in a_1 \times \cdots \times a_s \,|\, \vec{e} \in \mathcal{X}'_n\}. $$

Osservato che $e_i\ (i = 1, \ldots, s)$ è ristretta a A_n e che $\vec{e}$ è, per il Teorema 1.1.2(i), ristretta a A_{n+2s-2}, risulta

$$ E'_n = \{\vec{e} \in a_1 \times \cdots \times a_s \,|\, \hat{A} \Vdash \sqcup y \lessdot \mathcal{X}'_{n+2s-2}(\vec{e} \asymp y)\}.^{11} $$

Ne segue, per il Teorema 2.4.1,

$$ {}^\star E'_n = \{\vec{e} \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \,|\, \mathcal{I} \Vdash \sqcup y \lessdot {}^\star\mathcal{X}'_{n+2s-2}(\vec{e} \asymp y)\} $$

e quindi, tenuto conto che $e_i\ (i = 1, \ldots, s)$ è ristretta a ${}^\star A_n$ e che y è ristretta a ${}^\star\mathcal{X}_{n+2s-2} \subset {}^\star A_{n+2s-2}$, si ha

$$ {}^\star E'_n = \{\vec{e} \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \,|\, \vec{e} \in {}^\star\mathcal{X}'_{n+2s-2}\}. $$

Passando al limite, per il Teorema 3.1.1(ii), ${}^{(\star)}E = \{\vec{e} \in {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \,|\, \vec{e} \in {}^{(\star)}\mathcal{X}\}$. Ne segue, osservato che ${}^{(\star)}E = {}^\star E$, la tesi. $\square$

[11]Naturalmente, in questo contesto, $\vec{e} \asymp y$ denota la formula atomica $\langle e_1, \ldots, e_s\rangle \asymp y$.

3.4 Composizione di $\star$-concetti

Il prossimo teorema consente di ottenere, a partire da $\star$-concetti di noto significato, $\star$-concetti via via più complessi, ottenuti ricorrendo agli usuali connettivi logici e ai quantificatori (esistenziale e universale) del metalinguaggio. Onde evitare possibili fraintendimenti, riteniamo opportuno ribadire che, avendo identificato, mediante (3.8) e (3.9), i metapredicati con gli insiemi che li rappresentano, *le equivalenze devono intendersi come uguaglianze tra gli insiemi associati ai corrispondenti metapredicati.* Così, ad esempio, la proposizione (ii), significa che, indicati con C e C' i sottoinsiemi di $\mathcal{I}^{r+s+t}$ che, rispettivamente, rappresentano i metapredicati "$\star$-(Y o Z)" e "$\star$-Y o $\star$-Z", sussiste l'uguaglianza $C = C'$".

Teorema 3.4.1. *Siano* $X(x_1, \ldots, x_s)$*,* $Y(y_1, \ldots, y_r; x_1, \ldots, x_s)$ *e* $Z(x_1, \ldots, x_s; z_1, \ldots, z_t)$ *tre metapredicati con* $x_1, \ldots, x_s$ uniche variabili libere comuni *a* Y *e* Z.[12] *Sussistono allora le equivalenze:*

(i) $\star\text{-non}X \Leftrightarrow \text{non}\,\star\text{-}X$ *e tutte le* x_i *interne;*

(ii) $\star\text{-}(Y \text{ o } Z) \Leftrightarrow \star\text{-}Y \text{ o } \star\text{-}Z$ *e tutte le* y_j, z_h *interne;*

(iii) $\star\text{-}(Y \text{ e } Z) \Leftrightarrow \star\text{-}Y \text{ e } \star\text{-}Z$*;*

(iv) $\star\text{-}(Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\star\text{-}Y \Rightarrow \star\text{-}Z)$ *e tutte le* x_i, y_j, z_h *interne;*

(v) $\star\text{-}(Y \Leftrightarrow Z) \Leftrightarrow (\star\text{-}Y \Leftrightarrow \star\text{-}Z)$ *e tutte le* x_i, y_j, z_h *interne;*

(vi) Se per ogni n *esiste* h *tale che, per ogni* $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_s \in A_n$ $(s \geq 2)$*, risulta* $\exists e X((\vec{e}_{-j}; e)) \Leftrightarrow \exists e \in A_h X((\vec{e}_{-j}; e))$*, allora:*

$$\star\text{-}(\exists x\, X((\vec{x}_{-j}; x)) \Leftrightarrow \exists x \star\text{-}X((\vec{x}_j; x));$$

(vii) Se per ogni n *esiste* h *tale che, per ogni* $e_1, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_s \in A_n$ $(s \geq 2)$*, risulta* $\forall e X((\vec{e}_{-j}; e)) \Leftrightarrow \forall e \in A_h X((\vec{e}_{-j}; e))$*, allora*

$$\star\text{-}(\forall x\, X((\vec{x}_{-j}; x)) \Leftrightarrow \forall x \star\text{-}X((\vec{x}_j; x)).$$

[12] Va inteso che, in assenza di variabili libere comuni, le x_i non compaiono nelle notazioni Y e Z. Analogo discorso vale per le y_j e z_h.

Dimostrazione. (i) Alla frase "non X" è associato l'insieme $C = \hat{A}^s \setminus \mathcal{X}$. Allora, per il Teorema 3.2.2(ii),(iv),(vii), ${}^{(\star)}C = \mathcal{I}^s \setminus {}^{(\star)}\mathcal{X}$ e quindi la tesi.

(ii) Indicato con $W(y_1, \dots, y_r; x_1, \dots, x_s; z_1, \dots, z_t)$ il metapredicato "Y o Z", sia C l'insieme che lo rappresenta in $\hat{A}$. Allora

$$\begin{aligned} C &= \{(e'_1, \dots, e'_r; e_1, \dots, e_s; e''_1, \dots, e''_t) \in \hat{A}^{r+s+t} \,|\, (e'_1, \dots, e'_r; e_1, \dots, e_s) \in \mathcal{Y} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{o } (e_1, \dots, e_s; e''_1, \dots, e''_t) \in \mathcal{Z}\} \\ &= \overset{s+r,t}{\underset{\hat{A}}{\rightharpoonup}} (\mathcal{Y}) \cup \overset{r,s+t}{\underset{\hat{A}}{\leftharpoondown}} (\mathcal{Z}). \end{aligned}$$

Per il Teorema 3.2.2(vi),(xii), risulta

$$\begin{aligned} &{}^{(\star)}C = \overset{s+r,t}{\underset{\mathcal{I}}{\rightharpoonup}} ({}^{(\star)}\mathcal{Y}) \cup \overset{r,s+t}{\underset{\mathcal{I}}{\leftharpoondown}} ({}^{(\star)}\mathcal{Z}) \\ &= \{(e'_1, \dots, e'_r; e_1, \dots, e_s; e''_1, \dots, e''_t) \in \mathcal{I}^{r+s+t} \,|\, (e'_1, \dots, e'_r; e_1, \dots, e_s) \in {}^{(\star)}\mathcal{Y} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{o } (e_1, \dots, e_s; e''_1, \dots, e''_t) \in {}^{(\star)}\mathcal{Z}\} \\ &= \{(e'_1, \dots, e'_r; e_1, \dots, e_s; e''_1, \dots, e''_t) \in \mathcal{I}^{r+s+t} \,|\, \star\text{-}Y(e'_1, \dots, e'_r; e_1, \dots, e_s) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{o } \star\text{-}Z(e_1, \dots, e_s; e''_1, \dots, e''_t)\}. \end{aligned}$$

La dichiarazione di internalità per le x_i può essere omessa in quanto dichiarata sia in $\star$-Y che in $\star$-Z. Ne segue la tesi.

(iii) Dimostrazione analoga alla precedente.

(iv) Tramite (i) e (ii), osservato che $(Y \Rightarrow Z) \Leftrightarrow$ non Y o Z.

(v) Segue dalle (iii) e (iv).

Nel seguito della prova poniamo, per alleggerire le scritture, $X(\vec{x}_{-j}; x)$ al posto di $X((\vec{x}_{-j}; x))$.

(vi) Proviamo intanto che, dato il metapredicato $X'(\vec{x}_{-j}) : \exists x X(\vec{x}_{-j}; x)$, risulta $\mathcal{X}' = p^s_j(\mathcal{X})$. Poichè l'inclusione $\supset$ è ovvia, proviamo l'opposta. Sia dunque $\vec{e}_{-j} \in \hat{A}^{s-1}$ e $\exists x X(\vec{e}_{-j}; x)$. Esiste allora n tale che $\vec{e}_{-j} \in A^{s-1}_n$ e quindi, per ipotesi, esiste h tale che $\exists e \in A_h\, X(\vec{e}_{-j}; e)$. Risulta pertanto $e \in \hat{A}$ e quindi $(\vec{e}_{-j}; e) \in \hat{A}^s$ e $X(\vec{e}_{-j}; e)$, cioè $(\vec{e}_{-j}; e) \in \mathcal{X}$. Conseguentemente, $\exists e\, (\vec{e}_{-j}; e) \in \mathcal{X}$. Dunque $\vec{e}_{-j} \in p^s_j(\mathcal{X})$.

Ora, dall'ipotesi segue la proposizione (ii) del Teorema 3.2.3 e quindi anche la (i) del medesimo teorema (con $C = \mathcal{X}$). Allora, tramite il Teorema 3.2.2(x), ${}^{(\star)}(p^s_j(\mathcal{X})) = p^s_j({}^{(\star)}\mathcal{X}) = \{\vec{e}_{-j} \,|\, \exists x\, ((\vec{x}_{-j}; x) \in {}^{(\star)}\mathcal{X})\} = \{\vec{e}_{-j} \,|\, \exists x \star\text{-}X(\vec{x}_{-j}; x)\}$ e quindi la tesi.

(vii) Proviamo preliminarmente che è verificata l'ipotesi considerata in (vi) relativamente al metapredicato $X''(\vec{x}_{-j}) : \exists x\, (\text{non}\, X(\vec{x}_{-j}; x))$.

Infatti, dato n, esiste, per ipotesi, un naturale h tale che sussiste l'equivalenza:

$$\forall e X(\vec{e}_{-j}; e) \Leftrightarrow \forall e \in A_h X(\vec{e}_{-j}; e), \tag{3.10}$$

qualunque siano $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$. Proviamo ora che per X'' è verificata l'ipotesi considerata in (vi) proprio con questo h.

Assumiamo intanto, dato $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$, che esiste un'entità e che verifica la proposizione "non $X(\vec{e}_{-j}; e)$". Allora, è pure verificata la "non $\forall e X(\vec{e}_{-j}; e)$" e quindi, per (3.10), sussiste la "non $\forall e \in A_h X(\vec{e}_{-j}; e)$", cioè la "$\exists e \in A_h(\text{non} X(\vec{e}_{-j}; e))$". Essendo l'implicazione opposta banale ne segue l'asserto.

Ciò premesso, applicando (i) e (vi), otteniamo

$$\begin{aligned}
\star\text{-}(\forall x X(\vec{x}_{-j}; x)\,) &\Leftrightarrow \star\text{-}(\text{non}\,(\exists x\,\text{non}\,X(\vec{x}_{-j}; x)))\\
&\Leftrightarrow \text{non}\ \star\text{-}(\exists x\,\text{non}X(\vec{x}_{-j}; x))\,\text{e}\,x_i \in \mathcal{I}\,(i \neq j)\\
&\Leftrightarrow \text{non}(\,\exists x \star\text{-}(\text{non}X(\vec{x}_{-j}; x)))\,\text{e}\,x_i \in \mathcal{I}\,(i \neq j)\\
&\Leftrightarrow \text{non}\,(\exists x\,\text{non}\,(\star\text{-}X(\vec{x}_{-j}; x)))\,\text{e}\,x, x_i \in \mathcal{I}\,(i \neq j)\\
&\Leftrightarrow \forall x \star\text{-}X(\vec{x}_{-j}; x)\,\text{e}\,x, x_i \in \mathcal{I}\,(i \neq j) \Leftrightarrow \forall x \star\text{-}X(\vec{x}_{-j}; x),
\end{aligned}$$

completando così la dimostrazione. □

Il teorema appena provato permette di trarre la seguente importante conclusione. Se il metapredicato $X(x_1, \ldots, x_s)$ è composto dalle frasi $X_1, \ldots, X_r$ mediante i connettivi "non", "e", "o", "implica", "biimplica" e i quantificatori "esiste" e "per ogni" verificanti le ipotesi previste nel Teorema 3.4.1(vi),(vii), allora lo $\star$-concetto associato si può esprimere mediante gli $\star$-concetti relativi alle $X_1, \ldots, X_r$, mantenendo inalterati connettivi e quantificatori.

Circa la condizione posta al quantificatore "esiste", osserviamo poi quanto segue. Fissati j e $\vec{e}_{-j} \in A_n^{s-1}$ $(i \neq j)$, se esiste e tale che $X((\vec{e}_{-j}; e))$ sussista, allora esiste certamente un naturale h tale che $e \in A_h$. Questo h, però, *dipende* dalle prefissate entità e_i e quindi varia, in generale, al loro variare, anche se ristrette al livello A_n. La condizione (vi) del teorema precedente appare dunque come una *condizione di uniformità*, e ciò nel senso che h *dipende* dal livello A_n (da n), ma *non* dai particolari $s-1$ elementi ivi scelti in modo che sia verificata la $X((\vec{e}_{-j}; e))$, per qualche entità e.

Ovviamente, analoghe considerazioni possono essere fatte sulla condizione posta per il quantificatore universale.

Si rifletta infine, che in forza del Teorema 3.2.3, il Teorema 3.4.1(vi) non è altro che una riformulazione del Teorema 3.2.2(x). In quest'ultimo, la condizione (i) del Teorema 3.2.3 è, per il Teorema 3.2.4, anche necessaria, qualora $\star$ sia un allargamento. Ne segue che, nel *contesto nonstandard*, le condizioni di uniformità, richieste nel Teorema 3.4.1(vi),(vii), sono *condizioni necessarie e sufficienti* affinchè il simbolo $\star$ possa "scavalcare" i quantificatori.

3.5 Descrivibilità degli starconcetti

La nozione di $\star$-concetto è stata introdotta, nella sezione 3.3, in modo che al concetto espresso dal metapredicato $X(x_1, \dots, x_s)$, rappresentato in $\hat{A}$ dall'insieme $\mathcal{X}$, corrispondesse il concetto, rappresentato in $\mathcal{I}$, dall'insieme ${}^{(\star)}\mathcal{X}$. Ciò è stato ottenuto associando al metapredicato $(x_1, \dots, x_s) \in \mathcal{X}$ il metapredicato $(x_1, \dots, x_s) \in {}^{(\star)}\mathcal{X}$. Concetto e $\star$-concetto appaiono dunque espressi da frasi strettamente analoghe.

Va tuttavia sottolineato che tali frasi non sono di fatto significative senza che intervenga una preventiva descrizione di $\mathcal{X}$ e di ${}^{(\star)}\mathcal{X}$, cioè senza che sia stato dato un esplicito significato, mediante metapredicati, alla relazione di appartenenza ai rispettivi insiemi. Per l'insieme $\mathcal{X}$ questa descrizione è assicurata dal metapredicato $X(x_1, \dots, x_s)$ che sta a monte di tutto il discorso. Il problema riguarda pertanto l'insieme ${}^{(\star)}\mathcal{X}$. Per quest'ultimo è allora naturale chiedersi se sia possibile ottenerne una descrizione che rappresenti analogie con la metafrase di partenza $X(x_1, \dots, x_s)$ e, conseguentemente, che sia di analogo significato.

Una prima, risposta positiva è fornita dal Teorema 2.4.1. Ricordiamo in proposito che riguarda quei sottoinsiemi C di una assegnata entità (prodotto cartesiano di un numero finito di entità) che risultino descrivibili tramite un *predicato limitato* $W(x_1, \dots, x_s)$ del linguaggio L. Sotto queste condizioni l'insieme ${}^{(\star)}\mathcal{X}$ è descrivibile, in $\mathcal{I}$, con il predicato $W^\star(x_1, \dots, x_s)$, cioè in modo analogo a $\mathcal{X}$, visto che $W^\star(x_1, \dots, x_s)$ si ottiene da $W(x_1, \dots, x_s)$ con la semplice sostituzione delle costanti soggettive con le loro trasformate.

Il risultato ora ricordato è collegato, ovviamente, al monomorfismo $\star$. Appare naturale allora cercare di ottenerne una generalizzazione in relazione al prolungamento $(\star)$. E quanto facciamo ora, generalizzandolo sia nei riguardi dell'insieme C, che potrà non essere un'entità, sia in relazione alla formalizzazione della $X(x_1, \dots, x_s)$, che potrà non essere limitata. Tuttavia tale formalizzazione non potrà non tener conto delle condizioni limitative imposte dal Teorema 3.4.1(vi),(vii), riguardanti i quantificatori.

A tale proposito, considerati il quantificatore $\mathcal{Q} \in \{\sqcap, \sqcup\}$ e un predicato s-ario di L della forma $\mathcal{Q}y\, W(y; x_1, \dots, x_s)$, chiamiamo $\mathcal{Q}$ **finitamente limitabile** (in $\hat{A}$) se:

− per ogni naturale n esiste un naturale h tale che:

$$\hat{A} \Vdash \mathcal{Q}y\, W(y; e_1, \dots, e_s) \Leftrightarrow \hat{A} \Vdash \mathcal{Q}y \lessdot A_h W(y; e_1, \dots, e_s),$$

qualunque siano $e_1, \dots, e_s \in A_n$.

Infine una wff di L è **finitamente limitabile** (in $\hat{A}$) (in simboli F-wff) se *tutti* i suoi quantificatori sono finitamente limitabili.[13]

Ovviamente, sono finitamente limitabili ogni quantificatore limitato e ogni wff priva di quantificatori.

È importante osservare, ancora, che la nozione di quantificatore finitamente limitabile, in quanto basata sull'interpretazione delle wff, è una *nozione semantica*. E ciò contrariamente a quella di quantificatore limitato che è invece una *nozione sintattica*.

Osserviamo infine che se W è una F-wff, allora, per ogni fissato n, restringendo le sue variabili libere al livello A_n essa risulta sostituibile *ai fini semantici* con una wff limitata. In questa ipotesi, infatti, è possibile sostituire nella W un quantificatore per volta con uno limitato ottenendo, ad ogni passo, una wff equivalente.

Il prossimo teorema generalizza il Teorema 2.4.1, nel senso che sostituisce il predicato limitato ivi considerato con uno finitamente limitabile.

Teorema 3.5.1. *Sia $W(x_1, \ldots, x_s)$ un F-predicato s-ario d L . Posto allora:*

$$C = \{(e_1, \ldots, e_s) \in \hat{A}^s \,|\, \hat{A} \Vdash W(e_1, \ldots, e_s)\}$$

riesce ${}^{(\star)}C = \{(e_1, \ldots, e_s) \in \mathcal{I}^s \,|\, \mathcal{I} \Vdash W^\star(e_1, \ldots, e_s)\}$, *cioè:*

$$\star\text{-}\,{}^{\imath_{\hat{A}}}W(x_1, \ldots, x_s) \Leftrightarrow {}^{\imath_{\mathcal{I}}}W^\star(x_1, \ldots, x_s).$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione sui passi costruttivi della wff a partire, ovviamente, dalle formule atomiche. In forza del Principio di sostituzione (Teorema 3.3.3), basta limitarsi ai quattro casi seguenti:.

a) $W(x_1, x_2) : x_1 \asymp x_2$. Allora $C'_n = C \cap \hat{A}^2 = \{(e_1, e_2) \in A_n^2 \,|\, \hat{A} \Vdash e_1 \asymp e_2\}$ da cui, tramite il Teorema 2.4.1, ${}^\star C'_n = \{(e_1, e_2) \in {}^\star A_n^2 \,|\, \mathcal{I} \Vdash (e_1 \asymp e_2)^\star\}$. Passando al limite, per i Teoremi 2.1.3(i), 3.1.1(ii) e il Lemma 3.2.1, risulta ${}^{(\star)}C = \{(e_1, e_2) \in \mathcal{I}^2 \,|\, \mathcal{I} \Vdash W^\star(e_1, e_2)\}$.

b) $W(x_1, x_2) : x_1 \lessdot x_2$, $W(x_1, \ldots, x_s, x) : \vec{x} \asymp x$ e $W(x_1, \ldots, x_s, x) : \vec{x} \lessdot x$. La tesi si consegue in modo del tutto analogo a quello del caso precedente.

Considerando l'ipotesi induttiva, siano $W(x_1, \ldots, x_s), W_1(y_1, \ldots, y_r; x_1, \ldots, x_s)$ e $W_2(x_1, \ldots, x_s; z_1, \ldots, z_t)$ delle F-wff verificanti la tesi. Tenuto conto delle regole

[13]Non tutte le wff sono finitamente limitabili come mostra l'esempio seguente, nel quale, per semplicità, non forniamo la $W(x)$ direttamente ma la sua interpretazione in $\hat{A}$:
$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists y, u \in \hat{A}\, (u : \{0, \ldots, n\} \mapsto y \,\text{e}\, \forall z_1, z_2 \in \{0, \ldots, n\}\, (z_1 < z_2 \Leftrightarrow u(z_1) \in u(z_2)))$.

di costruzione delle wff, possiamo limitarci a considerare, per il Principio di sostituzione, le seguenti F-wff.
c) $\neg W$. Applicando il Teorema 3.4.1(i) e l'ipotesi induttiva risulta

$$\begin{aligned} \star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}(\neg W) &\Leftrightarrow \star\text{-}(\text{non}\,{}^{\imath\hat{A}}W) \Leftrightarrow \text{non}\,(\star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}W)\,\text{e ogni } x_i \in \mathcal{I} \\ &\Leftrightarrow \text{non}\,{}^{\imath\mathcal{I}}W^\star\,\text{e ogni } x_i \in \mathcal{I} \Leftrightarrow \text{non}\,{}^{\imath\mathcal{I}}W^\star \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}(\neg W^\star) \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}(\neg W)^\star. \end{aligned}$$

d) $W_1 \vee W_2, W_1 \wedge W_2, W_1 \to W_2, W_1 \leftrightarrow W_2$. Per queste wff la tesi si ottiene sfruttando l'ipotesi induttiva e applicando il Teorema 3.4.1(ii)÷(v), rispettivamente. Riportiamo, a titolo d'esempio, la prova relativa a $W_1 \to W_2$. Risulta, per (iv),

$$\begin{aligned} \star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}(W_1 \to W_2) &\Leftrightarrow \star\text{-}({}^{\imath\hat{A}}W_1 \Rightarrow {}^{\imath\hat{A}}W_2) \Leftrightarrow (\star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}W_1 \Rightarrow \star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}W_2)\,\text{e ogni } x_i, y_j, z_h \in \mathcal{I} \\ &\Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W_1^\star \Rightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W_2^\star\,\text{e ogni } x_i, y_j, z_h \in \mathcal{I} \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W_1^\star \Rightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W_2^\star \\ &\Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}(W_1^\star \to W_2^\star) \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}(W_1 \to W_2)^\star. \end{aligned}$$

e) $\sqcap x_j W$, $\sqcup x_j W$ F-wff. Facile la dimostrazione anche in questo caso, una volta osservato che la condizione che siano F-wff, ammessa per ipotesi, consente di applicare il Teorema 3.4.1(vi),(vii). Riportiamo, a titolo d'esempio, quella relativa alla $\sqcap x_j W$. Risulta, tramite (vii),

$$\begin{aligned} \star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}(\sqcap x_j W) &\Leftrightarrow \star\text{-}(\forall x_j\,{}^{\imath\hat{A}}W) \Leftrightarrow \forall x_j \in \mathcal{I}\,\star\text{-}{}^{\imath\hat{A}}W \\ &\Leftrightarrow \forall x_j \in \mathcal{I}\,{}^{\imath\mathcal{I}}W^\star \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}(\forall x_j W^\star) \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}(\forall x_j W)^\star. \end{aligned}$$

La dimostrazione è così conclusa. □

3.6 Starconcetti fondamentali

I teoremi stabiliti nelle sezioni precedenti permettono ora di iniziare e di condurre uno studio sistematico degli $\star$-concetti in vista di facilitare, nella seconda e terza parte, le applicazioni dell'analisi nonstandard.

Perveniamo così, *per quanto riguarda gli $\star$-concetti riportati nei prossimi elenchi*, alla seguente fondamentale conclusione:
– *Lo $\star$-concetto $\star$-$X(x_1, \ldots, x_s)$ si ottiene dal concetto $X(x_1, \ldots, x_s)$ (salvo quello relativo all'insieme potenza) semplicemente aggiungendo a $X(x_1, \ldots, x_s)$ la condizione di internalit*à *per le variabili libere $x_1, \ldots, x_s$.*
Per questo motivo, al fine di agevolare l'esposizione, abbiamo deciso di sostituire la scrittura:

$$\star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s) \Leftrightarrow X(x_1, \ldots, x_s)\,\text{e}\,x_1, \ldots, x_s\,\text{interne}$$

con la più snella:

$$\text{“}X(x_1,\ldots,x_s)\text{” e } x_1,\ldots,x_s \text{ interne},$$

che mette in rilievo sia il concetto di provenienza (virgolettato) che rimane invariato nel passaggio allo $\star$-concetto, che il requisito di internalità delle variabili connaturato con la nozione di $\star$-concetto. Così, ad esempio, con riferimento al concetto $X(x)$: x atomo, la scrittura: $\ulcorner$“x atomo” e x interna$\urcorner$ rappresenta l'equivalenza: $\star$-(x atomo) $\Leftrightarrow$ x atomo e x interna.

Inoltre, sempre nell'ottica di semplificazione, conveniamo di estendere anche alle scritture linguistiche semiformalizzate sia la nozione di quantificatore finitamente limitabile che quella di wff finitamente limitabile.

Osserviamo che gli $\star$-concetti riportati negli elenchi vengono stabiliti, o ricorrendo direttamente alla definizione di $\star$-concetto, o al Teorema d'isolamento 3.5.1 e al Teorema 3.4.1 relativo alla composizione degli $\star$-concetti (teoremi che non vengono richiamati nelle dimostrazioni, dato il loro uso evidente).

Veniamo ora agli elenchi preannunciati, ove viene omessa, naturalmente, la dichiarazione d'internalità di una variabile, qualora sia automaticamente soddisfatta.

Teorema 3.6.1 ($\star$-concetti elementari)**.** *Sussistono le equivalenze:*

(i) *“x atomo” e x interna;*

(ii) *“x entità propria” e x interna;*

(iii) *“$x_1 = x_2$” e x_1 interna;*

(iv) *“$x_1 \in x_2$” e x_2 interna;*

(v) *“$x_1 \subset x_2$” e x_1, x_2 interne.*

Dimostrazione. (i) Il concetto “x atomo” è rappresentato dall'insieme A. Riesce allora ${}^{(\star)}A = {}^{\star}A$ e quindi, per il Teorema 2.1.3(ii), la tesi.

(ii) Al concetto “x entità propria” è associato l'insieme $\hat{A} \setminus A$. Riesce allora, tramite i Teoremi 2.1.3(iii) e 3.2.2(ii),(iv), ${}^{(\star)}(\hat{A} \setminus A) = \mathcal{I} \setminus {}^{\star}A$ da cui la tesi.

(iii) Osservato che l'uguaglianza si esprime il L con la wff atomica: $x_1 \asymp x_2$, otteniamo la tesi, osservato che la dichiarazione d'internalità basta farla per una sola delle due variabili.

(iv) Prova analoga alla precedente. La dichiarazione d'internalità di x_1 si può scaricare, essendo, per il Teorema 2.1.3(iv), interni gli elementi di entità interne.

(v) Considerata la semiformalizzazione “x_1, x_2 entità proprie e $\forall y \in x_1 (y \in x_2)$” avente il quantificatore finitamente limitabile, risulta, tramite (ii), la tesi. $\square$

Siamo ora in grado di provare un risultato che analizza gli $\star$-concetti relativi a frasi del tipo $\mathcal{Q}\, x_j \in x\, X(x_1, \ldots, x_s)$.

Teorema 3.6.2. *Sia $X(x_1, \ldots, x_s)$ un metapredicato s-ario. Sussistono allora le equivalenze:*

(i) $\star$-$(\exists x_j \in x\, X(x_1, \ldots, x_s)) \Leftrightarrow \exists x_j \in x \star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s)$ *e x interno;*

(ii) $\star$-$(\forall x_j \in x\, X(x_1, \ldots, x_s)) \Leftrightarrow \forall x_j \in x \star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s)$ *e x interno;*

(iii) $\star$-$(\exists x_j \in a\, X(x_1, \ldots, x_s) \Leftrightarrow \exists x_j \in {}^\star a \star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s)$*;*

(iv) $\star$-$(\forall x_j \in a\, X(x_1, \ldots, x_s) \Leftrightarrow \forall x_j \in {}^\star a \star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s)$*.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè le prove delle proposizioni (i), (ii) sono simili, ne riportiamo quella di (i). Essendo analoghe anche quelle di (iii), (iv), ci limitiamo a considerare quella di (iii).

(i) Notato che il quantificatore è finitamente limitabile, risulta

$$\star\text{-}(\exists x_j \in x\, X(\vec{x})) \Leftrightarrow \exists x_j(\star\text{-}(x_j \in x \,\mathrm{e}\, X(\vec{x}))) \Leftrightarrow \exists x_j(\star\text{-}(x_j \in x) \,\mathrm{e}\, \star\text{-}X(\vec{x})) \quad (3.11)$$

da cui, per il Teorema 3.6.1(iv), si ha

$$\star\text{-}(\exists x_j \in x\, X(x_1, \ldots, x_s)) \Leftrightarrow \exists x_j(x_j \in x \,\mathrm{e}\, \star\text{-}X(x_1, \ldots, x_s)) \,\mathrm{e}\, x \in \mathcal{I}.$$

(iii) Basta sostituire in (3.11) la variabile x con l'entità a e usare il Principio di sostituzione. □

Ora, prima di procedere con gli altri $\star$-concetti fondamentali, rileviamo che nelle dimostrazioni dei teoremi (dal 3.6.3 al 3.6.7) tutte le semifomalizzazioni che intervengono sono finitamente limitabili.

Teorema 3.6.3 ($\star$-operazioni insiemistiche)**.** *Sussistono le equivalenze:*

(i) *"$x = x_1 \setminus x_2$" e x_1, x_2 interne;*

(ii) *"$x = \cap x_1$" e x_1 interna;*

(iii) *"$x = \cup x_1$" e x_1 interna;*

(iv) *"$x = \{x_1, \ldots, x_s\}$" e tutte le x_i interne;*

(v) *"$x = x_1 \cap \cdots \cap x_s$" e tutte le x_i interne;*

(vi) “$x = x_1 \cup \cdots \cup x_s$” *e tutte le* x_i *interne;*

(vii) $\star$-$(x = \mathbb{P}(x_1)) \Leftrightarrow x$ *insieme delle parti interne di* x_1 *e* x, x_1 *interne.*

Dimostrazione. (i) Considerata la semiformalizzazione:

$$x, x_1, x_2 \,\text{entità proprie e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow y \in x_1 \,\text{e non}(y \in x_2)),$$

tramite il Teorema 3.6.1(ii),(iv) si ha la tesi.

(ii) Considerata la semiformalizzazione

$$x, x_1 \,\text{entità proprie e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow \forall z \in x_1\, (z \,\text{entità propria} \Rightarrow y \in z)) \\ \text{e}\, \exists z_1 \in x_1\, (z_1 \,\text{entità propria}),$$

otteniamo, tramite il Teorema 3.6.1(ii),(iv), la tesi.

(iii) Considerata la semiformalizzazione

$$x, x_1 \,\text{entità proprie e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow \exists z \in x_1\, (z \,\text{entità propria e}\, y \in z)),$$

si procede in modo analogo alla prova precedente.

(iv) Sia $s = 2$. Considerata allora la semiformalizzazione “x entità propria e $\forall y\, (y \in x \Leftrightarrow y = x_1 \,\text{o}\, y = x_2)$” si ha, per il Teorema 3.6.1(iii),(iv), la tesi. Da qui, procedendo per induzione, si completa la prova.

(v) Considerata la semiformalizzazione

$$x_1, \ldots, x_s \,\text{entità proprie e}\, \exists y\, (x = \cap y \,\text{e}\, y = \{x_1, \ldots, x_s\}),$$

otteniamo, tramite (ii), (iv) e il Teorema 3.6.1(ii), la tesi.

(vi) Analoga alla precedente, usando (iii) al posto di (ii).

(vii) Considerata la semiformalizzazione

$$x, x_1 \,\text{entità proprie e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow y \,\text{entità propria e}\, y \subset x_1),$$

otteniamo, tramite il Teorema 3.6.1(ii),(iv),(v), la tesi. □

Teorema 3.6.4 ($\star$-(s-pla) e $\star$-concetti collegati)**.** *Sussistono le equivalenze:*

(i) “$x = (x_1, \ldots, x_s)$” *e tutte le* x_j *interne;*

(ii) “$(x_1, \ldots, x_s) \in x$” *e* x *interna;*

(iii) “$x = x_1 \times \cdots \times x_s$” *e tutte le* x_j *interne;*

(iv) “$x \subset x_1 \times \cdots \times x_s$” *e* x *e tutte le* x_j *interne;*

(v) *"$x = \pi^s_j(x_1)$" e x_1 interna;*

(vi) *"$x = x_1[x_2]$" e x_1, x_2 interne;*

(vii) *"$x = x_1 \circ x_1$" e x_1, x_2 interne;*

(viii) *"$x = x_1^{-1}$" e x_1 interna;*

(ix) *"x relazione s-aria" e x interna;*

(x) *"x applicazione" e x interna;*

(xi) *"x applicazione di x_1 in x_2" e x, x_2 interne;*

(xii) *"x applicazione iniettiva" e x interna;*

(xiii) *"x applicazione di x_1 in x_2 suriettiva (biunivoca)" e x interna;*

(xiv) *"x applicazione identica su x_1" e x interna;*

(xv) *"x_1 applicazione e $x = x_1(y_1, \ldots, y_s)$" e x_1 interna;*

(xvi) *"$u_1, \ldots u_m$ applicazioni e $(u_1(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}), \ldots, u_m(x_{m1}, \ldots, x_{ms_m})) \in u$" e $u, u_1, \ldots, u_m$ interne;*

(xvii) *"$u_1, \ldots u_m$ applicazioni e $(u_1(x_{11}, \ldots, x_{1s_1}), \ldots, u_m(x_{m1}, \ldots, x_{ms_m})) = u$" e $u, u_1, \ldots, u_m$ interne;*

(xviii) *"u_1, u_2 applicazioni e $u_1(x_1, \ldots, x_s) = u_2(y_1, \ldots, y_r)$" e u_1, u_2 interne;*

(xix) *"u_1, u_2 applicazioni e $u_1(x_1, \ldots, x_s) \in u_2(y_1, \ldots, y_r)$" e u_1, u_2 interne;*

(xx) *"x_1 applicazione di dominio y_1 e $y \subset y_1$ e $x = x_1|_y$" e x_1, y, y_1 interne.*

Dimostrazione. Per quanto riguarda le dimostrazioni, avvertiamo che non tutte sono sviluppate in ogni dettaglio.

(i) Si formalizza con la wff $\vec{x} \asymp x$.[14] Conseguentemente, l'associato $\star$-concetto è "$x = \vec{x}$ e $x, x_1, \ldots, x_s$ interne". Per il Teorema 2.2.3(iv), possiamo scaricare la dichiarazione di internalità per x.

(ii) Si formalizza con la wff $\vec{x} \lessdot x$. Conseguentemente, l'associato $\star$-concetto è "$\vec{x} \in x$ e $x, x_1, \ldots, x_s$ interne". Per i Teoremi 2.1.3(iv) e 2.5.3(ii), possiamo scaricare le dichiarazioni di internalità di $x_1, \ldots, x_s$.

[14]Vedi nota 11. Ovviamente un discorso analogo vale anche per la notazione $\vec{x} \lessdot x$.

(iii) La $x = x_1 \times \cdots \times x_s$ si semiformalizza con la frase

$$x, x_1, \ldots, x_s \,\text{entità proprie e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow \exists z_1 \in x_1 \cdots \exists z_s \in x_s\, (y = \vec{z})).$$

Ne segue, per (i) e il Teorema 3.6.1(ii),(iv), la tesi, una volta osservato che, per il Teorema 2.5.2(i), è scaricabile la dichiarazione di internalità per x.

(iv) Considerata la semiformalizzazione $\exists y\, (x \subset y$ e $y = x_1 \times \cdots \times x_s))$, otteniamo, tramite (iii) e il Teorema 3.6.1(v), la tesi, osservato che, per quanto visto prima, è scaricabile la dichiarazione di internalità per y.

(v) Considerata la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} &x, x_1 \,\text{entità proprie} \\ &\qquad \text{e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow \exists z, z_1, \cdots, z_{j-1}, z_{j+1}, \cdots, z_s\, (z \in x_1 \,\text{e}\, (\vec{z}_{j-1}; y) = z), \end{aligned}$$

otteniamo la tesi, tramite il Teorema 3.6.1(ii),(iv), tenuto conto che, per il Teorema 2.5.2(iii), si può scaricare la dichiarazione di internalità per x.

(vi) Considerata la semiformalizzazione

$$x, x_1, x_2 \,\text{entità proprie e}\, \forall y (y \in x \Leftrightarrow \exists z_1, z_2\, (z_1 \in x_1 \wedge z_2 \in x_2 \,\text{e}\, (z_2, y) = z_1)),$$

otteniamo la tesi, tramite (i) e i soliti teoremi più volte richiamati, notato che, per il Teorema 2.5.2(iv), si può scaricare la dichiarazione di internalità per x.

(vii) Considerata la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} &x, x_1, x_2 \,\text{entità proprie} \\ &\qquad \text{e}\, \forall\, y\, (y \in x \Leftrightarrow \exists z_1, z_2, z_3, u_1, u_2\, (u_1 \in x_1 \,\text{e}\, u_2 \in x_2 \\ &\qquad\qquad \text{e}\, (z_1, z_3) = u_1 \,\text{e}\, (z_2, z_1) = u_2 \,\text{e}\, (z_2, z_3) = y)), \end{aligned}$$

si procede nel solito modo. Osserviamo solamente che, per il Teorema 2.5.2(vii), è scaricabile la dichiarazione di internalità per x.

(viii) Considerata la semiformalizzazione

$$x, x_1 \,\text{entità proprie e}\, \forall y\, (y \in x \Leftrightarrow \exists z_1, z_2\, ((z_1, z_2) \in x_1 \,\text{e}\, (z_2, z_1) = y))$$

procedere come al solito e ricorrere al Teorema 2.5.2(v) per scaricare la dichiarazione di internalità per x.

(ix) Considerata la semiformalizzazione

$$\exists y\, (x \subset y \,\text{e}\, y = x_1 \times \cdots \times x_s \,\text{e}\, x_1 = \pi_1^s(x) \,\text{e}\, \ldots \,\text{e}\, x_s = \pi_s^s(x)),$$

otteniamo la tesi, tramite (iii), (v) e il Teorema 3.6.1(v), notato che, per il Teorema 2.5.2(i),(iii), si possono scaricare le dichiarazione di internalità per $y, x_1, \ldots, x_s$.

(x) Considerata la semiformalizzazione

$$X(x) : x \,\text{relazione binaria}\, \text{e}\, \forall x_1, y_1, y_2\, ((x_1, y_1) \in x \,\text{e}\, (x_1, y_2) \in x \Rightarrow y_1 = y_2),$$

otteniamo, ricorrendo a (ii), (ix) e al Teorema 3.6.1(ii),(iii), la tesi.

(xi) Considerata la semiformalizzazione

$$x \,\text{applicazione e}\, \exists y\, (x_1 = \pi_1^2(x) \,\text{e}\, y = \pi_2^2(x) \,\text{e}\, y \subset x_2),$$

ricorrere a (v), (x) e al Teorema 3.6.1(v), ricordando che sono scaricabili le dichiarazioni di internalità per x_1 e y.

(xii) Considerata la semiformalizzazione

$$x \,\text{applicazione e}\, \forall x_1, x_2, y\, ((x_1, y) \in x \,\text{e}\, (x_2, y) \in x \Rightarrow x_1 = x_2),$$

procedere al solito modo.

(xiii) Data la semiformalizzazione "x applicazione di x_1 in x_2 e $x_2 = \pi_2^2(x)$", usare (v), (xi).

(xiv) Con riferimento alla semiformalizzazione "x applicazione di x_1 in x_1 e $\forall y \in x_1((y, y) \in x)$", otteniamo la tesi tramite (ii) e (xi).

(xv) Data la semiformalizzazione "x_1 applicazione e $(y_1, \ldots, y_s, x) \in x_1$", ne segue, per (ii), (x), la tesi, una volta atteso che si può scaricare la dichiarazione di internalità per x.

(xvi) Considerata la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} &u_1, \ldots, u_m \,\text{applicazioni} \\ &\qquad \text{e}\, \exists y_1, \cdots, y_m\, ((x_{11}, \ldots, x_{1s_1}, y_1) \in u_1 \,\text{e}\, \cdots \,\text{e}\, (x_{m1}, \ldots, x_{ms_m}, y_m) \in u_m \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{e}\, (y_1, \ldots, y_m) \in u), \end{aligned}$$

otteniamo, tramite (ii) e (x), la tesi.

(xvii) Analoga alla precedente dimostrazione, sostituendo (ii) con (i) e osservando che per il Teorema 2.2.3(iv), la richiesta di internalità per u è scaricabile.

(xviii) Considerata la semiformalizzazione

$$u_1, u_2 \,\text{applicazioni e}\, \exists x, y\, (x = u_1(x_1, \ldots, x_s) \,\text{e}\, y = u_2(y_1, \ldots, y_r) \,\text{e}\, x = y),$$

otteniamo, per (i), (x) e il Teorema 3.6.1(iii), la tesi, osservato che la richiesta di internalità per x è scaricabile (Teorema 2.5.2(viii)).

(xix) Basta sostituire nella dimostrazione precedente $=$ con $\in$.

(xx) Al fine di analizzare, preliminarmente, lo $\star$-concetto relativo a "$x = x_1|_y$", consideriamo la semiformalizzazione

$$x, x_1, y \,\text{ entità proprie e}\, \forall z, z_1\, ((z, z_1) \in x \Leftrightarrow z \in y \,\text{e}\, \text{e}\, (z, z_1) \in x_1).$$

Otteniamo allora, tramite (ii) e il Teorema 3.6.1(ii), lo $\star$-concetto "$\forall z, z_1\,((z,z_1) \in x \Leftrightarrow z \in y\,\mathrm{e}\,\mathrm{e}\,(z,z_1) \in x_1)$ e x, x_1, y entità interne proprie", notato che la richiesta di internalità per z, z_1 è scaricabile (Teorema 2.5.3(ii)).

Passando infine all $\star$-concetto in oggetto, tramite la semiformalizzazione

$$x_1 \text{ applicazione e } y_1 = \pi_1^2(x_1) \text{ e } y \subset y_1 \text{ e } x = x_1|_y,$$

otteniamo, per (v), (x) e il Teorema 3.6.1(v), la tesi, osservato che, per il Teorema 2.5.2(ix), la richiesta di internalità per x è scaricabile. □

Teorema 3.6.5 ($\star$-ordine)**.** *Sussistono le equivalenze:*

(i) *"x relazione d'ordine (totale) in x_1"* e *x interna;*

(ii) *"x_2 precede x_3 con l'ordine x in x_1"* e *x interna;*

(iii) *"x_2 immediato seguente di x_3 con l'ordine x in x_1"* e *x interna;*

(iv) *"x_3 minimale (massimale), minimo (massimo) di $x_2 \subset x_1$ con l'ordine x in x_1"* e *x, x_2 interne;*

(v) *"x_3 minorante (maggiorante), estremo inferiore (superiore) di $x_2 \subset x_1$ con l'ordine x in x_1"* e *x, x_2 interne;*

(vi) *"x_4 intervallo chiuso (aperto, semiaperto) di estremi x_2, x_3 appartenenti a x_1 con l'ordine x in x_1"* e *x interna;*

(vii) *"x_3 segmento inferiore (superiore) chiuso (aperto) di origine x_2 appartenente a x_1 con l'ordine x in x_1"* e *x interna.*

Dimostrazione. (i) La frase "x relazione d'ordine in x_1" è equivalente alla "$x \subset x_1 \times x_1$ e x riflessiva e x antisimmetrica e x transitiva". Osservato che le proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva si semiformalizzano, rispettivamente, con le $\forall y \in x_1\,((y,y) \in x)$, "$\forall y_1, y_2 \in x_1\,((y_1,y_2) \in x\,\mathrm{e}\,(y_2,y_1) \in x \Rightarrow y_1 = y_2)$"e

$$\forall y_1, y_2, y_3 \in x_1\,((y_1,y_2) \in x\,\mathrm{e}\,(y_1,y_3)\ \in x \Rightarrow (y_1,y_3) \in x), \tag{3.12}$$

si procede ricorrendo ai Teoremi 3.6.1(iii), 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii),(iv). Per quanto riguarda la scaricabilità della dichiarazione di internalità per x_1, basta osservare che, per la proprietà riflessiva, $x_1 = \pi_1^2(x)$ e ricordare il Teorema 2.5.2(iii).

Passando all'ordinamento totale, la prova è analoga. Basta aggiungere alle semiformalizzazioni precedenti la condizione

$$\forall y_1, y_2 \in x_1\,((y_1,y_2) \in x\,\mathrm{o}\,(y_2,y_1) \in x). \tag{3.13}$$

(ii) Segue da (i) e dal Teorema 3.6.4(ii), considerando la semiformalizzazione "x relazione d'ordine in x_1 e $(x_2, x_3) \in x$".

(iii) Considerata la semiformalizzazione

$$(x_3, x_2) \in x \text{ e } x_3 \neq x_2 \text{ e } \forall y \in x_1((x_3, y) \in x \Rightarrow (x_2, y) \in x),$$

la tesi segue da (i) e dai Teoremi 3.6.1(iii), 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii).

(iv) Per "x_3 minimale di x_2" e "x_3 minimo d x_2" la tesi si consegue facilmente, tramite i teoremi già citati, osservato che queste proprietà possono essere espresse, rispettivamente, tramite le semiformalizzazioni "$x_3 \in x_2 \,\text{e}\, \forall y \in x_2\,((y, x_3) \in x \Rightarrow y = x_3)$" e "$x_3 \in x_2 \,\text{e}\, \forall y \in x_2\,((x_3, y) \in x)$". Analoghe espressioni si hanno poi per "x_3 massimale" e "x_3 massimo".

(v) La frase "x_3 minorante di x_2" è semiformalizzabile tramite la "$x_3 \in x_1$ e $\forall y \in x_2\,((x_3, y) \in x)$"; la "$x_3$ estremo inferiore di x_2", invece, mediante la "$\forall y \in x_1\,(x_3 \,\text{minorante di}\, x_2 \text{ e } y \text{ minorante di } x_2 \Rightarrow (y, x_3) \in x)$". Si giunge quindi alla tesi usando (i), (iv) e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii). Analoghe considerazioni valgono per "x_3 maggiorante di x_2" e "x_3 estremo superiore di x_2".

(vi) Il concetto "$x_4 = [x_2, x_3]$" è semiformalizzabile con la "$\forall y \in x_1\,((x_2, y) \in x$ e $(y, x_3) \in x \Leftrightarrow y \in x_4))$". Procedendo, nel modo ormai usuale, si perviene allo $\star$-concetto con la dichiarazione di internalità per x_4, che può essere scaricata, essendo conseguenza dell'internalità di x e x_1 (Teoremi 2.2.3(vii) e 2.5.2(vi), ponendo $b = \leq$), osservato che $x_4 = [x_2, \hookrightarrow [\cap] \hookleftarrow, x_3]$.[15]

Per gli altri intervalli si procede in modo analogo, tenendo presente che, per quanto riguarda le dichiarazioni di internalità, le uguaglianze $]x_2, x_3[= [x_2, x_3] \setminus \{x_2, x_3\}$, $]x_2, x_3] = [x_2, x_3] \setminus \{x_2\}$, $[x_2, x_3[= [x_2, x_3] \setminus \{x_3\}$ e il Teorema 2.2.3(i),(iii).

(vii) Il concetto "$x_3 =] \hookleftarrow, x_2]$" è semiformalizzabile con la "$\forall y \in x_1\,((y, x_2) \in x \Leftrightarrow y \in x_3))$". Procedendo nel modo ormai usuale si perviene allo $\star$-concetto con la dichiarazione di internalità per x_3, che può essere scaricata, essendo conseguenza dell'internalità di x e x_1 (Teorema 2.5.2(vi), ponendo $b = \leq$).

Per gli altri segmenti si procede in modo analogo. Per le dichiarazioni di internalità, basta osservare che $] \hookleftarrow, x_2[=] \hookleftarrow, x_2] \setminus \{x_2\}$ e $]x_2, \hookrightarrow [= [x_2, \hookrightarrow [\setminus \{x_2\}$. □

Teorema 3.6.6 ($\star$-ordine stretto)**.** *Sussistono le equivalenze:*

(i) "x relazione d'ordine stretto in x_1" e x, x_1 interne;

(ii) "x relazione d'ordine stretto relativo all'ordine x_2 in x_1" e x, x_2 interne;

(iii) "u applicazione crescente (decrescente) di x_1 in x_2 e x_3 ordinamento stretto in x_1 e x_4 ordinamento stretto in x_2" e u, x_2, x_3, x_4 interne;

---

[15] Ove, in generale, $[x, \hookrightarrow [$ $(]x, \hookrightarrow [)$ denota il segmento superiore chiuso (aperto) di origine x e $] \hookleftarrow, x]$ $(] \hookleftarrow, x[)$ quello inferiore chiuso (aperto) di origine x.

(iv) "u applicazione noncrescente (nondecrescente) di x_1 in x_2 e x_3 ordinamento stretto in x_1 e x_4 ordinamento in x_2" e u, x_2, x_3, x_4 interne;

(v) Sussitono proprietà analoghe alle (ii)÷(vii) del teorema precedente, con l'avvertenza di aggiungere la richiesta di internalità per x_1.

Dimostrazione. (i) Considerata la semiformalizzazione

$$x \subset x_1 \times x_1 \,\mathrm{e}\, x \text{ transitiva } \mathrm{e}\, \forall y_1 \forall y_2\, ((y_1, y_2) \in x \Rightarrow \mathrm{non}(y_1 = y_2))$$

la tesi si ottiene usando (3.12) e i Teoremi 3.6.1(iii), 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii),(iv).

(ii) Considerata la semiformalizzazione "x relazione d'ordine stretto in x_1 e x_2 relazione d'ordine in x_1 e $x \subset x_2$", la tesi segue da (i) e dai Teoremi 3.6.1(v) e 3.6.5(i).

(iii) Poichè le dimostrazioni nei due casi sono simili, ci limitiamo a provare quello inerente al caso u crescente. Considerata la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} &u \text{ applicazione di } x_1 \text{ in } x_2 \text{ e } x_3 \text{ ordine stretto in } x_1 \text{ e } x_4 \text{ ordine stretto in } x_2 \\ &\qquad \mathrm{e}\, \forall y_1, y_2 \in x_1\, \forall z_1, z_2 \in x_2\, ((y_1, y_2) \in x_3 \,\mathrm{e}\, (y_1, z_1) \in u \,\mathrm{e}\, (y_2, z_2) \in u \\ &\qquad\qquad \Rightarrow (z_1, z_2) \in x_4, \end{aligned}$$

otteniamo la tesi, tramite (i) e i Teoremi 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii),(xi).

(iv) Usando anche il Teorema 3.6.5(i) procedere come nella prova precedente.

(v) Le dimostrazioni sono del tutto analoghe a quelle fornite nella dimostrazione del teorema precedente, osservando che basta sostituire, all'occorrenza, la proposizione (i) del suddetto teorema con la (i) e osservare che non è possibile scaricare la dichiarazione di internalità di x_1. □

Passando al prossimo risultato, ricordiamo che, con riferimento a un ordinamento, si considerano due condizioni di compatibilità dell'ordinamento rispetto a una data struttura algebrica. Precisamente, data la relazione d'ordine $\prec$ stretto in a e un'operazione binaria $\oplus$ su a, s'introduce la:
– *Proprietà di monotonia*: $a_1 \prec a_2 \Rightarrow a_1 \oplus a_3 \prec a_2 \oplus a_3$ e $a_3 \oplus a_1 \prec a_3 \oplus a_2$.
Inoltre, inserita un'altra operazione $\otimes$ su a e supposto che l'operazione $\oplus$ abbia elemento neutro e, si considera la:
– *Proprietà di monotonia debole*: $a_1 \prec a_2$ e $e \prec a_3 \Rightarrow a_1 \otimes a_3 \prec a_2 \otimes a_3$ e $a_3 \otimes a_1 \prec a_3 \otimes a_2$.

Teorema 3.6.7 ($\star$-operazioni (algebriche binarie))**.** *Sussistono le equivalenze:*

(i) "x_1 operazione (associativa, commutativa) su x" e x_1 interna;

(ii) *"x_2 composto di x_3, x_4 con l'operazione x_1 su x"* e *x_1 interna;*

(iii) *"x_2 operazione su x distributiva (a destra, a sinistra) rispetto all'operazione x_1 su x"* e *x_1, x_2 interne;*

(iv) *"x_1 elemento neutro dell'operazione x_2 su x"* e *x_2 interna;*

(v) *"x_1 elemento simmetrico di x_2 con l'operazione x_3 su x con elemento neutro x_4"* e *x_3 interna;*

(vi) *"x_1 ordinamento in x debolmente monotono rispetto all'operazione x_2 su x e x_2 con elemento neutro x_3"* e *x_1, x_2 interne;*

(vii) *"x_1 ordinamento in x monotono rispetto all'operazione x_2 su x"* e *x_1, x_2 interne.*

Dimostrazione. Essendo i Teoremi 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii) onnipresenti nelle prove che seguono, non vengono più citati, dopo il primo richiamo.

(i) Osservato che la frase "x_1 operazione su x" è formalizzabile mediante la "$\exists y\,(x_1$ applicazione di y in x e $y = x \times x$", basta applicare il Teorema 3.6.4(iii),(xi). Per quanto riguarda invece la dichiarazione di internalità, osserviamo che, se $x_1 \in \mathcal{I}$, allora, per il Teorema 2.5.2(iii), $\pi_1^2(x_1) = x \times x \in \mathcal{I}$ e quindi, tramite il Teorema 2.5.3(iii), x è interna.

Indicata con $u = u_1 \oplus u_2$ l'uguaglianza $(u_1, u_2, u) = ((u_1, u_2), u) \in x_1$, la proprietà associativa si esprime con lo schema

$$y_1 \oplus \underbrace{(y_2 \oplus y_3)}_{y_4} = \underbrace{(y_1 \oplus y_2)}_{y_5} \oplus y_3 \qquad y_6 = y_1 \oplus y_4,\ y_7 = y_5 \oplus y_3$$

da cui otteniamo la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} &x_1 \text{ operazione su } x \\ &\qquad \text{e}\,\forall y_1, \ldots, y_7 \in x\,((y_2, y_3, y_4) \in x_1\,\text{e}\,(y_1, y_4, y_6) \in x_1 \\ &\qquad\qquad \text{e}\,(y_1, y_2, y_5) \in x_1\,\text{e}\,(y_5, y_3, y_7) \in x_1 \Rightarrow y_6 = y_7) \end{aligned}$$

e quindi, tramite quanto appena provato e i Teoremi 3.6.1(iii), 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii), il relativo $\star$-concetto.

Osservato, infine, che la proprietà commutativa si può esprime con la semiformalizzazione "$\forall y_1, \cdots, y_4 \in x\,((y_1, y_2, y_3) \in x_1\,\text{e}\,(y_2, y_1, y_4) \in x_1 \Rightarrow y_3 = y_4)$", otteniamo, per quanto appena visto, il relativo $\star$-concetto.

(ii) Segue da (i), osservato che la frase in oggetto è semiformalizzabile con la "x_1 operazione su x e $(x_3, x_4, x_2) = ((x_3, x_4), x_2) \in x_1$".

(iii) Poichè le dimostrazioni delle proprietà distributive destra e sinistra sono simili, ci limitiamo alla prima. Indicata con $u = u_1 \otimes u_2$ la relazione $(u_1, u_2, u) \in x_2$, tale proprietà si esprime con lo schema

$$\underbrace{(y_1 \oplus y_2)}_{y_4} \otimes y_3 = \underbrace{(y_1 \otimes y_3)}_{y_5} \oplus \underbrace{(y_2 \otimes y_3)}_{y_6}, \qquad y_7 = y_4 \otimes y_3,\ y_8 = y_5 \oplus y_6$$

da cui otteniamo la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} & x_1, x_2 \text{ operazioni su } x \\ & \qquad \text{e}\, \forall y_1, \dots y_8 \in x\, ((y_1, y_2, y_4) \in x_1 \,\text{e}\, (y_5, y_6, y_8) \in x_1 \\ & \qquad\qquad \text{e}\, (y_1, y_3, y_5) \in x_2 \,\text{e}\, (y_2, y_3, y_6) \in x_2 \,\text{e}\, (y_4, y_3, y_7) \in x_2) \Rightarrow y_7 = y_8). \end{aligned}$$

Ne segue l'associato $\star$-concetto, applicando (i) e il Teorema 3.6.1(iii).

(iv) Basta applicare (i) alla semiformalizzazione

$$x_2 \text{ operazione su } x \text{ e}\, \forall y \in x((y, x_1, y) \in x_2 \,\text{e}\, (x_1, y, y) \in x_2).$$

(v) Basta applicare (i), (iv) alla semiformalizzazione

$$x_3 \text{ operazione su } x \text{ e } x_4 \text{ elemento neutro di } x_3 \text{ e}\, (x_1, x_2, x_4) \in x_3 \,\text{e}\, (x_2, x_1, x_4) \in x_3.$$

(vi) Indicate con $u = u_1 \angle u_2$ e $u = u_1 \oplus u_2$, rispettivamente, le relazioni $(u_1, u_2) \in x_1$ e $(u_1, u_2, u) \in x_2$, la proprietà di monotonia debole si esprime con lo schema

$$y_1 \angle y_2 \,\text{e}\, x_3 \angle y_3 \Rightarrow \underbrace{y_1 \oplus y_3}_{y_4} \angle \underbrace{y_2 \oplus y_3}_{y_5} \text{ e } \underbrace{y_3 \oplus y_1}_{y_6} \angle \underbrace{y_3 \oplus y_2}_{y_7}$$

da cui otteniamo la semiformalizzazione

$$\begin{aligned} & x_1 \text{ ordine stretto in } x \text{ e } x_2 \text{ operazione su } x \text{ e } x_3 \text{ elemento neutro di } x_2 \\ & \qquad \text{e}\, \forall y_1, \dots, y_7 \in x\, ((y_1, y_2) \in x_1 \,\text{e}\, (x_3, y_3) \in x_1 \,\text{e}\, (y_1, y_3, y_4) \in x_2 \\ & \qquad\qquad \text{e}\, (y_2, y_3, y_5) \in x_2 \,\text{e}\, (y_3, y_1, y_6) \in x_2 \,\text{e}\, (y_3, y_2, y_7) \in x_2 \\ & \qquad\qquad\qquad \Rightarrow (y_4, y_5) \in x_1 \,\text{e}\, (y_6, y_7) \in x_1). \end{aligned}$$

Ne segue, tramite (i), (iv) e il Teorema 3.6.6(i), il relativo $\star$-concetto.

(vii) Basta togliere nella semiformalizzazione precedente la sottoformula che riguarda l'elemento neutro x_3. □

3.7 Prime applicazioni degli $\star$-concetti

Per rendere più agevole lo studio degli argomenti trattati nella seconda e terza parte del testo, conviene riportare - ricorrendo agli $\star$-concetti fondamentali, a PdT, al Principio di sostituzione (in breve PdS), ai Teoremi 3.3.2 e 3.3.4 - il comportamento, via $\star$, di tre basilari strutture algebriche e, per quanto riguarda le applicazioni, completare il Teorema 2.4.3 con ulteriori proprietà.[16]

Iniziamo con un risultato che riguarda le fondamentali strutture algebriche di monoide, gruppo abeliano e campo ordinato.[17] Precisiamo che nella notazione abbiamo indicato tra parentesi, oltre alle operazioni e all'eventuale ordine, anche gli elementi neutri; inoltre, nella proposizione (iii), abbiamo adottato l'usuale notazione additiva e moltiplicativa per denotare le due operazioni.

Teorema 3.7.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Se $a(\oplus; e)$ è un monoide commutativo, allora lo è *pure ${}^\star a({}^\star\oplus; {}^\star e)$;*

(ii) Se $a(\oplus; e)$ è un gruppo abeliano, allora lo è *pure ${}^\star a({}^\star\oplus; {}^\star e)$;*

(iii) Se $a(+, \cdot, \angle; 0, 1)$ è un campo ordinato, allora lo è *pure ${}^\star a({}^\star+, {}^\star\cdot, {}^\star\angle; {}^\star 0, {}^\star 1)$.*

DIMOSTRAZIONE. (i) L'associatività, la commutatività di ${}^\star\oplus$ e che ${}^\star e$ sia l'elemento neutro derivano, via PdT, dal Teorema 3.6.7(i),(iv).

(ii) Per (i), basta verificare l'esistenza del simmetrico per ogni elemento del gruppo. La si prova facilmente, tramite PdT, PdS e i Teoremi 3.3.2 e 3.6.4(ii), notato che la frase in oggetto è equivalente alla $\forall y \in a\, \exists y_1 \in a\, ((y, y_1, e) \in \oplus)$.

---

[16] Ricordiamo che, per un uso corretto della tecnica degli $\star$-concetti, bisogna *innanzitutto* individuare una semiformalizzazione finitamente limitabile X (in $\hat{A}$) della frase in esame, mediante i concetti fondamentali nella loro forma generale (considerata nei teoremi della sezione precedente); *poi* considerare il corrispondente $\star$-concetto $\star$-X; *poi* particolarizzare (in toto o in parte) le loro variabili con entità di $\hat{A}$ e loro $\star$-trasformate, rispettivamente; *infine* usare PdT, se X è un metaenunciato, e PdS, se X è un metapredicato. Precisiamo che, nel seguito dell'esposizione, ci limitiamo a richiamare gli $\star$-concetti generali lasciando al lettore l'onere delle sostituzioni delle variabili con entità e il ricorso ai relativi teoremi.

[17] Ricordiamo che per *monoide* s'intende una struttura algebrica dotata di una operazione associativa che ammette elemento neutro; per *gruppo* invece un monoide tale che ogni suo elemento ammette simmetrico; per *campo* infine una struttura algebrica con due operazioni $+, \cdot$ tali che, rispetto alla prima, è un campo, rispetto alla seconda è un campo l'insieme depurato dallo zero e verifica infine la proprietà distributiva della seconda operazione rispetto alla prima. Inoltre, il campo è *ordinato* se l'ordine è monotono rispetto alla prima operazione e debolmente monotono rispetto alla seconda.

(iii) Per (ii), tenuto conto del Teorema 2.3.3(i),(v), ${}^\star a({}^\star+;{}^\star 0)$, $({}^\star a\backslash\{{}^\star 0\})({}^\star\cdot\,;{}^\star 1)$ sono due gruppi abeliani. Inoltre,
− la distributività della ${}^\star\cdot$ rispetto ${}^\star+$, deriva da PdT e dal Teorema 3.6.7(iii);
− che ${}^\star\angle$ sia una relazione d'ordine in ${}^\star a$ segue da PdT e dal Teorema 3.6.5(i);
− la monotonia debole di ${}^\star\angle$ rispetto ${}^\star+$ e la monotonia rispetto a ${}^\star\cdot$, seguono, da PdT e dal Teorema 3.6.7(vi),(vii), rispettivamente. □

Passiamo infine ad analizzare, dal punto di vista del monomorfismo $\star$, alcune interessanti proprietà relative alle applicazioni, intese come elementi della sovrastruttura $\hat{A}$.

Teorema 3.7.2. *Sussistono le proposizioni*[18]*:*

(i) f *applicazione iniettiva (suriettiva)* $\Leftrightarrow {}^\star f$ *applicazione iniettiva (suriettiva);*

(ii) $f : a_1 \mapsto a_2$ *biunivoca* $\Rightarrow {}^\star f^{-1} : {}^\star a_2 \mapsto {}^\star a_1$ *e* ${}^\star(f^{-1}) = {}^\star f^{-1}$*;*

(iii) f *di dominio* a_1 *e* $a \subset a_1 \Rightarrow {}^\star(f|_a) = {}^\star f|_{{}^\star a}$*;*

(iv) ${}^\star(\mathrm{i}_a) = \mathrm{i}_{{}^\star a}$*;*

(v) f *funzione costante di valore* $a_1 \Rightarrow {}^\star f$ *funzione costante di valore* ${}^\star a_1$*;*

(vi) Dati $f_i : a \mapsto a_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ *e* $g : a_1 \times \cdots \times a_s \mapsto a'$*, sia* $g(f_1, \ldots, f_s) : a \mapsto g(f_1(a), \ldots, f_s(a))$*. Allora:*
− ${}^\star f_i : {}^\star a \mapsto {}^\star a_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ *e* ${}^\star g : {}^\star a_1 \times \cdots \times {}^\star a_s \mapsto {}^\star a'$*;*
− ${}^\star(g(f_1, \ldots, f_s)) = {}^\star g({}^\star f_1, \ldots, {}^\star f_s)$*;*

(vii) $f : a \mapsto a_1$ *e* $g : a_1 \mapsto a_2 \Rightarrow {}^\star(g \circ f) = {}^\star g \circ {}^\star f$*;*

Sia infine $f : a \mapsto a$*. Allora, per ogni relazione binaria* $\circeq$ *su* a*, risulta*

[18] In assenza di convenzioni, le notazioni del tipo ${}^\star f(x)$, ${}^\star f^{-1}$ o altre simili, possono significare sia $({}^\star f)(x)$, $({}^\star f)^{-1}$ che ${}^\star(f(x))$, ${}^\star(f^{-1})$. Conveniamo, sin d'ora, di usare le notazioni ${}^\star f(x)$, ${}^\star f^{-1}$, per designare $({}^\star f)(x)$, $({}^\star f)^{-1}$, rispettivamente. Inoltre, per quanto riguarda relazioni, operazioni, ordini definiti sulle applicazioni, li intendiamo, come peraltro usuale, riferiti alle imagini degli elementi del comune dominio a; così, ad esempio, data la relazione binaria $\circeq$ sul a, la notazione $f \circeq g$ significa $f(x) \circeq g(x)$, per ogni elemento $x \in a$.

Conviene infine tenere sempre presente che, per il Teorema 2.4.3(v), la trasformata di un'applicazione è un'applicazione con dominio e codominio i trasformati, rispettivi, del dominio e del codominio dell'applicazione in oggetto.

(viii) $f \Bumpeq g \Leftrightarrow {}^\star f \; {}^\star\!\Bumpeq {}^\star g$*; in particolare,* $f = g \Leftrightarrow {}^\star f = {}^\star g$*.*

Inoltre, se $\oplus$ *è una operazione binaria su* a*, allora:*

(ix) ${}^\star(f \oplus g) = {}^\star f \; {}^\star\!\oplus {}^\star g$*.*[19]

Dimostrazione. (i) Segue da PdT e dal Teorema 3.6.4(xii),(xiii).

(ii) Per PdT e i Teoremi 2.4.3(v) e 3.6.4(xiii), ${}^\star f$ è un'applicazione biunivoca di ${}^\star a_1$ in ${}^\star a_2$. Possiamo allora considerare l'applicazione inversa ${}^\star f^{-1} = ({}^\star f)^{-1}$ di ${}^\star a_2$ in ${}^\star a_1$. Osservato che $f^{-1} = \{(e_2, e_1) \in a_2 \times a_1 \mid e_2 = f(e_1)\}$, risulta, per i Teoremi 3.3.4, 3.6.4(xv) e PdS, ${}^\star(f^{-1}) = \{(e_2, e_1) \in {}^\star a_2 \times {}^\star a_1 \mid e_2 = {}^\star f(e_1)\} = {}^\star f^{-1}$.

(iii) Sia a_1' il codominio di f. Allora, $f|_a = \{(e, e') \in a_1 \times a_1' \mid (e, e') \in f \,\mathrm{e}\, e \in a\}$ e quindi, per PdS e i Teoremi 3.3.4, 3.6.1(iv) e 3.6.4(ii), ${}^\star(f|_a) = \{(e, e') \in {}^\star a_1 \times {}^\star a_1' \mid (e, e') \in {}^\star f \,\mathrm{e}\, e \in {}^\star a\} = {}^\star f|_{{}^\star a}$, tenuto conto che, per il Teorema 2.1.1(iii), ${}^\star a \subset {}^\star a_1$.

(iv) Segue da PdT e dal Teorema 3.6.4(xiv).

(v) Sia a il dominio di f. Allora, $f[a] = \{a_1\}$ e quindi, per i Teoremi 2.3.3(v) e 2.4.3(iv), ${}^\star f[{}^\star a] = {}^\star(f[a]) = {}^\star\{a_1\} = \{{}^\star a_1\}$

(vi) La prima parte della tesi deriva dal Teorema 2.4.3(i),(v). Notato poi che

$$\begin{aligned} g(f_1, \ldots, f_s) &= \{(e, e') \in a \times a' \mid e' = g(f_1(e), \ldots, f_s(e))\} \\ &= \{(e, e') \in a \times a' \mid (f_1(e), \ldots, f_s(e'), \mathrm{i}_{a'}(e')) \in g\}, \end{aligned}$$

otteniamo, tramite PdS e i Teoremi 3.3.4 e 3.6.4(xvi),

$$\begin{aligned} {}^\star(g(f_1, \ldots, f_s)) &= \{(e, e') \in {}^\star a \times {}^\star a' \mid ({}^\star f_1(e), \ldots, {}^\star f_s(e'), {}^\star\mathrm{i}_{a'}(e')) \in {}^\star g\} \\ &= \{(e, e') \in {}^\star a \times {}^\star a' \mid ({}^\star f_1(e), \ldots, {}^\star f_s(e'), e') \in {}^\star g\} \\ &= \{(e, e') \in {}^\star a \times {}^\star a' \mid e' = {}^\star g({}^\star f_1(e), \ldots, {}^\star f_s(e))\} \\ &= {}^\star g({}^\star f_1, \ldots, {}^\star f_s). \end{aligned}$$

ove la seconda uguaglianza è dovuta a (iv).

(vii) Osservato che $g \circ f = g(f)$, la tesi segue immediatamente da (vi).

(viii) Supposto $f \Bumpeq g$, sussiste il metaenunciato $\forall x \in a\, (f(x) \Bumpeq g(x))$. Passando allora alla relativa semiformalizzazione

$$\forall x \in a\, \exists y_1, y_2 \in a\, (y_1 = f(x) \,\mathrm{e}\, y_2 = g(x) \,\mathrm{e}\, (y_1, y_2) \in \Bumpeq)$$

si ha, tramite i Teoremi 3.6.2(iii),(iv) e 3.6.4(ii),(xv), lo $\star$-enunciato

$$\forall x \in {}^\star a\, \exists y_1, y_2 \in {}^\star a\, (y_1 = {}^\star f(x) \,\mathrm{e}\, y_2 = {}^\star g(x) \,\mathrm{e}\, (y_1, y_2) \in {}^\star \Bumpeq).$$

[19]Poichè l'immagine, via $\star$, del composto è il composto delle immagini, il monomorfismo può essere inteso anche come un monomorfismo algebrico della strutture algebrica $a(\oplus)$ in sé.

Ne segue, per PdT, ${}^{\star}f \ {}^{\star}\!\Bumpeq {}^{\star}g$. L'implicazione opposta si ottiene in modo del tutto analogo.

(ix) Considerata la semiformalizzazione

$$\forall x \in a \exists y, y_1, y_2 \in a\,(y_1 = f(x)\,\mathrm{e}\,y_2 = g(x)\,\mathrm{e}\,y = y_1 \oplus y_2)$$

della frase $\forall x \in a\,\exists y \in a\,(y = f(x) \oplus g(x))$, si procede come in (viii), usando la proposizione (ii) del Teorema 3.6.7 al posto della (xv) del Teorema 3.6.4. $\square$

Parte II

Numeri reali infinitesimi e infiniti

Ricordiamoci che siamo tra gli infiniti e gl'infinitesimi, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, questi per la loro piccolezza. Con tutto ciò noi veggiamo che l'umano discorso non vuole rimanersi dall'aggirarse gli intorno.

Galileo Galilei, Discorsi intorno a due nuove scienze

Obiettivo qui è fornire gli strumenti che consentano di trattare in termini infinitesimali, nella terza parte, i problemi più classici dell'analisi reale.

Come si può intuire, a fondamento della costruzione che stiamo per avviare, viene posto l'insieme dei numeri reali pensati come atomi appartenenti alla base di una sovrastruttura. Anche se, per gli scopi che qui ci proponiamo, sarebbe sufficiente porre come base della sovrastruttura proprio l'insieme dei reali, è tuttavia utile introdurre come base un suo soprainsieme. Di modo che, senza aggiungere alcuna complicazione, ci veniamo a trovare in condizioni di maggiore generalità senza alterare la successiva esposizione. E ciò è indispensabile in molte applicazioni nelle quali, accanto ai numeri reali, si considerino altri enti. Questo accade, ad esempio, se si vuole studiare con tecniche nonstandard problemi inerenti agli spazi vettoriali reali; nella base della sovrastruttura, accanto ai numeri reali, occorre infatti considerare gli elementi dello spazio vettoriale considerato. Così, per studiare questioni di teoria della misura è necessario inserire nella base l'ambiente i cui sottoinsiemi si intendono misurare.

Circa il monomorfismo $\star$, *assumiamo che sia un'immersione stretta allargante*, rendendo così più potenti le tecniche nonstandard, senza intaccare, peraltro, la generalità del discorso (un monomorfismo siffatto è sempre costruibile, come abbiamo constatato nel secondo capitolo).

Infine il ricorso costante alla tecnica degli $\star$-concetti (sviluppata nel terzo capitolo) consente di rendere l'esposizione più semplice, riducendo al minimo la necessità di usare le formalizzazioni richieste dal Principio di Leibniz, realizzando, così, economie veramente rimarchevoli in fase dimostrativa.

Il quarto capitolo, dedicato ad un ampliamento nonstandard dei numeri naturali, fornisce un primo esempio di applicazione di tale tecnica. Un secondo è rappresentato poi dal contenuto dei due capitoli successivi, dedicati all'ampliamento nonstandard dei numeri reali, nei quali vengono introdotti i fondamenti, sia algebrici che topologici, dell'analisi infinitesimale.

Capitolo 4

Numeri $\star$-naturali

Considerato l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dei numeri naturali (pensato come sottoinsieme dei reali), chiamiamo numeri **$\star$-naturali** gli elementi di ${}^{\star}\mathbb{N}$. Questa terminologia non è conforme a quella che comunemente viene adoperata in letteratura, ove tali elementi sono detti *ipernaturali.* Trova, però, qui giustificazione nel fatto che riesce concorde con la più generale terminologia introdotta in relazione agli $\star$-concetti. Si è infatti identificato i numeri naturali con gli elementi dell'insieme $\mathbb{N}$. Il concetto "x numero naturale" si può allora esprimere con la "$x \in \mathbb{N}$" e quindi risulta che lo $\star$-concetto $\star$-(x numero naturale) equivale alla condizione "$x \in {}^{\star}\mathbb{N}$".

Passiamo ora ad una breve descrizione del contenuto del capitolo. Le prime due sezioni sono dedicate allo studio di questioni collegate alle proprietà algebriche e ordinali, riferentisi alle $\star$-operazioni di addizione, moltiplicazione e di $\star$-ordine; in particolare, si considera la $\star$-induzione e si prova, tramite la stessa, l'esistenza di entità esterne.

Nella terza, si constata l'esistenza di numeri $\star$-naturali infiniti e se ne provano alcune proprietà relative all'addizione; inoltre, si fa vedere che non è possibile estendere il Principio di Leibniz a tutte le wff (limitate o no) del linguaggio L, pena una contraddizione.

Dopo aver provato, nella quarta, due lemmi fondamentali dovuti a Robinson, si ripartisce, nella quinta, l'insieme degli $\star$-naturali in un insieme totalmente ordinato, denso di *galassie* (insiemi costituiti da numeri aventi tra loro distanza finita), privo di massimo e avente l'insieme dei naturali come minimo.

Infine, nelle ultime due sezioni, si considera la fondamentale nozione di $\star$-*finitezza* e il suo legame con i monomorfismi allarganti.

4.1 Operazioni e ordini in ${}^\star\mathbb{N}$

Essendo $\star$ un'immersione allargante, riesce intanto, per il Teorema 2.7.1, $\mathbb{N} \subsetneqq {}^\star\mathbb{N}$. Le operazioni e le relazioni d'ordine di $\mathbb{N}$ si estendono, poi, in modo naturale a ${}^\star\mathbb{N}$. Infatti, per il Teorema 2.6.2(iii), le trasformate ${}^\star+$, e ${}^\star\cdot$ delle operazioni di addizione $+$ e di moltiplicazione $\cdot$, sono un prolungamento di queste ultime su ${}^\star\mathbb{N}$. Pertanto, in accordo a quanto convenuto alla fine della Sezione 2.6, poniamo: ${}^\star+ = +$, ${}^\star\cdot = \cdot$, ${}^\star \leq = \leq$ e ${}^\star < = <$.

Circa le loro proprietà, osservato che $\mathbb{N}(+;0)$ e $\mathbb{N}(\cdot;1)$ sono due monoidi commutativi, tali risultano anche ${}^\star\mathbb{N}(+;0)$ e ${}^\star\mathbb{N}(\cdot;1)$(Teorema 3.7.1(i)). Conseguentemente [1]:
− l'addizione ${}^\star+$ è associativa, commutativa, con elemento neutro 0. Inoltre, ogni $\star$-naturale è cancellabile; [2]
− la moltiplicazione ${}^\star\cdot$ è associativa, commutativa, con elemento neutro 1. Inoltre, ogni $\star$-naturale non nullo è cancellabile. [3] Infine, la moltiplicazione ${}^\star\cdot$ è distributiva rispetto all'addizione ${}^\star+$ (Teorema 3.6.7(iii)).

Passando all'analisi degli ordinamenti, le trasformate ${}^\star\leq$ e ${}^\star<$, rispettivamente, della relazione d'ordine $\leq$ e di quella stretta $<$, sono, per il Teorema 2.6.2(i), loro estensioni. Inoltre, per il Teorema 3.6.5(i), ${}^\star\leq$ è una relazione d'ordine in ${}^\star\mathbb{N}$, mentre, per il Teorema 3.6.6(ii), ${}^\star<$ è l'ordine stretto associato ${}^\star\leq$, in quanto lo è $<$ rispetto a $\leq$. Per di più, ricordato che $\leq$ è un ordinamento totale, possiamo concludere, tramite il Teorema 3.6.5(i), che la sua estensione è una relazione d'ordine totale. Infine, entrambi gli ordinamenti ${}^\star\leq$ e ${}^\star<$ sono monotoni rispetto ${}^\star+$ (Teorema 3.6.7(vii), mentre sono debolmente monotoni rispetto ${}^\star\cdot$ (Teorema 3.6.7(vi)).

Precisiamo che, per snellire l'esposizione, il simbolo ν (con o senza apici o pedici) denota sempre il generico numero $\star$-naturale.

[1] Per non tediare il lettore, richiamando il principio PdT a ogni piè sospinto, abbiamo deciso di non citarlo in questa sezione, essendo il suo uso del tutto evidente.

[2] Lo si prova tramite la semiformalizzazione finitamente limitabile:

$$\forall x, y_1, y_2, z_1, z_2((x, y_1, z_1) \in + \,\mathrm{e}\, (x, y_2, z_2) \in + \,\mathrm{e}\, z_1 = z_2 \Rightarrow y_1 = y_2),$$

ricorrendo ai Teoremi 3.6.1(iii), 3.6.2(ii) e 3.6.4(ii),

[3] Basta considerare la semiformalizzazione finitamente limitabile:

$$\forall x_1 \in x(\neg(x_1 = 0) \Rightarrow \forall y_1, y_2, z_1, z_2((x_1, y_1, z_1) \in \cdot \,\mathrm{e}\, (x_1, y_2, z_2) \in \cdot \,\mathrm{e}\, z_1 = z_2 \Rightarrow y_1 = y_2)$$

e usare i teoremi citati nella nota precedente.

4.2 Principio di $\star$-induzione

È noto che è possibile sviluppare, partendo dagli *assiomi di Peano*, l'intera teoria dei sistemi di numeri naturali, relativi, razionali, reali e complessi. È quindi importante determinare quale sia il loro aspetto nell'ambito dei numeri $\star$-naturali.

Teorema 4.2.1 ($\star$-assiomi di Peano)**.** *Rispetto all'ordine $\leq$ in ${}^{\star}\mathbb{N}$ risulta:*

(i) Lo zero ${}^{\star}0 = 0$ è l'elemento minimo;

(ii) Ogni $\star$-naturale ν ha un immediato seguente ν';

(iii) Principio di $\star$-induzione: *Se un insieme $E \subset {}^{\star}\mathbb{N}$ è interno e verifica le proprietà:*
(a) $0 \in E$;
(b) $\nu \in E \Rightarrow \nu' \in E$ per ogni $\nu \in {}^{\star}\mathbb{N}$,
allora $E = {}^{\star}\mathbb{N}$.

Dimostrazione. (i) Segue da PdT e dal Teorema 3.6.5(iv).

(ii) Considerata la frase finitamente limitabile:

$$\forall y \in x_1 \exists y_1 \in x_1 (y_1 \text{ immediato seguente di } y \text{ secondo l'ordine stretto } x \text{ su } x_1),$$

la tesi segue da PdT e dai Teoremi 3.6.1(iv) e 3.6.5(iii).

(iii) Osservato che lo schema induttivo si semiformalizza con la frase finitamente limitabile:

$$\forall y (y \subset \mathbb{N} \,\mathrm{e}\, 0 \in y \,\mathrm{e}\, \forall y_1, y_2 (y_1 \in y \text{ e } y_2 \text{ immediato seguente di } y_1 \text{rispetto} < \Rightarrow y_2 \in y))$$

otteniamo, tramite PdT e i Teoremi 3.6.1(iv),(v) e 3.6.5(iii), la tesi. $\square$

I primi due $\star$-assiomi sono identici agli analoghi assiomi di Peano, salvo che i primi riguardano elementi di ${}^{\star}\mathbb{N}$ mente i secondi quelli di $\mathbb{N}$. Questo significa che se un teorema dei numeri naturali viene provato ricorrendo soltanto ai primi due assiomi di Peano, allora è anche un teorema dei numeri $\star$-naturali. Conseguentemente, sussistendo queste condizioni, è inutile dimostrare lo $\star$-teorema via trasferimento.

Ben altra situazione avviene per il terzo $\star$-assioma. Sia il principio di $\star$-induzione che quello di induzione fanno riferimento, rispettivamente, a sottoinsiemi di ${}^{\star}\mathbb{N}$ e di $\mathbb{N}$. Contrariamente però a quello di induzione che riguarda un *qualsiasi* insieme di numeri naturali, la $\star$-induzione considera *solamente* insiemi *interni* di numeri $\star$-naturali, che sono elementi di ${}^\star\mathbb{P}(\mathbb{N}) \subset \mathbb{P}({}^\star\mathbb{N})$ (Teorema 2.3.3(vii)), ove l'inclusione è stretta in forza del prossimo teorema (conseguenza della $\star$-induzione).

Teorema 4.2.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) I sottoinsiemi $\mathbb{N}$ *e* ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ *sono insiemi esterni di* ${}^\star\mathbb{N}$*;*

(ii) Sia $a \in \hat{A}$ *di cardinalità infinita. Allora* $\star[a]$ *e* ${}^\star a \setminus \star[a]$ *sono entità esterne.*

Dimostrazione. (i) Supponiamo, per assurdo, che $\mathbb{N}$ sia un insieme interno. Osservato che l'immediato seguente n' del numero naturale n rispetto all'ordine $<$ in $\mathbb{N}$ è anche l'immediato seguente di n rispetto all'ordine ${}^\star<$ in ${}^\star\mathbb{N}$ (PdT e Teorema 3.6.5(iii)), sono verificate le condizioni (a), (b) del Principio di $\star$-induzione; risulta dunque $\mathbb{N} = {}^\star\mathbb{N}$, contraddicendo così $\mathbb{N} \subsetneqq {}^\star\mathbb{N}$ (Teorema 2.7.1).

Per quanto riguarda l'insieme ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, assumiamo, per assurdo, che sia interno. Allora, per il Teorema 2.2.3(i), $\mathbb{N} = {}^\star\mathbb{N} \setminus ({}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ risulterebbe interno contraddicendo quanto appena provato.

(ii) Poichè a è infinito esiste un'applicazione suriettiva f di a in $\mathbb{N}$. Allora, per PdT e il Teorema 3.6.4(xiii), ${}^\star f$ è un'applicazione suriettiva di ${}^\star a$ in ${}^\star\mathbb{N}$.

Proviamo ora che $({}^\star f)[\star[a]] = \mathbb{N}$. Sia intanto $\nu \in ({}^\star f)[\star[a]]$. Esiste allora $\nu_1 \in \star[a]$ tale che $\nu = {}^\star f(\nu_1)$; ne segue che esiste $a_1 \in a$ tale che $\nu_1 = {}^\star a_1$ e quindi, per il Teorema 2.4.3(vi), $\nu = ({}^\star f)({}^\star a_1) = {}^\star(f(a_1)) = f(a_1) \in \mathbb{N}$. Sia infine $n_1 \in \mathbb{N}$. Esiste allora $a_1 \in a$ tale che $n_1 = f(a_1)$ (f suriettiva!) e quindi $n_1 = {}^\star n_1 = {}^\star(f(a_1)) = ({}^\star f)({}^\star a_1)$. Notato che ${}^\star a_1 \in \star[a]$, risulta $n_1 \in ({}^\star f)[\star[a]]$.

Siamo ora in grado di provare che $\star[a]$ è un'entità esterna. Sia, per assurdo, $\star[a]$ interna. Poichè ${}^\star f$ è interna, è allora interna, per il Teorema 2.5.2(iv), anche $({}^\star f)[\star[a]]$ e quindi, per quanto provato prima, pure $\mathbb{N}$, contraddicendo così (i).

Infine per l'entità ${}^\star a \setminus \star[a]$, la tesi segue, per assurdo, dal Teorema 2.2.3(i), una volta osservato che, essendo $\star[a] \subset {}^\star a$, riesce $\star[a] = {}^\star a \setminus ({}^\star a \setminus \star[a])$. □

Il prossimo teorema fornisce una riscrittura del Principio di $\star$-induzione che riformula, nell'ambito dei numeri $\star$-naturali, la ben nota tecnica dimostrativa per induzione. Premettiamo al teorema un lemma che fornisce la versione algebrica della nozione di immediato seguente e assicura che gli intervalli e i segmenti superiori chiusi sono entità interne.

Lemma 4.2.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\nu + 1$ *è l'immediato seguente di* ν*;*

(ii) Gli intervalli e i segmenti superiori chiusi di ${}^\star\mathbb{N}$ *sono entità interne.*

DIMOSTRAZIONE. (i) L'esistenza dell'immediato seguente ν' di ν è data dal Teorema 4.2.1(ii). Rimane da provare l'uguaglianza $\nu' = \nu + 1$. A tal fine basta considerare la frase "$\forall \nu_2 \in \mathbb{N}\, (\nu_1$ immediato seguente di ν e $\nu_2 = \nu + 1 \Rightarrow \nu_2 = \nu_1$". Ne segue la tesi, tramite i Teoremi 3.3.2, 3.6.1(iii), 3.6.5(iii) e 3.6.7(ii),

(ii) Consideriamo intanto l'intervallo chiuso $[\nu_1, \nu_2]$. Osservato che

$$[\nu_1, \nu_2] = \{e \in {}^\star\mathbb{N} \,|\, \nu_1 \le e \le \nu_2\} = \{e \in {}^\star\mathbb{N} \,|\, \nu_1 \le e\} \cap \{e \in {}^\star\mathbb{N} \,|\, e \le \nu_2\},$$

otteniamo, per il Teorema 2.5.2(vi) con $b =\le$, l'internalità dei due termini dell'intersezione; ne segue, per il Teorema 2.2.3(vii), l'internalità di $[\nu_1, \nu_2]$.

Per gli altri intervalli basta notare che si ottengono dall'intervallo chiuso togliendoli un estremo e ricorrere al Teorema 2.2.3(i),(iii). Per quanto riguarda invece il segmento superiore chiuso la tesi segue dal Teorema 2.5.2(vi) con $b =\le$. □

Teorema 4.2.4. *Sono equivalenti le proposizioni:*

(i) Principio di ⋆-induzione;

(ii) Dimostrazione per ⋆-induzione: *Se un metapredicato unario $X(x)$, formalizzabile tramite un predicato limitato unario del linguaggio interno L', verifica le proprietà:*
(a) Base*: Sussiste $X(\nu_0)$;*
(b) Passo Induttivo*: Sussista $X(\nu) \Rightarrow X(\nu + 1)$ per ogni ν tale che $\nu \ge \nu_0$,*
allora $X(\nu)$ sussiste per ogni $\nu \ge n_0$.

DIMOSTRAZIONE. (i) $\Rightarrow$ (ii) Indicata con $W(x)$ la wff di L' che formalizza $X(x)$ in $\mathcal{I}$, assumiamo le ipotesi (a) e (b). Considerata l'entità:

$$\begin{aligned} E &= \{\nu \in {}^\star\mathbb{N} : \nu \ge \nu_0 \,\mathrm{e}\, X(\nu)\} = \{\nu \in {}^\star\mathbb{N} : \nu_0 \le \nu \,\mathrm{e}\, {}^{i_\mathcal{I}}W(\nu)\} \\ &= \{\nu \in {}^\star\mathbb{N} \,|\, (\nu_0, \nu) \in \le\} \cap \{\nu \in {}^\star\mathbb{N} : \mathcal{I} \Vdash W(\nu)\} \end{aligned}$$

risulta, per il Teorema 2.5.2(vi) con $b =\le$, che il primo termine dell'intersezione è interno ed è interno, per il Teorema d'isolamento interno, anche il secondo; ne segue, per il Teorema 2.2.3(vii), l'internalità di E.

Osservato poi che, per il Lemma 4.2.3(ii), l'intervallo $[0, \nu_0[$ è interno, è pure interno, per il Teorema 2.2.3(vii), anche l'insieme $[0, \nu_0[\cup E$; inoltre, contiene lo zero e, ricorrendo alle ipotesi e al Lemma 4.2.3(i), contiene anche l'immediato seguente di ogni suo elemento. Poichè risultano verificate le condizioni del Principio di ⋆-induzione, $[0, \nu_0[\cup E = {}^\star\mathbb{N}$ e quindi $E = {}^\star\mathbb{N} \setminus [0, \nu_0[$, cioè la tesi.

(ii)$\Rightarrow$(i) Assunte le ipotesi del Principio di $\star$-induzione, basta considerare il metapredicato $X(\nu) : \nu \in E$, chiaramente formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno, e tenere presente il Lemma 4.2.3(i). $\square$

La proposizione (i) del prossimo teorema, conseguenza della $\star$-induzione, assicura che la relazione d'ordine $^\star \leq$ in $^\star\mathbb{N}$ è uno $\star$-buon ordinamento.[4]

Teorema 4.2.5. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Ogni insieme interno non vuoto di numeri $\star$-naturali ha minimo;

(ii) Ogni insieme interno non vuoto superiormente limitato di numeri $\star$-naturali ha massimo.

Dimostrazione. (i) Data un'entità interna $\emptyset \neq E \subset {}^\star\mathbb{N}$, consideriamo la frase $X(\nu) : \forall x \in E\,(x \geq \nu)$ descrivibile con il predicato limitato del linguaggio interno $\sqcap x \in E\,(\langle \nu, x\rangle \lessdot \leq)$. Ora, $X(0)$ sussiste (Teorema 4.2.1(i)). Inoltre, non per ogni ν, $X(\nu)$ è valida, notato che $E \neq \emptyset$ e per $\nu \in E$, $X(\nu+1)$ risulta falsa. Conseguentemente, in base alla dimostrazione per $\star$-induzione, l'implicazione $X(\nu) \Rightarrow X(\nu+1)$ non può sussistere per ogni ν. Esiste quindi ν' tale che $X(\nu')$ sussiste e $X(\nu'+1)$ no. Ossia, non ci sono elementi di E minori di ν', e c'è un $k \in E$ minore di $\nu'+1$. Per un tale k riesce $\nu' \leq k < \nu'+1$ e quindi, per il Lemma 4.2.3(i), $\nu' = k \in E$ è il minimo di E.

(ii) Dato un insieme interno $\emptyset \neq E \subset {}^\star\mathbb{N}$ superiormente limitato, consideriamo la frase $X(x) : \exists y \in E\,(x \leq y)$ descrivibile con il predicato limitato del linguaggio interno $\sqcup y \in E\,(\langle x, y\rangle \lessdot \leq)$. Ora, $X(0)$ sussiste in quanto $E \neq \emptyset$ (Teorema 4.2.1(i)). Inoltre, non per ogni ν, $X(\nu)$ risulta valida, osservato che E ammette limitazioni superiori: se tale è k, allora $E(k+1)$ non sussiste. Conseguentemente, in base alla dimostrazione per $\star$-induzione, l'implicazione $X(\nu) \Rightarrow X(\nu+1)$ non può sussistere per ogni ν. Esiste quindi ν' tale che $X(\nu')$ sussiste e $X(\nu'+1)$ no. Ossia, c'è in E almeno uno $\star$-naturale k tale che $\nu' \leq k$ e $k < \nu'+1$. Quindi $\nu' \leq k < \nu'+1$. Allora $\nu' = k \in E$, cioè ν' è il massimo di E. $\square$

Proviamo ora un risultato, anch'esso conseguenza della $\star$-induzione, che consente d'introdurre nei numeri $\star$-naturali l'operazione di sottrazione.

---

[4] Ricordiamo che una relazione d'ordine x nell'insieme x_1 è un buon ordinamento se ogni sottoinsieme non vuoto di x_1 ha minimo rispetto x. Considerata allora la corrispondente semiformalizzazione finitamente limitabile:

$$X(x, x_1) : \forall y\,(y \subset x_1 \,\mathrm{e}\, y \neq \emptyset \Rightarrow \exists z\,(z \,\text{minimo di}\, y \,\text{con l'ordine}\, x \,\text{in}\, x_1)),$$

otteniamo, tramite PdT e i Teoremi 3.6.1(iii), 3.6.5(iv), quanto dichiarato.

Teorema 4.2.6. *Se $\nu \leq \nu'$, allora, l'equazione $\nu + x = \nu'$ ha un'unica soluzione in ${}^\star\mathbb{N}$, indicata con la notazione $\nu' - \nu$.*

Dimostrazione. Suposto $\nu \leq \nu'$, consideriamo la frase $X(x) : \exists y \in {}^\star\mathbb{N}\,(\nu + y = x)$ descrivibile con la wff limitata di L': $\sqcup y \lessdot {}^\star\mathbb{N}\,(\langle \nu, y, x\rangle \lessdot +)$. Ora, $X(\nu)$ sussiste in quanto $y = 0$ è soluzione. Supposto che ν_0 sia soluzione dell'equazione $\nu + x = \nu'$ con $\nu' \geq \nu$, risulta $\nu_0 + 1$ soluzione dell'equazione $\nu + x = \nu' + 1$; si ha, infatti, $\nu + (\nu_0 + 1) = (\nu + \nu_0) + 1 = \nu' + 1$. Ne segue, per $\star$-induzione, la tesi. Per quanto riguarda l'unicità della soluzione, basta osservare che ogni numero $\star$-naturale è cancellabile rispetto all'addizione. $\square$

Concludiamo la sezione, osservando che ogni numero $\star$-naturale ν non nullo ammette immediato precedente. Infatti, essendo $\nu \geq 1$, possiamo considerare $\nu - 1$ (Teorema 4.2.6). Risulta allora, per definizione, $(\nu - 1) + 1 = \nu$, cioè $\nu - 1$ è l'immediato precedente di ν.

4.3 Numeri $\star$-naturali infiniti

Essendo $\star$ un monomorfismo allargante, l'insieme differenza ${}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ non è vuoto (Teorema 2.7.1). Il prossimo teorema ne fornisce una importante caratterizzazione, in termini della relazione d'ordine.

Teorema 4.3.1. *Il numero $\star$-naturale ν è un maggiorante di* $\mathbb{N} \Leftrightarrow \nu \in {}^\star\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia intanto ν maggiorante di $\mathbb{N}$. Allora, $\nu \notin \mathbb{N}$ e quindi $\nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Sia ora $\nu \in {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Consideriamo il metapredicato $X(n) : n < \nu$ e procediamo per induzione. Poichè $\nu \neq 0$ e lo zero è il minimo di ${}^\star\mathbb{N}$ (Teorema 4.2.1(i)), sussiste $X(0)$. Supposto ora $n < \nu$, dal Lemma 4.2.3, riesce $n + 1 \leq \nu$ e quindi, poichè $\nu \notin \mathbb{N}$, risulta $n + 1 < \nu$, cioè sussiste $X(n + 1)$. Ne segue, per induzione, ν maggiorante di $\mathbb{N}$. $\square$

Quanto provato giustifica di chiamare numero naturale **infinito** ogni elemento di ${}^\star\mathbb{N}_{nf} = {}^\star\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$.[5] Precisiamo inoltre che poniamo $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e ${}^\star\mathbb{N}^+ = {}^\star(\mathbb{N} \setminus \{0\}) = {}^\star\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (Teorema 2.3.3(i),(v)), denotando così con

[5]Riteniamo utile richiamare l'attenzione sulla terminologia sin qui adottata per gli elementi di ${}^\star\mathbb{N}$. Riepilogando chiamiamo:
– (numero) $\star$-naturale ogni elemento di ${}^\star\mathbb{N}$;
– (numero) naturale ogni elemento di $\mathbb{N}$;
– (numero) naturale infinito ogni elemento di ${}^\star\mathbb{N}_{nf}$.

$\mathbb{N}^+, {}^\star\mathbb{N}^+$ gli insiemi dei numeri naturali positivi e dei numeri $\star$-naturali positivi, rispettivamente.

Il prossimo teorema assicura che l'insieme ${}^\star\mathbb{N}_{nf}$ non ha né minimo né massimo; quindi in ${}^\star\mathbb{N}$ esistono sottoinsiemi non vuoti privi di minimo (esterni per il Teorema 4.2.5(i)) e ciò contrariamente a quanto avviene in $\mathbb{N}$. Inoltre, mostra che, se ν_1 e ν_2 sono naturali infiniti e $\nu_1 \leq \nu_2$, la differenza $\nu_2 - \nu_1$ può essere sia finita che infinita.

Teorema 4.3.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Se ν è un naturale infinito e n un naturale, allora $\nu + n$ e $\nu - n$ sono naturali infiniti;

(ii) Se ν_1, ν_2 sono naturali infiniti, allora lo è anche $\nu_1 + \nu_2$.

Dimostrazione. (i) Ricordato che l'ordine $\leq$ è monotono rispetto all'addizione, otteniamo $\nu \leq \nu + n$; inoltre, essendo ν un naturale infinito, segue, per il Teorema 4.3.1, tutti i numeri naturali. Allora anche $\nu + n$ risulta un maggiorante di $\mathbb{N}$ e quindi, ancora per il Teorema 4.3.1, $\nu + n$ è infinito.

Per quanto riguarda $\nu - n$ (esistente, per il Teorema 4.2.6, in quanto, come già osservato, $\nu > n$) sia, per assurdo, $\nu - n$ un numero naturale. Allora, $n + (\nu - n) = \nu$ e quindi ν essendo somma di due naturali è un numero naturale, contraddicendo così l'ipotesi.

(ii) Per ogni numero naturale n riesce $n < \nu_1 < \nu_1 + \nu_2$. Infatti, dal Teorema 4.3.1 si ottiene la prima disuguaglianza e $\nu_1 > 0$. La seconda è allora conseguenza della monotonia di $<$ rispetto all'addizione. Ne segue la tesi. $\square$

Osservazione Com'è noto, il Principio di Leibniz riguarda solamente formule ben formate limitate del linguaggio formalizzato L. Viene allora naturale chiedersi se tale limitazione sia effettivamente necessaria, oppure possa essere indebolita consentendo che PdL valga anche per le wff non limitate. Ora, l'esistenza di numeri $\star$-naturali infiniti, e in particolare la proposizione (i) del teorema precedente, assicurano che ciò non può avvenire in quanto il Principio di Leibniz *non può essere esteso a tutte le formule ben formate di L*, pena una contraddizione. Al fine di provare quanto asserito, consideriamo la wfs di L:

$$\begin{aligned}
&\sqcap \nu \lessdot \mathbb{N}^+ \sqcup u, u_1, v\, (\sqcap x_1 \lessdot \mathbb{N}\, ((x_1 \lessdot u_1 \leftrightarrow \langle 1, x_1\rangle \lessdot\ \leq \wedge \langle x_1, \nu\rangle \lessdot\ \leq) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \wedge (x_1 \lessdot u_1 \to \sqcup y \lessdot u\, (\langle x_1, y\rangle \lessdot v)) \\
&\wedge \sqcap y, y_1, y_2\, (\langle y, y_1\rangle \lessdot v \wedge \langle y, y_2\rangle \lessdot v \to y_1 \asymp y_2) \\
&\wedge \sqcap x_2, x_3 \lessdot u_1\ \sqcap z_1, z_2\, (\langle x_2, x_3\rangle \lessdot\ < \wedge \langle x_2, z_1\rangle \lessdot v \wedge \langle x_3, z_2\rangle \lessdot v \to z_1 \lessdot z_2))
\end{aligned}$$

che, interpretata in $\hat{A}$, formalizza la frase:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \, \exists a, f \, (f : \{1, \ldots, n\} \mapsto a \, \mathrm{e} \, \forall x, y \in \{1, \ldots, n\} \, (x < y \Rightarrow f(x) \in f(y))),$$

che, come facilmente si vede, sussiste nei numeri naturali.[6] Conseguentemente, se assumiamo, per assurdo, che PdL valga anche per wff non limitate, otteniamo, via trasferimento, che per ogni $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ esistono un insieme interno b e un'applicazione interna f di $[1, \nu]$ in b tali che $f(\nu_1) \in f(\nu_2)$, qualunque siano $1 \leq \nu_1, \nu_2 \leq \nu$ tali che $\nu_1 < \nu_2$.

Allora, dato ω naturale infinito, per il Teorema 4.3.2(i), otteniamo la seguente catena discendente $f(\omega) \ni f(\omega - 1) \ni f(\omega - 2) \ni \cdots$ in $\mathcal{I}$, pervenendo così ad una palese contraddizione.

4.4 Lemmi del trabocco e del prolungamento

Per il Teorema 2.7.1, se $a \in \hat{A}$ è infinita, allora l'entità infinita ${}^\star a$ ha elementi nonstandard. È allora naturale chiedersi se anche le entità interne di cardinalità infinita possiedono elementi nonstandard. La risposta al quesito è positiva come lo prova il risultato seguente.

Teorema 4.4.1. *Ogni entità interna di cardinalità infinita ha elementi nonstandard.*

Dimostrazione. Sia b un'entità interna e infinita. Esiste allora n tale che $b \in {}^\star A_n$ (Teorema 2.1.3(i)). Per assurdo, siano standard tutti gli elementi di b. Posto $a = \{a_1 \in A_n \mid {}^\star a_1 \in b\}$, risulta $b = \star[a]$ e quindi a è infinita; dal Teorema 4.2.2(ii) segue allora la contraddizione che b è esterna. □

È il caso di osservare ancora che esistono entità interne prive di elementi standard. Nel caso finito ciò è assicurato dal Teorema 2.2.3(iii), se si prendono $b_1, \ldots, b_s$ tutti nonstandard. Nel caso infinito basta osservare che il segmento superiore chiuso di origine un naturale infinito è interno (Lemma 4.2.3(ii)), infinito (Teorema 4.3.2(i)) e privo di elementi standard.

Ricordando ancora il Teorema 2.2.3(iii), possiamo completare e riassumere le precedenti considerazioni come segue:
– Gli elementi di un insieme interno di cardinalità finita possono essere tutti standard, tutti interni nonstandard o misti (standard e interni nonstandard);

[6] Basta considerare la funzione di J.Von Neumann: $f(1) = \{\emptyset\}$ e $f(n+1) = f(n) \cup \{f(n)\}$ per ogni $n \geq 1$.

– Per gli elementi di un insieme interno di cardinalità infinita sono possibili le due ultime alternative, mentre la prima è esclusa. Un insieme interno infinito non può, cioè, avere solo elementi standard.

Ciò premesso, proviamo il seguente fondamentale lemma che viene spesso usato a livello dimostrativo. Considerata un'entità infinita a, la prima proposizione assicura che se b è un insieme interno contenente *tutti gli elementi standard* di ${}^\star a$, allora gli elementi nonstandard di ${}^\star a$ "traboccano" in b. La seconda, invece, afferma che se b contiene *tutti gli elementi nonstandard* di ${}^\star a$, allora sono gli elementi standard di ${}^\star a$ che "traboccano" in b.

Lemma 4.4.2. (del trabocco (Robinson)) *Sia $a \in \hat{A}$ un'entità infinita e b un'entità propria interna. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) $\star[a] \subset b \Rightarrow ({}^\star a \setminus \star[a]) \cap b \neq \emptyset$;

(ii) ${}^\star a \setminus \star[a] \subset b \Rightarrow \star[a] \cap b \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Osservato che $b \cap {}^\star a = (b \cap \star[a]) \cup (b \cap ({}^\star a \setminus \star[a])$, proviamo (i). Per assurdo sia $({}^\star a \setminus \star[a]) \cap b = \emptyset$. Ne segue $b \cap {}^\star a = b \cap \star[a] = \star[a]$ e quindi $b \cap {}^\star a$ entità esterna, essendo a infinita (Teorema 4.2.2(ii)), contraddicendo così il Teorema 2.2.3(vii). Con ragionamento simmetrico si ottiene (ii). $\square$

Una importante conseguenza del lemma testè provato è il risultato seguente.

Lemma 4.4.3. (del prolungamento (Robinson)) *Sia $X(\nu)$ un metapredicato unario formalizzabile mediante un predicato unario limitato del linguaggio interno L'. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Se $X(n)$ sussiste per ogni naturale n, allora esiste un naturale infinito ω tale che $X(\nu)$ sussiste per ogni $\nu \leq \omega$;

(ii) Se $X(\omega)$ sussiste per ogni naturale infinito ω, allora esiste un naturale n tale che $X(\nu)$ sussiste per ogni $\nu \geq n$.

Dimostrazione. Indicato con $W(\nu)$ il predicato unario limitato di L' tale che $X(\nu) \Leftrightarrow {}^{\imath\mathcal{I}}W(\nu)$, basta osservare che sono interni, per il Teorema d'isolamento interno, gli insiemi

$$\{\nu \in {}^\star\mathbb{N} \,|\, \mathcal{I} \Vdash \sqcap x \lessdot {}^\star\mathbb{N}\, (\langle x, \nu\rangle \lessdot \;\leq \rightarrow\; W(x))\}$$

$$\{\nu \in {}^\star\mathbb{N} \,|\, \mathcal{I} \Vdash \sqcap x \lessdot {}^\star\mathbb{N}\, (\langle \nu, x\rangle \lessdot \;\leq \rightarrow\; W(x))\}$$

e applicare il Lemma del Trabocco. $\square$

4.5 Galassie di $^\star\mathbb{N}$

La funzione "distanza" tra due numeri $\star$-naturali ν_1, ν_2 viene introdotta ponendo:

$$\mathrm{d}(\nu_1, \nu_2) = \begin{cases} \nu_2 - \nu_1 & \text{se } \nu_1 \le \nu_2 \\ \nu_1 - \nu_2 & \text{se } \nu_2 \le \nu_1 \end{cases}.$$

Per questa funzione vale la usuale "proprietà triangolare":

$$\mathrm{d}(\nu_1, \nu_3) \le \mathrm{d}(\nu_1, \nu_2) + \mathrm{d}(\nu_2, \nu_3), \tag{4.1}$$

come si dimostra senza alcuna difficoltà distinguendo i quattro casi possibili ($\nu_1 \le \nu_2, \nu_1 \le \nu_2$; $\nu_1 \le \nu_2, \nu_1 > \nu_2; \ldots$).

Ora, tenuto conto che la differenza di due numeri infiniti può essere sia finita che infinita, viene naturale introdurre in $^\star\mathbb{N}$, ricorrendo alla distanza, la relazione binaria $\sim$ definita come segue:

$$\nu_1 \sim \nu_2 \Leftrightarrow \mathrm{d}(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N}$$

che risulta essere una relazione di equivalenza, come facilmente si verifica (ricorrendo nella prova della transitività alla proprietà triangolare).

Possiamo quindi considerare l'insieme quoziente $\mathbb{G} = {}^\star\mathbb{N}/\sim$, i cui elementi sono chiamati **galassie** di $^\star\mathbb{N}$. A una generica galassia appartengono dunque tutti gli $\star$-naturali che hanno tra loro distanza finita. Più precisamente, indicata con $\mathrm{ga}(\nu)$ la galassia relativa allo $\star$-naturale ν, risulta $\mathrm{ga}(\nu) = \mathbb{N}$, se ν è finito, e $\mathrm{ga}(\nu) = \{\ldots, \nu - 2, \nu - 1, \nu, \nu + 1, \nu + 2, \ldots\}$, se ν è infinito. Inoltre sussiste il risultato seguente.

Teorema 4.5.1. *Le galassie sono insiemi esterni e convessi.*

Dimostrazione. Proviamo intanto che sono entità esterne. Sappiamo già che la galassia $\mathbb{N}$ è esterna (Teorema 4.2.2(i)). Inoltre ogni altra galassia risulta, per il Teorema 4.2.5(i), esterna in quanto priva di minimo (Teorema 4.3.2(i)).

Passando alla convessità, siano ν_1, ν_2 elementi di una galassia e $\nu_1 < \nu_2$. Dobbiamo provare che appartiene alla galassia ogni ν tale che $\nu_1 \le \nu \le \nu_2$, cioè che esiste un naturale n tale che $\nu = \nu_1 + n$. Ora, dalla $\nu_1 \sim \nu_2$ risulta $\nu_2 = \nu_1 + m$ per qualche naturale m. Essendo $\nu_1 \le \nu$, esiste, per il Teorema 4.2.6, la differenza $\nu' = \nu - \nu_1$. Allora, tramite $\nu \le \nu_2$, risulta $\nu_1 + \nu' \le \nu_1 + m$ e quindi, per la monotonia di $<$ rispetto a $+$, si ha $\nu' \le m$, cioè $|\nu - \nu_1| = \nu - \nu_1$ finito. □

Al fine di chiarire ulteriormente la struttura di ${}^*\mathbb{N}$, conviene introdurre in $\mathbb{G}$ sia la relazione d'ordine stretto $\lhd$ così definita:
– $g_1 \lhd g_2 \Leftrightarrow$ *ogni* elemento di g_1 precede secondo l'ordine $<$ *ogni* elemento di g_2,
che l'associata relazione d'ordine: $g_1 \unlhd g_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2$ o $g_1 \lhd g_2$.

Il teorema seguente fornisce alcune proprietà dei due ordinamenti ora introdotti per le galassie.

Teorema 4.5.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathrm{ga}(\nu_1) \lhd \mathrm{ga}(\nu_2) \Leftrightarrow \nu_1 < \nu_2$ *e* $\nu_1 \nsim \nu_2$*;*

(ii) L'ordinamento $\unlhd$ *è totale;*

(iii) L'insieme ordinato $\mathbb{G}(\unlhd)$ *è denso:*

(iv) L'insieme dei naturali è l'elemento minimo;

(v) Per ogni galassia $g \neq \mathbb{N}$ *esiste una galassia* g_1 *tale che* $\mathbb{N} \lhd g_1 \lhd g$*;*

(vi) Non esiste elemento massimo.

Dimostrazione. (i) Sia intanto $\mathrm{ga}(\nu_1) \lhd \mathrm{ga}(\nu_2)$. Allora, per definizione, $\nu_1 < \nu_2$; inoltre $\nu_1 \nsim \nu_2$ in quanto, essendo $\lhd$ un ordine stretto, $\mathrm{ga}(\nu_1) \neq \mathrm{ga}(\nu_2)$.

Sia ora $\nu_1 < \nu_2$ e $\nu_1 \nsim \nu_2$. Dati $\nu_1' \sim \nu_1$ e $\nu_2' \sim \nu_2$, sia, per assurdo, $\nu_1' \geq \nu_2'$. Se $\nu_1' = \nu_2'$, allora $\nu_1 \sim \nu_1' = \nu_2' \sim \nu_2$ e quindi otteniamo la contraddizione $\nu_1 \sim \nu_2$. Se $\nu_1' > \nu_2'$, distinguiamo due casi:
– $\nu_1' < \nu_2$. Allora, $\nu_2' < \nu_1' < \nu_2$ e quindi, essendo le galassie insiemi convessi (Teorema 4.5.1), $\nu_1' \in \mathrm{ga}(\nu_2)$, cioè $\nu_1' \sim \nu_2$, da cui la contraddizione $\nu_1 \sim \nu_2$;
– Se $\nu_1' > \nu_2$, allora $\nu_1 < \nu_2 < \nu_1'$ e quindi, ancora per il medesimo teorema, otteniamo la contraddizione $\nu_1 \sim \nu_2$.

(ii) Sia $\mathrm{ga}(\nu_1) \ntriangleleft \mathrm{ga}(\nu_2)$. Allora, per (i), $\nu_2 \leq \nu_1$ oppure $\nu_1 \sim \nu_2$. Se $\nu_1 = \nu_2$ o $\nu_1 \sim \nu_2$, allora $\mathrm{ga}(\nu_2) = \mathrm{ga}(\nu_1)$. Se invece $\nu_2 < \nu_1$ e $\nu_1 \nsim \nu_2$, allora, ancora per (i), $\mathrm{ga}(\nu_2) \ntriangleleft \mathrm{ga}(\nu_1)$. In ogni caso dunque $\mathrm{ga}(\nu_2) \unlhd \mathrm{ga}(\nu_1)$.

(iii) Supposto $g_1 \lhd g_2$, dobbiamo provare che esiste una galassia g tale che $g_1 \lhd g \lhd g_2$. Osserviamo preliminarmente che è sempre possibile prendere come rappresentante di ogni galassia un numero pari.[7]

Ciò premesso, sia $2\nu_1 \in g_1$ e $2\nu_2 \in g_2$ per qualche ν_1, ν_2. Allora, per (i), $2\nu_1 < 2\nu_2$ da cui, per la monotonia di $<$ rispetto la moltiplicazione, $\nu_1 < \nu_2$ e

[7]Come si prova facilmente, tramite PdT e i Teoremi 3.3.2, 3.6.1(iii) e 3.6.7(ii), considerando la semiformalizzazione del teorema "$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\, (x = 2y \text{ o } x + 1 = 2y)$".

quindi $2\nu_1 < \nu_1 + \nu_2 < 2\nu_2$. Ne segue che la distanza di $\nu_1 + \nu_2$, sia da $2\nu_1$ che da $2\nu_2$, è la differenza $\nu_2 - \nu_1$ che, per ipotesi, è infinita. Dal (i) segue allora che la galassia $\text{ga}(\nu_1 + \nu_2)$ segue g_1 e precede g_2.

(iv) È sufficiente osservare che $0 < \nu$ e $0 \not\sim \nu$ per ogni ν infinito e usare (i).

(v) Per (iv), $\mathbb{N} \lhd g$ da cui, tramite (iii), $\mathbb{N} \lhd g_1 \lhd g$, per qualche galassia g_1.

(vi) Basta notare che, se ν è infinito, $\nu < 2\nu$ e $\nu \not\sim 2\nu$, e ricorrere a (i). □

Quanto sin qui provato assicura che ${}^\star\mathbb{N}$ è costituito dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali seguito da un insieme totalmente ordinato, denso di galassie privo sia di massimo che di minimo. Ciascuna di queste galassie a sua volta riesce isomorfa all'insieme degli interi relativi rispetto all'ordine, e quindi essa stessa risulta priva di massimo e di minimo.

4.6 Insiemi $\star$-finiti

Un ruolo di importanza fondamentale per lo studio e le applicazioni dell'analisi nonstandard viene svolto dalla nozione di $\star$-finitezza, o meglio, dalla nozione di insieme $\star$-finito. Questa nozione è espressa, per definizione, dallo $\star$-concetto associato al concetto "x è un insieme finito", cioè al concetto "esiste una applicazione iniettiva di x in un segmento inferiore chiuso di $\mathbb{N}$". Al fine di ottenere lo $\star$-concetto corrispondente, sfruttando gli $\star$-concetti fondamentali, consideriamo la semiformalizzazione finitamente limitabile:

$$\begin{aligned} X(x) : \exists x_1 \in \mathbb{N}\, \exists u, x_2\, (&u : x \mapsto x_2 \text{ iniettiva} \\ &\text{e } x_2 \text{ segmento inferiore chiuso di origine } x_1 \text{ secondo} \leq \text{di } \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Dai Teoremi 3.3.2, 3.6.4(xi),(xii) e 3.6.5(i),(vii) otteniamo lo $\star$-concetto:

$$\begin{aligned} \star\text{-}X(x) : \exists x_1 \in {}^\star\mathbb{N}\, \exists u\, \exists x_2 (&u : x \mapsto x_2 \text{ iniettiva interna} \\ &\text{e } x_2 \text{ segmento inferiore chiuso di origine } x_1 \text{ secondo } {}^\star\!\leq \text{di } {}^\star\mathbb{N}), \end{aligned}$$

ove la dichiarazione d'internalità di x può essere omessa essendo x dominio di un'applicazione interna (Teorema 2.5.2(iii)).

Dunque:

– *un insieme* è **$\star$-finito** *se e solo se* è *il dominio di un'applicazione iniettiva interna a valori in un segmento inferiore chiuso dei numeri $\star$-naturali.*[8]

[8]Non è inutile ricordare, a questo punto, che siamo pervenuti, all'inizio del capitolo dedicato agli $\star$-concetti, alla medesima caratterizzazione, però, mediante una formalizzazione limitata (alquanto pesante), come richiesto dal ricorso al Principio di Leibniz.

È importante tenere presente che gli insiemi $\star$-finiti sono entità interne e che, come lo prova il prossimo risultato, la nozione di $\star$-finitezza estende quella di finitezza.

Teorema 4.6.1. *Ogni entità interna finita è anche $\star$-finita.*

DIMOSTRAZIONE. Sia b un'entità interna finita. Esiste allora un'applicazione iniettiva f di b nel segmento inferiore $[0, n]$ per qualche naturale n. Essendo $[0, n]$, per il Lemma 4.2.3(ii) e il Teorema 4.3.1, un insieme interno e finito di ${}^{\star}\mathbb{N}$, basta ovviamente provare che l'applicazione f è interna. Osserviamo, per questo, che il prodotto cartesiano $b \times [0, n]$ è un'entità finita e, per il Teorema 2.5.2(i), interna. Conseguentemente, per i Teoremi 2.1.3(i),(iv) e 2.2.3(iii), sono interni tutti i suoi sottoinsiemi e quindi, in particolare, anche f. $\square$

L'esistenza di insiemi $\star$-finiti di ${}^{\star}\mathbb{N}$ che non siano finiti, è poi assicurata dai segmenti inferiori chiusi di ${}^{\star}\mathbb{N}$ con origine un numero infinito (Teorema 4.3.2(i)).

Il teorema seguente fornisce alcune importanti proprietà della $\star$-finitezza.

Teorema 4.6.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Ogni sottoinsieme interno di un'entità $\star$-finita è $\star$-finito;

(ii) Ogni intervallo di estremi numeri $\star$-naturali è $\star$- finito;

(iii) L'unione e l'intersezione di due insiemi $\star$-finiti sono $\star$-finite;

(iv) L'insieme della parti interne di un insieme $\star$-finito è $\star$-finito;

(v) Ogni insieme $\star$-finito non vuoto ordinato secondo un ordine interno ammette sia elemento minimale che massimale;

(vi) Se f è un'applicazione interna e b un insieme $\star$-finito incluso nel suo dominio, allora è $\star$-finito anche $f[b]$;

(vii) Se f è un'applicazione interna di dominio $\star$-finito, allora è $\star$-finita anche la sua imagine;

(viii) Per ogni insieme $\star$-finito di insiemi non vuoti esiste un'applicazione di scelta interna.

DIMOSTRAZIONE. Le dimostrazioni si conseguono tutte, via PdT, considerando i relativi teoremi del caso finito e ricorrendo ai Teoremi 3.2.2(ii), 3.3.2 e agli opportuni $\star$-concetti fondamentali, osservando che i quantificatori relativi alla variabile y (indiciata o no) sono finitamente limitabili.

(i) Dal teorema: $\forall x \in \hat{A}\,(x\,\text{finito} \Rightarrow \forall y \in \hat{A}\,(y \subset x \Rightarrow y\,\text{finito}))$, otteniamo, tramite il Teorema 3.6.1(v), lo $\star$-teorema: $\forall x \in \mathcal{I}(x\ \star\text{-finito} \Rightarrow \forall y \in \mathcal{I}(y \subset x \Rightarrow y\,\star\text{-finito}))$.

(ii) Consideriamo intanto l'intervallo chiuso. Da "$\forall x \in \hat{A}\,\forall y_1, y_2 \in \mathbb{N}\,(x = [y_1, y_2] \Rightarrow x\,\text{finito})$", risulta, per il Teorema 3.6.5(vi), "$\forall x \in \mathcal{I}\,\forall y_1, y_2 \in {}^\star\mathbb{N}\,(x = [y_1, y_2] \Rightarrow x\,\star\text{-finito})$". La $\star$-finitezza degli altri intervalli segue da (i), osservato che, per il Lemma 4.2.3(ii), ogni intervallo di ${}^\star\mathbb{N}$ è interno.

(iii) La $\star$-finitezzà dell'intersezione segue da (i) e dal Teorema 2.2.3(vii). Passando all'unione, da "$\forall x \in \hat{A}\,\forall y_1, y_2\,(x = y_1 \cup y_2\,\text{e}\,y_1, y_2\,\text{insiemi finiti} \Rightarrow x\,\text{finito})$", riesce, per il Teorema 3.6.3(vi), "$\forall x \in \mathcal{I}\,\forall y_1, y_2 (x = y_1 \cup y_2\,\text{e}\,y_1, y_2\,\star\text{-finiti} \Rightarrow x\,\star\text{-finito})$".

(iv) Da "$\forall x \in \hat{A}\,(x\,\text{finito} \Rightarrow \forall y\,(y = \mathbb{P}(x) \Rightarrow y\,\text{finito}))$" si ha, tramite il Teorema 3.6.3(vii), "$\forall x \in \mathcal{I}\,(x\,\star\text{-finito} \Rightarrow \forall y\,(y\,\text{insieme delle parti interne di}\ x \Rightarrow y\,\star\text{-finito}))$".

(v) Da "$\forall x \in \hat{A}\,(x\,\text{finito} \Rightarrow \forall y\,(y\,\text{relazione d'ordine in}\,x \Rightarrow \exists y_1, y_2\,(y_1\ \text{minimale e}\ y_2\,\text{massimale di}\,y)$" deriva, per il Teorema 3.6.5(i),(iv), "$\forall x \in \mathcal{I}\,(x\,\star\text{-finito} \Rightarrow \forall y\,(y\,\text{relazione d'ordine in}\,x \Rightarrow \exists y_1, y_2\,(y_1\ \text{minimale e}\,y_2\,\text{massimale di}\ y)$".

(vi) Da "$\forall x \in \hat{A}\,\forall y, y_1, y_2\,(x\,\text{applicazione e}\,y = \pi_1^2(x)\,\text{e}\,y_1 \subset y\,\text{e}\ y_1\ \text{finito e}\ y_2 = x[y_1] \Rightarrow y_2\,\text{finito})$", segue, tramite i Teoremi 3.6.1(v) e 3.6.4(v),(vi),(x), "$\forall x \in \mathcal{I}\ \forall y, y_1, y_2\,(x\,\text{applicazione interna e}\,y = \pi_1^2(x)\,\text{e}\,y_1 \subset y\,\text{e}\ y_1\star\text{-finito e}\ y_2 = x[y_1] \Rightarrow y_2\,\star\text{-finito})$".

(vii) Conseguenza di (vi) con $b = \pi_1^2(f)$.

(viii) Da "$\forall u \in \hat{A}\,(u\,\text{insieme finito e}\ \emptyset \notin u\ \text{e}\,u \cap A = \emptyset \Rightarrow \exists z\,(z\,\text{applicazione di}\ u\ \text{in}\ \cup u\ \text{e}\ \forall v\,(v \in u \Rightarrow z(v) \in v)))$", segue, per i Teoremi 3.6.1(ii),(iii),(iv), 3.6.3(iii),(v) e 3.6.4(xi),(xvi),"$\forall u \in \mathcal{I}\,(u\,\text{insieme}\ \star\text{-finito e}\ \emptyset \notin u\ \text{e}\ u \cap {}^\star A = \emptyset \Rightarrow \exists z\,(z\,\text{applicazione interna di}\ u\ \text{in}\ \cup u\ \text{e}\ \forall v\,(v \in u \Rightarrow z(v) \in v)))$". □

4.7 Allargamenti e $\star$-finitezza

L'introduzione degli insiemi $\star$-finiti consente di formulare un'interessante caratterizzazione degli allargamenti, come lo prova il prossimo risultato.

Teorema 4.7.1. *Sono equivalenti le proposizioni:*

(i) Il monomorfismo $\star$ è allargante;

(ii) Approssimazione $\star$-finita: *Per ogni entità propria $a \in \hat{A}$ esiste b $\star$-finito tale che $\star[a] \subset b \subset {}^\star a$;*

(iii) *Per ogni entità propria $a \in \hat{A}$, che verifica la proprietà dell'intersezione finita, risulta $\cap \star[a] \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. L'implicazione (iii)$\Rightarrow$(i) segue dal Teorema 2.7.2.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Dato $a \in \hat{A} \setminus A$, consideriamo la relazione concorrente $\Bumpeq$ di dominio a e codominio l'insieme $\mathbb{P}_f(a)$ delle parti finite di a definita dalla relazione di appartenenza, cioè, $\Bumpeq = \{(e_1, e_2) \in a \times \mathbb{P}_f(a) \mid \hat{A} \Vdash e_1 \lessdot e_2\}$. Dal Teorema 2.4.1, otteniamo

$$^\star \Bumpeq = \{(e_1, e_2) \in {}^\star a \times {}^\star\mathbb{P}_f(a) \mid e_1 \in e_2\}. \tag{4.2}$$

Dalla $\mathbb{P}_f(a) = \{e \in \mathbb{P}(a) \mid e \,\text{finito}\}$ risulta, tramite il Teorema 3.3.4,

$$^\star\mathbb{P}_f(a) = \{e \in {}^\star\mathbb{P}(a) \mid e \,\star\text{-finito}\}$$

e quindi, per il Teorema 2.3.3(vii), il codominio di $^\star \Bumpeq$ è l'insieme dei sottoinsiemi $\star$-finiti di $^\star a$.

Ora, essendo $\star$ allargante, esiste b tale che:
– $b \in^\star \mathbb{P}_f(a)$, cioè b è un sottoinsieme $\star$-finito di $^\star a$;
– $^\star a_1 \,^\star\!\Bumpeq\, b$ per ogni $a_1 \in a$ e quindi, per (4.2), $^\star a_1 \in b$ per ogni $a_1 \in a$, cioè $\star[a] \subset b$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Poichè a verifica la proprietà dell'intersezione finita, sussiste la proposizione: $\forall x \in \mathbb{P}(a)\, \forall y\, (x \text{ finito e } y = \cap x \Rightarrow y \neq \emptyset)$, avente il quantificatore relativo a y finitamente limitabile. Usando allora i Teoremi 3.6.1(iii),(iv) e 3.6.3(ii), otteniamo lo $\star$-teorema: $\forall x \in {}^\star\mathbb{P}(a)\, \forall y\, (x \;\star\text{-finito e } y = \cap x \Rightarrow y \neq \emptyset)$ e quindi, per il Teorema 2.3.3(vii), ogni sottoinsieme $\star$-finito di $^\star a$ ha intersezione non vuota.

Ora, (ii) assicura che esiste b $\star$-finito tale che $\star[a] \subset b$. Poichè $\cap \star[a] \supset \cap b$, con $\cap b \neq \emptyset$ per quanto appena provato, si ha la tesi. $\square$

Concludiamo la sezione con un risultato assicurante che se $\star$ è allargante, risulta compatibile non solo il sistema (2.4), ma anche il suo soprasistema:

$$x \,^\star\!\Bumpeq\, b', \qquad \text{per ogni } b' \in b_1 \supset \star[a] \tag{4.3}$$

nel quale, contrariamente all'entità esterna $\star[a]$, l'entità b_1 è $\star$-finita.

Teorema 4.7.2. *Sia $\star$ allargante e $\Bumpeq \in \hat{A}$ una relazione concorrente di dominio a. Esistono allora b, b_1 interni, con b $\star$-finito, tali che $\star[a] \subset b$ e $b' \,^\star\!\Bumpeq\, b_1$ per ogni $b' \in b$.*

Dimostrazione. Essendo $\Bumpeq$ concorrente, sussiste la frase: $\forall x \in \mathbb{P}(a)\,(x$ finito $\Rightarrow \exists y\, \forall z(z \in x \Rightarrow (z,y) \in \Bumpeq))$ avente i quantificatori relativi a y e z finitamente limitabili. Allora, per PdT e i Teoremi 3.6.1(iv) e 3.6.4(ii), sussiste lo $\star$-enunciato: $\forall x \in {}^{\star}\mathbb{P}(a)\,(x$ $\star$-finito $\Rightarrow \exists y\, \forall z(z \in x \Rightarrow (z,y) \in {}^{\star} \Bumpeq))$. Ne segue, per il Teorema 2.3.3(vii), che, per ogni sottoinsieme b $\star$-finito di ${}^{\star}a$, esiste b_1 interno che è in relazione ${}^{\star} \Bumpeq$ con ogni elemento di b.

Ora, essendo $\star$ allargante, esiste, per il Teorema 4.7.1(ii), b $\star$-finito tale che ${}^{\star}a \supset b \supset \star[a]$. Tenuto allora conto di quanto appena provato, otteniamo la tesi. $\square$

Capitolo 5

Numeri $\star$-reali

> D'où il s'ensuit, que si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblable à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$)... C'est encore de la même facon qu'on concoit des dimensions au delà de trois ..., le tout pour établir des idées propres à abréger les raisonnements et fondèes en réalités.
>
> *Mémoire de M.Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel*

Indicato con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali, chiamiamo numeri **$\star$-reali** gli elementi di ${}^\star\mathbb{R}$. Questa terminologia non è conforme a quella che comunemente viene adoperata in letteratura, ove tali elementi sono detti *iperreali.* Trova, però, qui giustificazione nel fatto che riesce concorde con la più generale terminologia introdotta in relazione agli $\star$-concetti. Si è infatti identificato i numeri reali con gli elementi dell'insieme $\mathbb{R}$. Il concetto "x numero reale" si può allora esprimere con la frase "$x \in \mathbb{R}$" e quindi risulta che lo $\star$-concetto $\star$-(x numero reale) equivale, per il Principio di sostituzione e il Teorema 3.6.1(iv), alla condizione "$x \in {}^\star\mathbb{R}$".

Passiamo ora ad una breve descrizione del contenuto del capitolo. La prima sezione è dedicata alle proprietà algebriche e ordinali, riferentesi alle $\star$-operazioni di addizione, moltiplicazione e alla relazione di $\star$-ordine, intese come le trasformate delle omonime operazioni e relazione d'ordine definite nei numeri reali.

Nella seconda, introduciamo le fondamentali nozioni di numero infinito, finito, infinitesimo e apprezzabile, provandone le principali proprietà, che consentono, nelle due sezioni seguenti, di considerare, rispettivamente, le *galassie* (insiemi di $\star$-reali aventi tra loro distanza finita) e le *monadi* (insiemi di $\star$-reali aventi tra loro distanza infinitesima); in particolare, ne descriviamo le proprietà strutturali, sia singolarmente prese che globalmente.

Nella quinta, invece, introduciamo la basilare nozione di *parte standard* di un numero $\star$-reale finito e proviamo che la sua esistenza fornisce una formulazione equivalente della completezza dei numeri reali.[1]

Nella sesta studiamo gli ordini di grandezza degli $\star$-reali, mentre nella settima, che chiude il capitolo, forniamo alcuni interessanti esempi sia di insiemi interni, che di esterni di numeri $\star$-reali.

5.1 Operazioni e ordini in ${}^\star\mathbb{R}$

Essendo $\star$ un'immersione allargante, riesce intanto, per il Teorema 2.7.1, $\mathbb{R} \subsetneqq {}^\star\mathbb{R}$. Inoltre, tenendo presente il Teorema 2.6.2(i),(iii), le operazioni e le relazioni d'ordine di $\mathbb{R}$ si estendono, in modo naturale, a ${}^\star\mathbb{R}$ tramite le corrispondenti $\star$-operazioni ${}^\star+$, ${}^\star\cdot$ e $\star$-ordini ${}^\star\leq$, ${}^\star<$, che vengono, come convenuto nella Sezione 2.6, indicate usando le medesime notazioni, ponendo cioè ${}^\star+ = +$, ${}^\star\cdot = \cdot$, ${}^\star\leq = \leq$ e ${}^\star< = <$.

Ricordato che $\mathbb{R}(+, \cdot, \leq; 0, 1)$ è un campo , otteniamo, intanto, per il Teorema 3.7.1(iii), che lo è pure ${}^\star\mathbb{R}(+, \cdot, \leq; 0, 1)$; inoltre, $<$ è l'ordinamento stretto associato all'ordine $\leq$ (Teorema 3.6.6(ii)). Sussistono inoltre le due fondamentali proprietà che mettono, rispettivamente in luce, che il campo degli $\star$-reali è **$\star$-archimedeo** e anche **$\star$-completo**[2]:

[1] È proprio il ricorso a questa nozione che permette a Robinson di evitare le inconsistenze insite nella trattazione leibniziana degli infinitesimi.

[2] Un campo ordinato $K(+, \cdot, \leq)$ dicesi *archimedeo* se verifica il *postulato di Eudosso-Archimede*: dati comunque due elementi positivi $a, b \in K$, con $a < b$, esiste un numero naturale n tale che $na > b$. È noto che tale postulato è equivalente alla condizione: comunque sia $a \in K$ esiste un numero naturale n tale che $n > a$.

Inoltre, è *completo*, se ogni suo sottoinsieme non vuoto e superiormente (inferiormente) limitato ammette estremo superiore (inferiore). Ricordiamo in proposito che la completezza dei numeri reali può essere espressa, equivalentemente, tramite una qualsiasi delle tre proposizioni:

– Ogni numero $\star$-reale è minore di qualche numero $\star$-naturale;
– Ogni sottoinsieme interno di numeri $\star$-reali non vuoto e superiormente (inferiormente) limitato ammette estremo superiore (inferiore).[3]

Proviamo infine che, a differenza del campo dei numeri reali, quello degli $\star$-reali è non-archimedeo e non-completo. Per quanto riguarda la non-archimedeicità, basta osservare che ogni naturale infinito (elemento di ${}^\star\mathbb{N}_{nf} \subset {}^\star\mathbb{R}$) segue tutti i numeri naturali di $\mathbb{N}$. Passando alla non-completezza, osservato che $\mathbb{R}$ è limitato superiormente da un qualsiasi naturale infinito, assumiamo, per assurdo, che ammetta estremo superiore b; allora, per ogni numero reale r risulta $r + 1 < b$ da cui $r < b - 1$ e quindi otteniamo la contraddizione che $b - 1 < b$ è un maggiorante di $\mathbb{R}$.

In conclusione dunque ${}^\star\mathbb{R}(+, \cdot, \leq; 0, 1)$ è un *campo ordinato $\star$-archimedeo e $\star$-completo, ma né archimedeo, né completo*, includente propriamente il campo dei numeri reali.

5.2 Numeri $\star$-reali finiti, infiniti e infinitesimi

Nella sezione precedente, abbiamo constatato che esistono numeri $\star$-reali maggiori di ogni numero reale. Sia ora b uno di tali numeri, cioè tale che $b > r$ per ogni $r \in \mathbb{R}$. Poichè ${}^\star\mathbb{R}$ è un campo ordinato, risulta $-b < -r$ qualunque sia $r \in \mathbb{R}$. Pertanto $-b$ è minore di ogni numero reale. Ciò prova che esistono anche numeri $\star$-reali che precedono tutti i numeri reali. Viene allora naturale chiamare un numero $\star$-reale **infinito**, se precede o segue *tutti* i numeri reali, e **finito**, altrimenti.

Prima di procedere conviene introdurre la fondamentale funzione "valore assoluto" per i numeri $\star$-reali, ponendo:

$$|b| = \begin{cases} b & \text{se } b \geq 0 \\ -b & \text{se } b < 0 \end{cases},$$

– Ogni sezione del campo reale è di prima specie, cioè esiste un numero reale escluso da entrambe le classi (*Principio di continuità*);
– Ogni insieme non vuoto e superiormente limitato di numeri reali ammette estremo superiore (*Principio dell'estremo superiore*);
–Ogni successione di Cauchy di numeri reali è convergente (*Principio di completezza).*

[3]La prima si ottiene sfruttando la proprietà archimedea dei reali, PdT e il Teorema 3.6.6(ii); la seconda invece usando la completezza dei reali, PdT e i Teoremi 3.6.1(iii),(v) e 3.6.5(v).

per ogni b $\star$-reale.[4] Per questa funzione valgono, come nel caso reale, le note proprietà:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \tag{5.1}$$

$$|\,|x_1| - |x_2|\,| \leq \min(|x_1 - x_2|, |x_1 + x_2|), \tag{5.2}$$

come si dimostra senza alcuna difficoltà distinguendo i quattro casi possibili ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$; $x_1 \geq 0, x_2 < 0; \dots$).

L'introduzione del valore assoluto, consente ora di riformulare, in forma più concisa, la nozione di reale infinito dicendo che lo $\star$-reale b è infinito se, per ogni numero reale $r > 0$, si ha $|b| > r$.

Ne seguito, indichiamo con ${}^\star\mathbb{R}_f$ l'insieme dei numeri finiti e con ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$ quello dei numeri infiniti. Più in dettaglio, in analogia con le usuali notazioni $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r > 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r < 0\}$, usiamo anche le notazioni ${}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$, ${}^\star\mathbb{R}^-_{nf}$ e ${}^\star\mathbb{R}^+_f$, ${}^\star\mathbb{R}^-_f$, con manifesto significato dei simboli.

Passiamo ora a provare alcune proprietà di tali numeri.

Teorema 5.2.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) b $\star$-reale finito $\Leftrightarrow$ esiste un numero reale $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $|b| \leq r$;

(ii) Ogni numero reale è finito;

(iii) b $\star$-reale infinito $\Leftrightarrow$ $|b| > b_1$ per ogni $b_1 \in \mathbb{R}^+_f$.

Dimostrazione. Essendo la proposizione (ii) banale, proviamo le rimanenti.

(i) Basta evidentemente provare solo l'implicazione $\Rightarrow$. Sia dunque b finito. Allora $|b|$ non è maggiorante di $\mathbb{R}$ e quindi esiste un numero reale r tale che $r \geq |b|$.

(iii) Sia intanto b infinito e $b_1 > 0$ finito. Esiste allora, per (i), $r \in \mathbb{R}$ tale che $b_1 = |b_1| \leq r < |b|$. Sia infine $|b| > b_1$ per ogni $\star$-reale finito $b_1 > 0$. Allora, per (ii), risulta, in particolare, $|b| > r$ per ogni r reale positivo e quindi b è infinito. $\square$

Poichè ${}^\star\mathbb{R}$ è un campo, ogni suo elemento non nullo ammette reciproco. In particolare ciò accade quando b è infinito. In questo caso, $|b| > r$ per ogni reale $r > 0$ e quindi, il suo reciproco b^{-1}, ovviamente non nullo, è tale che $|b^{-1}| = |b|^{-1} < 1/r$ per ogni reale positivo r; conseguentemente, dato un numero reale positivo r_1 arbitrario e posto $r > r_1^{-1}$, risulta $|b| < 1/r < r_1$.

[4] Tale funzione è la $\star$-trasformata della omonima funzione definita sui reali. Infatti, osservato che $|\cdot| = \{(r, r') \in \mathbb{R}^2 \,|\, ((0, r) \in \leq \Rightarrow r' = r) \,\mathrm{e}\, ((r, 0) \in < \Rightarrow r' = -r)\}$, si ha, per i Teoremi 3.3.4, 3.6.1(iii), 3.6.4(ii) e 3.6.7(v), ${}^\star|\cdot| = \{(b, b') \in {}^\star\mathbb{R}^2 \,|\, (b \geq 0 \Rightarrow b' = b) \,\mathrm{e}\, (b < 0 \Rightarrow b' = -b)\} = |\cdot|$.

Esistono pertanto numeri ⋆-reali non nulli tali che il loro valore assoluto risulta inferiore ad *ogni* numero reale positivo. Quanto appena constatato, giustifica di considerare, accanto agli ⋆-reali infiniti e finiti, anche gli ⋆-reali b tali che $|b| < r$ per ogni $r \in \mathbb{R}^+$, che, nel seguito, chiamiamo **infinitesimi**.

Osserviamo intanto che lo zero è l'unico numero reale infinitesimo. Sussistono poi le seguenti proprietà elementari, le cui facili dimostrazioni lasciamo, come esercizio, al lettore.

Teorema 5.2.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $b \neq 0$ *⋆-reale infinitesimo* $\Leftrightarrow$ b *è il reciproco di un numero infinito;*

(ii) Ogni numero infinitesimo è finito;

(iii) b *⋆-reale finito non infinitesimo* $\Leftrightarrow$ *esistono due numeri reali* r_1, r_2 *tali che* $0 < r_1 < |b| < r_2$*;*

(iv) b *⋆-reale infinitesimo* $\Leftrightarrow$ $|b| < b_1$ *per ogni* $b_1 > 0$ *non infinitesimo.*

Abbiamo sin qui ripartito ${}^\star\mathbb{R}$ nei due sottoinsiemi ${}^\star\mathbb{R}_f$ e ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$. L'introduzione degli infinitesimi che, come appena visto sono finiti, permette ora di ottenere una ulteriore ripartizione dell'insieme ${}^\star\mathbb{R}_f$ in due sottoinsiemi: quello ${}^\star\mathbb{R}_a$ dei numeri finiti non infinitesimi (chiamati **apprezzabili**) e quello dei numeri infinitesimi.

$$\begin{tikzcd}
\star\text{-reali} \arrow[r] \arrow[d] & \text{finiti} \arrow[r] \arrow[d] & \text{infinitesimi} \arrow[r] \arrow[d] & \text{non nulli} \\
\text{infiniti} & \text{apprezzabili} & \text{nullo} &
\end{tikzcd}$$

Riassumendo: ponendo a confronto i numeri ⋆-reali con i numeri reali positivi, si ottiene la classificazione:
− i numeri infiniti sono quelli di valore assoluto superiore ad ogni reale positivo;
− i numeri infinitesimi sono quelli di valore assoluto inferiore ad ogni reale positivo;
− i numeri apprezzabili sono quelli di valore assoluto compreso tra due numeri reali positivi.

Prima di procedere, al fine di semplificare l'esposizione, risulta utile usare, qui e nel seguito (salvo avviso contrario), la convenzione seguente relativa al significato di alcuni simboli: ω, $\omega_1, \ldots$ *indicano numeri infiniti, mentre* ϵ, $\epsilon, \ldots$ *numeri infinitesimi e* r, $r_1, \ldots$ *numeri reali.*

Ciò convenuto, è interessante esaminare le proprietà algebriche con riferimento alla ripartizione dei numeri $\star$-reali nei tre sottoinsiemi ora considerati. I possibili risultati delle operazioni razionali sono *qualitativamente*[5] riassunti nelle tre tabelle che seguono. Gli altri simboli che vi appaiono denotano numeri $\star$-reali e vanno sistematicamente letti come segue:
– γ: apprezzabile, b: $\star$-reale, c: finito.

+/-	ω	γ	ϵ
ω	b	ω	ω
γ	ω	c	γ
ϵ	ω	γ	ϵ

$\cdot$	ω	γ	ϵ
ω	ω	ω	b
γ	ω	γ	ϵ
ϵ	b	ϵ	ϵ

/	ω	γ	$\epsilon \neq 0$
ω	b	ω	ω
γ	ϵ	γ	ω
ϵ	ϵ	ϵ	b

Nel primo riquadro di ogni tabella è indicata l'operazione a cui si fa riferimento, mentre la prima colonna e la prima riga nell'ordine, riportano, nei tre possibili tipi, gli operandi. I risultati sono segnati nelle tre colonne. Atteso il significato dato al simboli, i risultati indicati con le lette greche sono *qualitativamente* determinati, mentre quelli indicati con lettere latine si riferiscono ai casi di indeterminazione. I casi di massima indeterminatezza sono quelli indicati con la lettera b, nei quali il risultato può essere, a priori, infinito, apprezzabile, infinitesimo. Essi corrispondono alle ben note "forme indeterminate" dell'analisi matematica. La lettera c segnala invece una indeterminazione più debole: il risultato è finito, ma non è possibile distinguere se infinitesimo o apprezzabile.[6]

Le dimostrazioni dei risultati riassunti nelle tre tabelle, si ottengono sfruttando le usuali proprietà delle operazioni, dell'ordine e del valore assoluto. Ne riportiamo alcune. Le rimanenti si ottengono in modo analogo e sono lasciate al lettore come esercizio.

Cominciamo col considerare alcuni casi determinati:
– $\omega + \gamma = \omega$. Esiste intanto, per il Teorema 5.2.2(iii), r_1 tale che $|\gamma| < r_1 < |\omega|$. Allora, per (5.2), $|\omega + \gamma| \geq \big|\, |\omega| - |\gamma| \,\big| = |\omega| - |\gamma| > |\omega| - r_1$. Risulta poi $|\omega| > r + r_1$ per ogni $r > 0$. Dunque $|\omega + \gamma| > r$ qualunque sia $r > 0$.

[5]Nel senso che i simboli riportati nelle tabelle non denotano un preciso numero, ma il suo tipo: $\star$-reale, finito, infinito, infinitesimo, apprezzabile.

[6]Da un punto di vista algebrico, le tabelle dell'addizione e moltiplicazione assicurano che l'insieme dei numeri $\star$-reali finiti è un *sottoanello* di ${}^\star\mathbb{R}$, mentre quello degli infinitesimi un *ideale* di questo sottoanello.

$-\ \omega + \epsilon = \omega$. La dimostrazione è analoga alla precedente; basta sostituire γ con ϵ.
$-\ \gamma + \epsilon = \gamma$. Esistono, per il Teorema 5.2.2(iii), r_1, r_2 tali che $0 < r_1 < |\gamma| < r_2$. Allora, $|\epsilon| < r_1/2 < |\gamma|$. Ne segue, per (5.1), $|\gamma+\epsilon| \leq |\gamma|+|\epsilon| < r_2+r_2 = 2r_2$ e, per (5.2), $|\gamma + \epsilon| \geq |\,|\gamma| - |\epsilon|\,| = |\gamma| - |\epsilon| > r_1 - r_1/2 = r_1/2$. Dunque $0 < r_1/2 < |\gamma + \epsilon| < 2r_2$ e quindi, sempre per il Teorema 5.2.2(iii), $\gamma + \epsilon$ è apprezzabile.
$-\ \omega \cdot \omega = \omega$. Dati ω_1, ω_2 infiniti, si ha $|\omega_1| > 1$, $|\omega| > r$ qualunque sia $r > 0$. Allora, $|\omega_1 \cdot \omega_2| = |\omega_1| \cdot |\omega_2| > 1 \cdot r = r$.
$-\ \omega \cdot \gamma = \omega$. Per il Teorema 5.2.2(iii), esiste $r_1 > 0$ tale che $0 < r_1 < |\gamma|$. Allora, qualunque sia $r > 0$, si ha $|\omega| > r/r_1$ e quindi $|\omega \cdot \gamma| = |\omega| \cdot |\gamma| > r/r_1 \cdot r_1 = r$. Dunque $\omega \cdot \gamma$ è infinito.

I risultati della tabella della divisione si possono ottenere da quelli della tabella della moltiplicazione studiando preventivamente il comportamento qualitativo del reciproco, che risulta determinato ed è riassunto nella tabella:

	ω	γ	$\epsilon \neq 0$
$1/\cdot$	ϵ	γ	ω

Ad esempio, $1/\epsilon = \omega$ con $\epsilon \neq 0$ segue immediatamente dal Teorema 5.2.2(i).

Prima di passare all'analisi dei casi indeterminati, osserviamo che dalla tabella della sottrazione (addizione) si può ottenere il comportamento qualitativo dell'opposto ponendo $\epsilon = 0$ come primo operando (ultima riga). Si deduce così che *l'opposto di un numero $\star$-reale conserva la classe.*

Veniamo ora ai casi di indeterminazione:
$-\ \omega + \omega = b$. Riesce $(\omega + 1) - \omega = 1$, $\omega + \omega = 2\omega \in {}^\star\mathbb{R}_{nf}$ e $(\omega + \epsilon) - \omega = \epsilon$. Abbiamo così ottenuto risultati di tutti e tre i tipi. Dunque, siamo in presenza di un caso di completa indeterminazione.
$-\ \gamma + \gamma = c$. Risulta $(\epsilon - \gamma) + \gamma = \epsilon$, $\gamma + \gamma = 2\gamma$ apprezzabile. Abbiamo così ottenuto un risultato infinitesimo ed uno apprezzabile. Non è invece possibile ottenere un risultato infinito. Infatti, dati γ_1, γ_2 (per quel che segue basterebbero finiti), esistono, per il Teorema 5.2.2(iii), r_1, r_2 tali che $|\gamma_1| < r_1$, $|\gamma_2| < r_2$. Allora, per (5.1), $|\gamma_1 + \gamma_2| \leq |\gamma_1| + |\gamma_2| < r_1 + r_2$ e quindi $\gamma_1 + \gamma_2$ finito.
$-\ \omega \cdot \epsilon = b$. Risulta ω^2 infinito e $1/\omega$, $1/\omega^2$ infinitesimi. Ne segue $\omega(1/\omega^2) = 1/\omega$, $\omega^2(1/\omega) = \omega$, $\omega(1/\omega) = 1$. Abbiamo così ottenuto risultati di tutti e tre i tipi. Dunque, siamo ancora in presenza di un caso di completa indeterminazione.

$-$ ϵ/ϵ e ω/ω si possono analizzare trasformandole nella forma indeterminata $\omega \cdot \epsilon$ mediante la tabella dei reciproci.

Sarà utile per il seguito aver presente anche il comportamento della somma, differenza e prodotto di numeri finiti, senza cioè distinguere, negli operandi e nei risultati, tra infinitesimi e apprezzabili. Comportamento che può essere facilmente dedotto unificando i risultati relativi alle ultime due righe delle corrispondenti tabelle. Si ottiene così che *la somma, la differenza e il prodotto di due numeri finiti sono numeri finiti.*

Concludiamo l'analisi sul comportamento delle operazioni razionali con operandi $\star$-reali con un risultato di ovvio interesse.

Teorema 5.2.3. *La somma di un numero non infinitesimo con un numero infinitesimo ha il segno del numero non infinitesimo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia b non infinitesimo. Assumiamo intanto $b > 0$. Esiste allora r tale che $0 < r < b$. Dalla $|\epsilon| < r/2$ risulta allora $b+\epsilon \geq b-|\epsilon| > r-r/2 = r/2 > 0$ e quindi la tesi.

Sia infine $b < 0$. Risulta $-(b + \epsilon) = -b + (-\epsilon)$, con $-b > 0$ non infinitesimo perchè opposto di un numero non infinitesimo (Teorema 5.2.2(iii)). Per quanto provato sopra, si ha allora $(-b) + (-\epsilon) > 0$, cioè $b + \epsilon < 0$. $\square$

5.3 Galassie di ${}^\star\mathbb{R}$

In analogia a quanto fatto a proposito dei numeri $\star$-naturali (Sezione 4.5), introduciamo ora nei numeri $\star$-reali la nozione di galassia. A tal fine consideriamo in ${}^\star\mathbb{R}$ la relazione binaria:

$$b_1 \sim b_2 \Leftrightarrow b_1 - b_2 \in {}^\star\mathbb{R}_f.$$

Usando i risultati della sezione precedente, è immediato verificare che trattasi di una relazione d'equivalenza. Gli elementi del suo insieme quoziente $\mathbb{G} = {}^\star\mathbb{R}/\sim$ prendono il nome di **galassie**. Atteso il tipo di equivalenza, le singole galassie risultano collezioni di tutti e soli i numeri $\star$-reali che hanno "distanza" finita. In termini precisi, preso uno $\star$-reale b, la galassia $\mathrm{Ga}(b) = b/\sim$ si ottiene addizionando a b ogni numero finito, cioè risulta $\mathrm{Ga}(b) = b + {}^\star\mathbb{R}_f$. In particolare, se b è finito, si ha $\mathrm{Ga}(b) = {}^\star\mathbb{R}_f$. In conclusione, l'insieme dei numeri finiti è una galassia e tutte le altre possono essere messe in corrispondenza biunivoca con essa. Anzi, visto che $\mathrm{Ga}(b) = b + {}^\star\mathbb{R}_f$, ogni galassia è *ordinalmente isomorfa* a ${}^\star\mathbb{R}_f$.[7]

Sussiste poi il teorema seguente che fornisce proprietà strutturali delle galassie, singolarmente prese.

Teorema 5.3.1. *Le galassie sono insiemi limitati privi di entrambi gli estremi, esterni e convessi.*

Dimostrazione. Sia b un generico numero $\star$-reale.

Proviamo intanto che $\mathrm{Ga}(b)$ è limitata. Se b è finito, la cosa è ovvia (esistono infiniti positivi e negativi). Se è infinito, i numeri infiniti $-2|b|$, $2|b|$ sono, rispettivamente, minorante e maggiorante della galassia. Infatti, se $b_1 \in \mathrm{Ga}(b)$, risulta $b_1 = b + b_2$, con b_2 finito. Allora, tenuto conto che b è infinito, otteniamo, per il Teorema 5.2.1(iii), $|b_2| < |b|$ e quindi $|b_1| = |b + b_2| \le |b| + |b_2| < |b| + |b| = 2|b|$. Dunque, $-2|b| < b_1 < 2|b|$.

Proviamo ora che $\mathrm{Ga}(b)$ non ha estremi. In forza dell'isomorfismo ordinale esistente tra le galassie, è sufficiente condurre la dimostrazione per la galassia ${}^\star\mathbb{R}_f$. Sia dunque, per assurdo, $b = \sup {}^\star\mathbb{R}_f$. Esiste allora $b_1 \in {}^\star\mathbb{R}_f$ tale che $b - 1 < b_1$ da cui la contraddizione $b < b_1 + 1 \in {}^\star\mathbb{R}_f$. Per quanto riguarda la non esistenza dell'estremo inferiore, la prova è analoga.

Verifichiamo che $\mathrm{Ga}(b)$ è esterna. Poichè le galassie sono insiemi non vuoti e limitati e ${}^\star\mathbb{R}$ è $\star$-completo, se fossero interne dovrebbero possedere estremi, contraddicendo quanto appena provato.

Constatiamo infine che $\mathrm{Ga}(b)$ è convesso. Per l'isomorfismo ordinale anche qui è sufficiente considerare la galassia dei numeri finiti. Si tratta di provare che, se b_1, b_2 sono finiti e $b_1 < b_2$, ogni b tale che $b_1 < b < b_2$ è finito. Sia dunque $b_1 < b < b_2$. Ne segue $0 < b - b_1 < b_2 - b_1$. Allora, $|b - b_1| = b - b_1 < b_2 - b_1$, con $b_2 - b_1$ finito. Pertanto, per il Teorema 5.2.1(i), è finito anche $b - b_1$ e dunque anche $b = (b - b_1) + b_1$. $\square$

Passiamo ora a un esame *globale* delle galassie introducendo (analogamente a quanto fatto nella Sezione 4.5), nel loro insieme $\mathbb{G}$ sia la relazione d'ordine stretto:

– $G_1 \lhd G_2 \Leftrightarrow$ *ogni* elemento di G_1 precede secondo $<$ *ogni* elemento di G_2,

che l'associata relazione d'ordine: $G_1 \unlhd G_2 \Leftrightarrow G_1 = G_2$ o $G_1 \lhd G_2$.

Il teorema seguente fornisce alcune proprietà di tali ordinamenti.

[7] Ricordiamo che le galassie di ${}^\star\mathbb{N}$, fatta eccezione di $\mathbb{N}$, erano invece ordinalmente isomorfe all'insieme dei numeri interi relativi. Osserviamo inoltre che, per il Teorema 5.2.1(ii), $\mathrm{ga}(b) \subset \mathrm{Ga}(b)$ per ogni $b \in {}^\star\mathbb{N}$.

Teorema 5.3.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathrm{Ga}(b_1) \lhd \mathrm{Ga}(b_2) \Leftrightarrow b_1 < b_2$ *e* $b_1 \nsim b_2$*;*

(ii) L'ordinamento $\unlhd$ *è totale;*

(iii) L'insieme ordinato $\mathbb{G}(\unlhd)$ *è denso e non completo;*

(iv) L'insieme ordinato $\mathbb{G}(\lhd)$ *non possiede né minimo né massimo.*

Dimostrazione. Le dimostrazioni di (i), (ii) sono analoghe a quelle delle proposizioni (i), (ii) del Teorema 4.5.2.

(iii) Proviamo intanto la densità. Sia $\mathrm{Ga}(b_1) \lhd \mathrm{Ga}(b_2)$ e perciò, per (i), $b_1 < b_2$ e $b_1 \nsim b_2$. Posto $b = (b_1 + b_2)/2$, risulta $\mathrm{Ga}(b_1) \lhd \mathrm{Ga}(b) \lhd \mathrm{Ga}(b_2)$. Infatti, $b_1 < b < b_2$ e $b - b_1 = b_2 - b = (b_2 - b_1)/2$. Tenuto conto della $b_1 \nsim b_2$, riesce $b_2 - b_1$ infinito e quindi anche $(b_2 - b_1)/2$. Ne segue $b_1 \nsim b \nsim b_2$ e quindi, sempre per (i), la tesi.

Proviamo infine la non completezza. A tal fine verifichiamo che un insieme di galassie inferiormente limitato e privo di estremo inferiore è l'insieme:

$$T = \{\mathrm{Ga}(\omega^2/n) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad (\omega > 0).$$

Iniziamo col constatare che T è inferiormente limitato da $\mathrm{Ga}(\omega)$. Infatti, qualunque sia n risulta $(\omega^2/n) - \omega = \omega((\omega/n) - 1) \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$, cioè $(\omega^2/n) - \omega$ infinito positivo. È allora $\omega \nsim \omega^2/n$ e $\omega < \omega^2/n$. Da (i), segue $\mathrm{Ga}(\omega) \lhd \mathrm{Ga}(\omega^2/n)$ qualunque sia n e quindi la tesi.

Proviamo infine che T non ha estremo inferiore. Per assurdo sia $\mathrm{Ga}(b) = \inf T$. Allora, $\mathrm{Ga}(\omega) \unlhd \mathrm{Ga}(b)$ e quindi $\mathrm{Ga}(\omega) = \mathrm{Ga}(b)$ o $\mathrm{Ga}(\omega) \lhd \mathrm{Ga}(b)$. Nel primo caso risulta $\omega \sim b$, cioè $\omega - b \in {}^\star\mathbb{R}_f$ e quindi esiste b_1 finito tale che $b_1 = \omega - b$; ne segue b infinito e inoltre, dalle $\omega > b_1$ e $b = \omega - b_1$, la positività di b. Nel secondo caso, invece, si ha, tramite (i), $\omega \leq b$ e quindi b è infinito positivo.

Dunque, in ogni caso, b è un infinito positivo. Pertanto, $2b > b$, con $2b$ a distanza infinita da b e quindi, per (i), $\mathrm{Ga}(b) \lhd \mathrm{Ga}(2b)$. Esiste allora n tale che $\mathrm{Ga}(\omega^2/n) \lhd \mathrm{Ga}(2b)$ da cui, sempre per (i), $2b - \omega^2/n \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$ e quindi $b - \omega^2/2n \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Ancora per (i), si ha infine la contraddizione $\mathrm{Ga}(\omega^2/2n) \lhd \mathrm{Ga}(b)$.

(iv) Basta verificare che ogni galassia ammette un seguente e un precedente.[8] Se la galassia è ${}^\star\mathbb{R}_f$, ciò è assicurato dall'esistenza di numeri infiniti positivi e negativi, mentre, è facile verificare, che le galassie $\mathrm{Ga}(2^{|\omega|})$ e $\mathrm{Ga}(-2^{|\omega|})$ sono, la prima seguente e la seconda precedente $\mathrm{Ga}(\omega)$. □

[8]Per provarlo facciamo ricorso alle proprietà della trasformata della funzione esponenziale che, come vedremo nel quinto paragrafo della Sezione 7.2, verifica tutte le usuali proprietà dell'esponenziale reale.

5.4 Monadi di ${}^\star\mathbb{R}$

Nella sezione precedente, con l'introduzione dell'equivalenza basata sulla nozione di distanza *finita* di due numeri $\star$-reali, abbiamo ottenuto una ripartizione del numeri $\star$-reali in galassie. Qui, invece, consideriamo una ripartizione più fine introducendo un'equivalenza basata sulla nozione di distanza *infinitesima*. È sufficiente per questo considerare la relazione binaria:

$$b_1 \approx b_2 \Leftrightarrow b_1 - b_2 \text{ infinitesimo}$$

che facilmente si verifica essere un'equivalenza *più fine* della precedente $\sim$. La classe di equivalenza $b/\approx$, indicata con la notazione $\mu(b)$, viene denominata **monade** di b. Gli elementi di una monade hanno dunque tra loro distanza infinitesima. In particolare, $\mu(0)$, monade di 0, è l'insieme degli infinitesimi, in quanto tutti e soli gli infinitesimi hanno distanza infinitesima dallo zero. La monade di un generico $\star$-reale b, invece, si ottiene addizionando a b tutti gli infinitesimi; riesce cioè $\mu(b) = b + \mu(0)$. Ciò comporta che tutte le monadi sono ordinalmente isomorfe a $\mu(0)$, e tra di loro, e inoltre, per il Teorema 5.2.3, si ha il risultato seguente.

Teorema 5.4.1. *La monade di un numero $\star$-reale non infinitesimo* è *costituita da numeri $\star$-reali non infinitesimi (quindi non nulli) tutti dello stesso segno.*

Con una esposizione parallela a quella della sezione precedente, possiamo ora stabilire per le monadi risultati del tutto analoghi a quelli visti per le galassie.

Teorema 5.4.2. *Le monadi sono insiemi limitati privi di entrambi gli estremi, esterni e convessi.*

Dimostrazione. Sia b un generico numero $\star$-reale.

Proviamo intanto, che la monade $\mu(b)$ è limitata. Qualunque sia ϵ riesce $|\epsilon| < 1$ e quindi $b - 1 < b + \epsilon < b + 1$. Pertanto $b - 1$ e $b + 1$ sono uno minorante e l'altro maggiorante di $\mu(b)$.

Proviamo ora che la monade non ha estremi. In forza dell'isomorfismo ordinale, possiamo limitare la dimostrazione alla monade degli infinitesimi. Per assurdo sia $b = \sup \mu(0)$. Deve allora essere $b > 0$, in quanto esistono infinitesimi positivi. Ciò premesso, l'assurdo si consegue dimostrando che l'estremo b non può essere né infinitesimo né non infinitesimo. Infatti: se b fosse infinitesimo, allora risulterebbe

$2b > b$ pure infinitesimo (assurdo); se b non fosse infinitesimo, allora risulterebbe anche $b/2$ positivo non infinitesimo; pertanto $b/2$ seguirebbe tutti gli infinitesimi e $b/2 < b$ (assurdo). Per quanto riguarda la non esistenza dell'estremo inferiore, si procede in modo analogo.

Le dimostrazioni delle proprietà rimanenti sono simili a quelle fatte per le analoghe proprietà delle galassie (Teorema 5.3.1). □

Passiamo ora ad un esame globale delle monadi, introducendo nel loro insieme $\mathbb{M} = {}^\star\mathbb{R}/\approx$ sia la relazione d'ordine stretto:
– $\mu_1 \sqsubset \mu_2 \Leftrightarrow$ *ogni* elemento di μ_1 precede secondo l'ordine $<$ *ogni* elemento di μ_2,
che l'associata relazione d'ordine: $\mu_1 \sqsubseteq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_1 = \mu_2$ o $\mu_1 \sqsubset \mu_2$.

A tale proposito sussistono le proprietà seguenti.

Teorema 5.4.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mu(b_1) \sqsubset \mu(b_2) \Leftrightarrow b_1 < b_2$ *e* $b_1 \not\approx b_2$*;*

(ii) L'ordinamento $\sqsubseteq$ *è totale;*

(iii) L'insieme ordinato $\mathbb{M}(\sqsubseteq)$ *è denso e non completo;*

(iv) Non esistono né minimo né massimo.

Dimostrazione. Notato che (ii)÷(iv) si provano con i medesimi ragionamenti fatti in occasione della dimostrazione delle analoghe proprietà del Teorema 5.3.2, ci limitiamo a provare solamente (i). Sia intanto $\mu(b_1) \sqsubset \mu(b_2)$, Allora, per definizione, $b_1 < b_2$; inoltre $b_1 \not\approx b_2$ in quanto, essendo $\sqsubset$ un ordine stretto, $\mu(b_1) \neq \mu(b_2)$.

Siano ora $b_1 < b_2$ tali che $b_2 - b_1$ non infinitesimo. Consideriamo due generici elementi $b'_1 \in \mu(b_1$ e $b'_2 \in \mu(b_2)$. Allora, $b'_1 = b_1 + \epsilon_1$, $b'_2 = b_2 + \epsilon_2$ e riesce $b'_2 - b'_1 = (b_2 - b_1) + (\epsilon_2 - \epsilon_1)$. Ora, essendo $b_2 - b_1 > 0$ e non infinitesimo, per il Teorema 5.4.1, $b'_2 - b'_1 > 0$, cioè $b'_1 < b'_2$. □

A chiusura di questa sezione, riteniamo far riflettere sulla complessità delle monadi, facendo rilevare che la loro cardinalità coincide con quella dei numeri infiniti. Infatti, all'inizio della sezione, abbiamo visto che le monadi hanno tutte la medesima cardinalità, quella dell'insieme $\mu(0)$ dei numeri infinitesimi. La cardinalità di quest'ultimo, a sua volta, coincide con quella dell'insieme dei numeri infiniti ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$, atteso che, escluso lo zero, il reciproco di un numero infinitesimo è infinito, e viceversa. Circa i numeri infiniti, sappiamo che essi sono l'unione di un "firmamento sterminato" di galassie, ciascuna delle quali ha cardinalità pari a quella della galassia ${}^\star\mathbb{R}_f$ dei numeri finiti. Questi, a sua volta, si possono ottenere, come vedremo nella prossima sezione, "contornando" ogni numero reale con la monade degli infinitesimi.

5.5 La funzione parte standard

Oltre le proprietà considerate nella sezione precedente, sussistono per le monadi altri interessanti risultati che non trovano un analogo riscontro nel caso delle galassie e che sono essenziali per lo studio nonstandard dell'analisi infinitesimale. Essi si riferiscono alle monadi del sottoinsieme $\mathbb{M}_f = {}^\star\mathbb{R}_f/\approx$, cioè alle monadi individuate dai numeri finiti, e riguardano la possibilità di introdurre in tale sottoinsieme un'operazione di addizione e una di moltiplicazione che, assieme all'ordine $\sqsubseteq$, lo rendono isomorfo all'insieme dei numeri reali. Ed è proprio di questo argomento che ora ci occupiamo.

A tal fine, iniziamo con il lemma seguente che stabilisce la compatibilità della relazione di equivalenza $\approx$ con le operazioni $+$, $\cdot$ definite in ${}^\star\mathbb{R}_f$.

Lemma 5.5.1. *Siano $b_1, b_2 \in {}^\star\mathbb{R}_f$. Risulta allora:*

$$b_1' \approx b_1 \text{ e } b_2' \approx b_2 \Rightarrow b_1' + b_2' \approx b_1 + b_2 \text{ e } b_1'\, b_2' \approx b_1\, b_2.$$

Dimostrazione. Sia $b_1' = b_1 + \epsilon_1$ e $b_2' = b_2 + \epsilon_2$. Allora $(b_1' + b_2') - (b_1 + b_2) = \epsilon_1 - \epsilon_2$, cioè la prima parte della tesi. Passando alla seconda parte, basta osservare che $b_1'\, b_2' - b_1\, b_2 = b_1\, \epsilon_2 + b_2\, \epsilon_1 + \epsilon_1\, \epsilon_2$, con $b_1\epsilon_2$ e $b_2\epsilon_1$ infinitesimi, essendo b_1, b_2 finiti. □

Giova qui osservare che il parallelismo con le galassie si interrompe a questo punto a causa della seconda tesi del lemma. Infatti, è facile rendersi conto che la prima tesi del lemma, valida per ogni $\star$-reale b_1, b_2, sussiste anche per la relazione $\sim$ (di distanza finita). La seconda parte invece, perde di efficacia per le galassie, in quanto in essa è essenziale l'ipotesi che b_1 e b_2 siano finiti, altrimenti i prodotti $b_1\epsilon_2$ e $b_2\epsilon_1$ sarebbero indeterminati e quindi, a seconda dei casi, il loro prodotto potrebbe essere finito o infinito.

Tornando alla studio dell'insieme $\mathbb{M}_f$, grazie al lemma, è lecito ora introdurre le preannunciate operazioni di addizione e di moltiplicazione ponendo:

$$\mu(b_1) + \mu(b_2) = \mu(b_1 + b_2), \qquad \mu(b_1)\mu(b_2) = \mu(b_1 b_2)$$

per ogni $b_1, b_2 \in \mathbb{M}_f$.

Le operazioni appena introdotte sono commutative e associative e la moltiplicazione è distributiva rispetto l'addizione. Ciò è immediata conseguenza delle analoghe proprietà delle corrispondenti operazioni tra numeri $\star$-reali. Inoltre, entrambe possiedono elemento neutro: $\mu(0)$ è lo "zero" dell'addizione e $\mu(1)$ è la "unità" della moltiplicazione. Ogni monade $\mu(b)$ ammette opposto $\mu(-b)$ e, se diversa da zero (se b non è infinitesimo), anche reciproco. Circa l'esistenza di quest'ultimo, nel caso $\mu(b) \neq \mu(0)$, è assicurata dal fatto che, in questa ipotesi, b risulta apprezzabile e quindi che tale è anche $1/b$; dunque $\mu(1/b)$ appartiene a $\mathbb{M}_f$ come dichiarato.

Le considerazioni sin qui fatte permettono di concludere che con le due operazioni sopra introdotte l'insieme delle monadi $\mathbb{M}_f(+,\cdot)$ è un campo. Viene naturale, a questo punto, esaminare le due operazioni in relazione all'ordine $\sqsubseteq$ introdotto nella sezione precedente. Ordine che risulta compatibile con le dette operazioni, come lo prova il lemma seguente.

Lemma 5.5.2. *Siano* $b, b_1, b_2 \in {}^\star\mathbb{R}_f$. *Risulta:*

(i) $\mu(b_1) \sqsubseteq \mu(b_2) \Rightarrow \mu(b_1) + \mu(b) \sqsubseteq \mu(b_2) + \mu(b)$;

(ii) $\mu(0) \sqsubset \mu(b)$ *e* $\mu(b_1) \sqsubseteq \mu(b_2) \Rightarrow \mu(b_1)\mu(b) \sqsubseteq \mu(b_2)\mu(b)$.

Dimostrazione. Sia $\mu(b_1) \sqsubseteq \mu(b_2)$. Allora, $\mu(b_1) = \mu(b_2)$ o $\mu(b_1) \sqsubset \mu(b_2)$.

(i) Dalle $\mu(b_1)+\mu(b) = \mu(b_1+b)$, $\mu(b_2)+\mu(b) = \mu(b_2+b)$ e $(b_2+b)-(b_1+b) = b_2 - b_1$, la tesi segue immediatamente se $\mu(b_1) = \mu(b_2)$. Se, invece $\mu(b_1) \sqsubset \mu(b_2)$, allora, per il Teorema 5.4.3(i), $b_2 - b_1 > 0$ apprezzabile e quindi, per il medesimo teorema, si ha la tesi.

(ii) Sia $\mu(0) \sqsubset \mu(b)$ e quindi, per il Teorema 5.4.3(i), $b > 0$ apprezzabile. Dalle $\mu(b_1)\mu(b) = \mu(b_1 b)$, $\mu(b_2)\mu(b) = \mu(b_2 b)$ e $b_2 b - b_1 b = b(b_2 - b_1)$, la tesi segue immediatamente se $\mu(b_1) = \mu(b_2)$. Se, invece $\mu(b_1) \sqsubset \mu(b_2)$, allora, sempre per lo stesso teorema, $b(b_2 - b_1) > 0$ apprezzabile, in quanto prodotto di due apprezzabili. Ne segue, sempre per il Teorema 5.4.3(i), la tesi. □

Dunque $\mathbb{M}_f(+,\cdot,\sqsubseteq)$ è un *campo ordinato* che, come vedremo successivamente, è isomorfo a $\mathbb{R}$, sia rispetto alle operazioni di addizione e moltiplicazione che rispetto alla relazione d'ordine. In questo modo *la struttura algebrico-ordinale* $\mathbb{M}_f(+,\cdot,\sqsubseteq)$ *risulta essere una "copia" della struttura algebrico-ordinale* $\mathbb{R}(+,\cdot,\leq)$. Ciò significa anche che $\mathbb{M}_f(+,\cdot,\sqsubseteq)$ è non solo un campo ordinato, ma anche completo e archimedeo. Questo importantissimo risultato consegue dal seguente fondamentale teorema che fornisce una caratterizzazione infinitesimale della completezza dei numeri reali.

Teorema 5.5.3. *Sono equivalenti le proposizioni:*

(i) Ogni numero $\star$-reale finito è *infinitamente prossimo a qualche numero reale;*

(ii) Il campo dei numeri reali è completo.

Dimostrazione. [9] La dimostrazione fa riferimento alla versione della completezza data dal principio dell'estremo superiore (vedi nota 2).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sia $\emptyset \neq T \subset \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ un suo maggiorante. Allora, per PdT e il Teorema 3.6.5(v), b è anche maggiorante in ${}^\star\mathbb{R}$ di ${}^\star T$. Ciò osservato, procediamo per passi.

1. Considerato, per ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}^+$, l'insieme:

$$T^{(n)} = \{z \in \mathbb{Z} \,|\, z/n \,\text{maggiorante di}\, T\},$$

ove $\mathbb{Z}$ è l'insieme degli interi relativi, proviamo intanto che non è vuoto; esiste infatti, per la proprietà archimedea, $z \in \mathbb{Z}$ tale che $b\,n < z$ e quindi $b < z/n$. Inoltre, dati i numeri naturali $1 \leq n \leq m$, risulta $z/m \leq z/n \leq z$ e quindi $T^{(m)} \subset T^{(n)} \subset T^{(1)} = \{z \in \mathbb{Z} \,|\, z \,\text{maggiorante di}\, T\}$; conseguentemente $\min T^{(1)} \leq \min T^{(n)} \leq \min T^{(m)}$. Infine, per quanto riguarda la $\star$-successione $({}^\star T^{(\nu)})_{\nu \geq 1}$, sussiste la proposizione:

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\, \forall z \in \mathbb{Z}\, (z \in T^{(\nu)} \Leftrightarrow z/\nu \,\text{maggiorante di}\, T).$$

Considerata allora la corrispondente semiformalizzazione:

$$\forall \nu \in \mathbb{N}^+\, \forall z \in \mathbb{Z}\, (z \in T(\nu) \Leftrightarrow \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}\, (y_1 = 1/\nu \,\text{e}\, y_2 = z \cdot y_1 \\ \Rightarrow y_2 \,\text{maggiorante di}\, T)),$$

otteniamo, per PdT e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.4(xv), 3.6.5(v) e 3.6.7(ii),(v),

$$\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}^+\, \forall z \in {}^\star\mathbb{Z}\, (z \in ({}^\star T)(\nu) \Leftrightarrow \forall y_1, y_2 \in {}^\star\mathbb{R}\, (y_1 = 1/\nu \,\text{e}\, y_2 = z \cdot y_1 \\ \Rightarrow y_2 \,\text{maggiorante di}\, {}^\star T))$$

e quindi

$${}^\star T^{(\nu)} = \{z \in {}^\star\mathbb{Z} \,|\, z/\nu \,\text{maggiorante di}\, {}^\star T\} \quad (\nu \in {}^\star\mathbb{N}^+). \tag{5.3}$$

2. La funzione $f : \mathbb{N}^+ \mapsto \mathbb{Z}$ così definita:

$$f(n) = \min T^{(n)}$$

[9]Essendo la dimostrazione alquanto complessa, la si può trascurare in una prima lettura.

risulta, per **1.**, non decrescente; inoltre, per definizione, $f(n)$ è il minimo elemento $z \in \mathbb{Z}$ tale che z/n è un maggiorante di T.

Pertanto, la sua trasformata $^\star f$ è un'applicazione di $^\star\mathbb{N}^+$ in $^\star\mathbb{Z}$ non decrescente (PdT e Teoremi 2.4.3(v), 3.6.6(iv)). Inoltre, $(^\star f)(\nu)$ è il minimo elemento $z \in {}^\star\mathbb{Z}$ tale che z/ν è un maggiorante di $^\star T$. Infatti, considerata la semiformalizzazione della frase "$\forall \nu \in \mathbb{N}\,(f(\nu)$ minimo di $T^{(\nu)})$":

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{Z}\,(y = f(\nu) \Rightarrow y \text{ minimo di } T^{(\nu)}),$$

otteniamo, per i Teoremi 3.6.4(xv) e 3.6.5(iv),

$$\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall y \in {}^\star\mathbb{Z}\,(y = (^\star f)(\nu) \Rightarrow y \text{ minimo di} {}^\star T^{(\nu)})$$

e quindi, per (5.3), quanto dichiarato.

Nel seguito della dimostrazione, non essendoci motivi di ambiguità, indichiamo, come ormai usuale, l'estensione $^\star f$ della funzione f con la medesima notazione; cioè poniamo $^\star f = f$.

3. Per ogni $\star$-naturale $\nu \geq 1$ esiste $t \in {}^\star T$ tale che $(f(\nu) - 1)/\nu < t$. Infatti, considerata la semiformalizzazione del metapredicato "esiste $t \in T$ tale che $(f(x) - 1)/x < t$":

$$\begin{aligned} X(x) : \exists t \in T\, \forall y, y_1 \in \mathbb{Z}\, \forall y_2, y_3 \in \mathbb{R}\,(y = f(x)\,\text{e}\, y_1 = y - 1 \\ \text{e } y_2 = 1/x \text{ e}\, y_3 = y_1 y_2 \Rightarrow y_3 < t) \end{aligned}$$

otteniamo, tramite i teoremi 3.6.1(iii), 3.6.4(xv), 3.6.6(v) e 3.6.7(ii),(v),

$$\begin{aligned} \star\text{-}X(x) : \exists t \in {}^\star T\, \forall y, y_1 \in {}^\star\mathbb{Z}\, \forall y_2, y_3 \in {}^\star\mathbb{R}\,(y = {}^\star(f)(x)\,\text{e}\, y_1 = y - 1 \\ \text{e } y_2 = 1/x \text{ e}\, y_3 = y_1 y_2 \Rightarrow y_3 < t)\,\text{e } x \text{ interna} \end{aligned}$$

e quindi, per il Teorema 3.3.2, $\forall \nu \in \mathbb{N}^+ X(\nu) \Leftrightarrow \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}^+ \star\text{-}X(\nu)$. Ora, l'enunciato $\forall \nu \in \mathbb{N}^+ X(\nu)$ è valido in $\mathbb{R}$; infatti, dalla $f(n) = \min T^{(n)}$ otteniamo $f(n) - 1 \notin T^{(n)}$ e quindi $(f(n) - 1)/n$ non è un maggiorante di T, cioè, esiste $t \in T$ tale che $(f(n) - 1)/n < t$. Possiamo dunque concludere la validità in $^\star\mathbb{R}$ della proposizione in oggetto.

Ciò osservato, fissiamo un naturale infinito ω. Allora, per **2.**, $f(\omega) \geq f(n)$ per ogni naturale positivo; inoltre, $f(\omega)$ è il minimo elemento z di $^\star\mathbb{Z}$ tale che z/ω è un maggiorante per $^\star T$.

4. $f(\omega)/\omega \in {}^\star\mathbb{R}_f$. A tal fine sia, per assurdo, $f(\omega)/\omega$ infinito. Allora, $f(\omega)$ infinito (in caso contrario $f(\omega)/\omega$ sarebbe infinitesimo); inoltre, $f(\omega) > 0$ (in caso contrario, dalla $f(1) \leq f(\omega)$ risulterebbe $f(1)$ infinito negativo e quindi non sarebbe un maggiorante di $^\star T$).

Ora, per **3.**, esiste $t_0 \in {}^\star T$ tale che $(f(\omega)-1)/\omega < t_0$. Poichè $(f(\omega)-1)/\omega = f(\omega)/\omega - 1/\omega$ è un infinito positivo (in quanto differenza di un infinito positivo e di un infinitesimo (Teorema 5.2.3)), lo è anche t_0. Perveniamo così alla contraddizione $t_0 \leq b < t_0$, ricordato che b è un maggiorante di ${}^\star T$ (come osservato all'inizio della dimostrazione).

A questo punto indichiamo con r il numero reale infinitamente prossimo a $f(\omega)/\omega$ (esistente per (i)).
5. r è un maggiorante di T. Esista, per assurdo, $t \in T$ tale che $r < t$. Allora, $r \not\approx t$ (entrambi sono reali) e quindi, per il Teorema 5.4.3(i), otteniamo la contraddizione $f(\omega)/\omega < t \in {}^\star T$
6. $r = \sup T$. A tal fine, per **5.**, basta verificare che, dato il numero reale $\delta > 0$ reale, esiste $t \in T$ tale che $r - \delta < t$. Per **3.**, esiste $t_0 \in {}^\star T$ tale che $(f(\omega)-1))/\omega < t_0$ e quindi, notato che $\delta > 1/\omega$, si ha $f(\omega)/\omega - \delta < f(\omega)/\omega - 1/\omega < t_0$. Dunque

$$\frac{f(\omega)}{\omega} - \delta < t_0 < t_0 + 1. \tag{5.4}$$

Prima di procedere, notiamo che, per il Lemma 5.5.1, risulta $r - \delta \approx f(\omega)/\omega - \delta$.

Ciò osservato, sia $f(\omega)/\omega - \delta \not\approx t_0$. Ne segue, per il Teorema 6.4.3, $r - \delta < t_0$ e quindi $r - \delta < t_0 + 1$. Sia infine $f(\omega)/\omega - \delta \approx t_0$. Osservato che $t_0 \not\approx t_0 + 1$, otteniamo, sempre per il medesimo teorema, $r - \delta < t_0 + 1$. Dunque, in ogni caso, si ha $r - \delta < t_0 + 1$. Pertanto, sussiste la frase $\exists t \in {}^\star T\,(r - \delta < t)$ e quindi sussiste, mediante PdT e il Teorema 3.6.6(v), anche la proposizione $\exists t \in T\,(r - \delta < t)$. Ne segue quanto dichiarato.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sia $b \in {}^\star\mathbb{R}_f$. Allora, l'insieme $T = \{r \in \mathbb{R} \,|\, r < b\}$ è, per il Teorema 5.2.1(i), non vuoto e superiormente limitato e quindi ammette estremo superiore c. Al fine di provare che c è infinitamente prossimo a b, consideriamo un numero reale $r > 0$. Ovviamente $b \leq c + r$; inoltre $c - r < b$ (se così non fosse, risulterebbe $b \leq c - r$ da cui la contraddizione $b < c$). Dunque, $|b - c| \leq r$ per ogni reale $r > 0$ e quindi $c \approx b$. □

Associando ora ad ogni monade di un numero $\star$-reale finito quell'unico numero reale in essa contenuto [10], nasce tra $\mathbb{M}_f$ e $\mathbb{R}$ un'applicazione biunivoca che conserva le operazioni di addizione e di moltiplicazione e l'ordine, ovvero il preannunciato isomorfismo tra il campo ordinato $\mathbb{M}_f(+,\,\cdot,\sqsubseteq)$ e quello dei reali. Tutte le dimostrazioni sono molto semplici. A titolo d'esempio ci limitiamo a mostrare che detta applicazione conserva l'addizione. Prese le monadi $\mu(b_1)$, $\mu(b_2)$ dei numeri finiti b_1, b_2, indichiamo con r_1, r_2 i numeri

[10] L'unicità è ovvia appena si osservi che due numeri reali distinti hanno distanza non infinitesima.

reali tali che $r_1 \in \mu(b_1)$ e $r_2 \in \mu(b_2)$. Il risultato desiderato segue allora dalla $\mu(b_1) + \mu(b_2) = \mu(r_1) + \mu(r_2) = \mu(r_1 + r_2)$.

Torna naturale, a questo punto, introdurre l'applicazione st : ${}^\star\mathbb{R}_f \mapsto \mathbb{R}$ (chiamata **funzione parte standard**), che associa ad ogni numero finito l'unico numero reale ad esso infinitamente vicino. La controimagine di un numero reale secondo questa applicazione è costituita dalla monade da esso individuata. In questa visione, ${}^\star\mathbb{R}_f$ appare ottenuto a partire dai numeri reali mediante una "disgregazione" di ogni numero reale in una infinità di nuovi numeri ad esso infinitamente prossimi. Visualizzando i numeri reali, com'è usuale, con i punti di una retta, i nuovi elementi diventano "punti" che possiamo immaginare vengano collocati attorno ad ogni punto preesistente, senza però provocare alcun "stiramento" della retta. Ciò è suggerito dal fatto che i punti che si inseriscono attorno al "vecchio" punto devono collocarsi a distanza infinitesima da questo. Inoltre, essi non devono invadere "spazi" di pertinenza di altri punti. Quest'ultima circostanza è suggerita, invece, dal fatto che se r_1 precede r_2, allora ogni $b_1 \in \mu(r_1)$ precede ogni $b_2 \in \mu(r_2)$ (Teorema 5.4.3(i)).

Ora, volendo darci anche un'immagine di ${}^\star\mathbb{R}$, possiamo pensarlo costituito da un insieme, totalmente ordinato, di rette "ampliate" (nel modo appena descritto), ciascuna corrispondente a una galassia.[11]

Tornando alla funzione parte standard, concludiamo la sezione elencandone alcune utili proprietà, facilmente intuibili e di semplice dimostrazione (tenendo presente il Teorema 5.4.3(i)), che lasciamo al lettore come esercizio.

Teorema 5.5.4. *Siano b, b_1, b_2 finiti. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) $\mathrm{st}(b_1) = \mathrm{st}(b_2) \Leftrightarrow b_1 \approx b_2$;

(ii) $r \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{st}(r) = r$;

[11] Nel testo *Elementary Calculus. An infinitesimal approach* (2012), dedicato agli studenti dei primi anni universitari, Keisler usa, nel tentativo di descrivere la complessa struttura dei numeri $\star$-reali, alcuni strumenti ottici immaginari. Il primo è l'*infinitesimal microscope* che, posizionato su un numero finito, permette di "vedere" una parte della struttura rettilinea della sua monade. Il secondo è l'*infinite telescope* che consente di "puntare" su un numero infinito e di "vedere" una parte della struttura lineare della sua galassia. Questi strumenti vengono, poi, adoperati per illustrare graficamente sia il "triangolo caratteristico" di Pascal-Leibniz nello studio della derivata, che i limiti infiniti.

Questa linea espositiva, è stata poi seguita anche nei vari convegni dedicati all'insegnamento nonstandard dell'analisi reale nelle scuole superiori, come di può constatare consultando, ad esempio, gli atti del convegno *Nona giornata nazionale di Analisi Nonstandard nelle scuole superiori*, Verona (2020).

(iii) $\mathrm{st}(b) = 0 \Leftrightarrow b$ *infinitesimo;*

(iv) $\mathrm{st}(-b) = -\mathrm{st}(b)$*;*

(v) $\mathrm{st}(b_1 \pm b_2) = \mathrm{st}(b_1) \pm \mathrm{st}(b_2)$*;*

(vi) $\mathrm{st}(b_1\, b_2) = \mathrm{st}(b_1)\, \mathrm{st}(b_2)$*;*

(vii) b *apprezzabile* $\Rightarrow\ \mathrm{st}(1/b) = 1/\mathrm{st}(b)$*;*

(viii) $\mathrm{st}(|b|) = |\mathrm{st}(b)|$*;*

(ix) $b_1 \leq b_2 \Rightarrow \mathrm{st}(b_1) \leq \mathrm{st}(b_2)$.

5.6 Ordini di grandezza degli ⋆-reali

Nelle sezioni precedenti abbiamo introdotto le nozioni di galassia e di monade valendoci di due opportune partizioni dei numeri ⋆-reali, che abbiamo ottenuto mediante due relazioni di equivalenza entrambe basate sulla operazione di sottrazione. Nei due casi infatti, ai fini dell'equivalenza, i numeri ⋆-reali sono stati messi a due a due a confronto esaminando le loro differenze.

In questa sezione introduciamo invece l'interessante nozione di ordine di grandezza usando l'operazione di divisione, considerando, cioè, dello stesso ordine di grandezza due numeri ⋆-reali non nulli quando il loro rapporto risulta apprezzabile.

Procedendo in termini rigorosi, cominciamo col considerare nell'insieme degli ⋆-reali la seguente relazione binaria $\eqsim$ che esprime quanto sopra in forma moltiplicativa, estendendo in tal modo la definizione anche allo zero:

$$b_1 \eqsim b_2 \Leftrightarrow b_1 = \gamma\, b_2 \text{ per qualche } \gamma \text{ apprezzabile},$$

che risulta un'equivalenza. Infatti, dati $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in {}^\star\mathbb{R}_a$ e $b, b_1, b_2, b_3 \in {}^\star\mathbb{R}$, la proprietà riflessiva segue dalla $b = 1 \cdot b$; la simmetrica dalla $b_1 = \gamma b_2 \Rightarrow b_2 = (1/\gamma) b_1$ ($1/\gamma$ apprezzabile); la transitiva dalla $b_1 = \gamma_1 b_2$ e $b_2 = \gamma_2 b_3 \Rightarrow b_1 = (\gamma_1\gamma_2) b_3$ ($\gamma_1 \cdot \gamma_2$ apprezzabile).

La classe di equivalenza $\mathrm{Og}(b) = b/\eqsim$ viene chiamata **ordine di grandezza** di b. Talvolta, diremo anche che b ha ordine di grandezza $\mathrm{Og}(b)$.

Evidentemente, gli elementi della classe $\mathrm{Og}(b)$ si ottengono tutti e soli moltiplicando b per tutti i numeri apprezzabili, cioè $\mathrm{Og}(b) = b \cdot {}^\star\mathbb{R}_a$. Questa rappresentazione di $\mathrm{Og}(b)$ permette di trarre alcune semplici ma interessanti conseguenze.

La prima è che $\mathrm{Og}(b) = \mathrm{Og}(-b)$, come segue dalla $b \cdot {}^\star\mathbb{R}_a = -b \cdot {}^\star\mathbb{R}_a$. Pertanto gli ordini di grandezza sono *insiemi simmetrici* rispetto l'origine.

La seconda si ottiene ponendo $b = 0$. Ne segue $\mathrm{Og}(0) = \{0\}$ e quindi lo zero costituisce da solo una classe di equivalenza. Ogni numero $\star$-reale non nullo ha dunque ordine di grandezza diverso da quello dello zero.

La terza riguarda la cardinalità di $\mathrm{Og}(b)$ ($b \neq 0$). In questo caso, $\mathrm{Og}(b)$ ha infiniti elementi, tanti quanti sono i numeri apprezzabili.

Una quarta conseguenza si ottiene ponendo $b = 1$. Si trae allora $\mathrm{Og}(1) = {}^\star\mathbb{R}_a$ e quindi questo ordine di grandezza è costituito dai numeri apprezzabili. In particolare, dunque, hanno lo stesso ordine di grandezza i numeri reali non nulli, in quanto sono un sottoinsieme dei numeri apprezzabili.

Inoltre, l'uguaglianza $\mathrm{Og}(1) = {}^\star\mathbb{R}_a$ consente di esprimere tutti gli ordini di grandezza in modo omogeneo mediante la relazione $\mathrm{Og}(b) = b \cdot \mathrm{Og}(1)$. Questa notazione sostituisce nel seguito la più onerosa $\mathrm{Og}(b) = b \cdot {}^\star\mathbb{R}_a$.

L'analisi sin qui condotta ha messo in evidenza che gli ordini di grandezza collegati con i numeri reali sono soltanto due: $\mathrm{Og}(0) = \{0\}$ e $\mathrm{Og}(1) = {}^\star\mathbb{R}_a$. L'ultimo ordine di grandezza contiene, oltre i numeri reali, anche tutti i numeri apprezzabili. Resta quindi ancora da vedere dove si collocano i numeri infinitesimi e i numeri infiniti. Intanto, in proposito, si ha che gli ordini di grandezza di numeri infinitesimi sono costiuiti solo da infinitesimi e quelli di numeri infiniti solo da infiniti. Sussiste infatti il risultato seguente che riassume tutte le possibili situazioni.

Teorema 5.6.1. *Risulta* $\mathrm{Og}(\epsilon) \subset \mu(0)$, $\mathrm{Og}(1) = {}^\star\mathbb{R}_a$ *e* $\mathrm{Og}(\omega) \subset {}^\star\mathbb{R}_{nf}$.

Dimostrazione. Le due relazioni d'inclusione, eccetto la centrale già vista, si deducono facilmente dalle uguaglianze $\mathrm{Og}(\epsilon) = \epsilon \cdot \mathrm{Og}(1)$ e $\mathrm{Og}(\omega) = \omega \cdot \mathrm{Og}(1)$. □

Ciò premesso, iniziamo ad analizzare la struttura dell'ordine di grandezza di un numero infinito. Si ha intanto che la galassia $\mathrm{Ga}(\omega)$ è inclusa in $\mathrm{Og}(\omega)$. Basta ricordare per questo che $\mathrm{Ga}(\omega) = \omega + {}^\star\mathbb{R}_f$ e che, qualunque sia $c \in {}^\star\mathbb{R}_f$, riesce $(\omega + c)/\omega = 1 + \epsilon \in {}^\star\mathbb{R}_a$. Osservato, poi, che $\mathrm{Og}(\gamma\omega) = \mathrm{Og}(\omega)$ se e solo se γ è apprezzabile, possiamo concludere che $\mathrm{Og}(\omega)$ include tutte e sole le galassie del tipo $\mathrm{Ga}(\gamma\,\omega)$ con $\gamma \in \mathrm{Og}(1)$. Pertanto, $\mathrm{Og}(\omega) = \bigcup_{\gamma \in \mathrm{Og}(1)} \mathrm{Ga}(\gamma\,\omega)$. L'ordine $\mathrm{Og}(\omega)$ è dunque un'unione di galassie il cui numero non è inferiore al continuo, come segue dal fatto che, se $r_1 \neq r_2$

sono numeri reali non nulli, riesce $\mathrm{Ga}(r_1\,\omega) \neq \mathrm{Ga}(r_2\,\omega)$. Quanto visto permette anche di concludere che delle tre relazioni $\sim$, $\approx$, $\doteqdot$, la relazione $\doteqdot$ è la meno fine su ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$ (segue poi la $\sim$ e quindi la $\approx$).

Passando ora all'esame degli ordini di grandezza relativi ai numeri infinitesimi non nulli, sia $\epsilon \neq 0$ e $\omega = 1/\epsilon$. È facile allora constatare che gli elementi di $\mathrm{Og}(\epsilon)$ sono tutti e soli i reciproci degli elementi di $\mathrm{Og}(\omega)$. Gli ordini di grandezza degli infiniti e quelli degli infinitesimi si possono dunque porre in corrispondenza biunivoca (e quindi sono ugualmente numerosi). Gli infinitesimi non nulli vengono quindi ripartiti dall'equivalenza $\doteqdot$ in numerosi ordini di grandezza, mentre tale insieme non subisce alcuna ripartizione per effetto delle equivalenze $\sim$ e $\approx$, in base alle quali, anzi, viene ad essere un sottoinsieme di una classe di equivalenza (della galassia $\mathrm{Ga}({}^\star\mathbb{R}_f)$ e della monade $\mu(0)$, rispettivamente). L'equivalenza $\doteqdot$, la meno fine sugli infiniti, riesce dunque la più fine sugli infinitesimi.

In analogia a quanto già fatto per le galassie e le monadi, proviamo ora il teorema seguente che riguarda proprietà strutturali degli ordini di grandezza singolarmente presi.

Teorema 5.6.2. *Fatta eccezione per* $\mathrm{Og}(0) = \{0\}$*, tutti gli altri ordini di grandezza sono insiemi limitati, privi di entrambi gli estremi ed esterni.*

Dimostrazione. Poichè gli ordini diversi da $\mathrm{Og}(0)$ sono simmetrici rispetto allo zero è lecito indicare il generico di tali ordini con $\mathrm{Og}(b)$ supponendo $b > 0$.

Ciò osservato, proviamo intanto la sua limitatezza. Sia $\omega > 0$. Qualunque sia γ apprezzabile, cioè $\gamma \in \mathrm{Og}(1)$, si ha $-\omega < \gamma < \omega$ e quindi $-\omega\, b < \gamma\, b < \omega\, b$. Perciò $\mathrm{Og}(b) = b\,\mathrm{Og}(1)$ è limitato.

Proviamo ora che $\mathrm{Og}(b)$ non ha estremi. Per assurdo sia $b_1 = \sup \mathrm{Og}(b)$. Riesce ovviamente $b_1 > 0$. Inoltre da $b > 0$ segue che esiste uno $\star$-reale $b' > 0$ tale che $b'\,b = b_1$. Ora b' non può essere né infinitesimo, perchè allora $b' < 1$ e quindi $b_1 = b'\,b < b \leq b_1$ (assurdo!); né apprezzabile, perchè allora $b_1 < 2b_1 = (2b')b \leq b_1$ (assurdo!); né infinito, perchè allora $(b'/2)b = b_1/2 < b_1$ è una limitazione superiore di $\mathrm{Og}(b)$, essendo $\gamma b < (b'/2)b < b'\,b = b_1$ per ogni $\gamma \in \mathrm{Og}(1)$ (assurdo!).

La non esistenza dell'estremo inferiore si prova in modo analogo.

Per quanto riguarda infine l'esternalità di $\mathrm{Og}(b)$ la si prova in modo analogo a quella fatta per le galassie (Teorema 5.3.1). $\square$

Il teorema appena provato differisce dagli analoghi teoremi 5.3.1 e 5.4.2 perchè non vi è affermato che gli ordini di grandezza sono insiemi convessi. Abbiamo infatti notato, all'inizio della dimostrazione, che gli ordini diversi da $\mathrm{Og}(0)$ contengono sia numeri positivi che negativi. Poichè non contengono lo zero non possono allora essere convessi. Essi, come si può facilmente provare, sono però *positivamente* e *negativamente* convessi; sono, cioè, unione di due insiemi convessi, uno di numeri positivi e l'altro di numeri negativi, simmetrici l'un l'altro rispetto l'origine.

Passiamo ora ad esaminare globalmente gli ordini di grandezza, introducendo nel loro insieme $\mathbb{O} = {}^\star\mathbb{R}/\doteqdot$ sia la relazione d'ordine stretto:
– $\mathrm{Og}_1 \prec \mathrm{Og}_2$ se e solo se il *valore assoluto* di *ogni* elemento di Og_1 precede secondo $<$ il *valore assoluto* di *ogni* elemento di Og_2,
che l'associata relazione d'ordine: $\mathrm{Og}_1 \preceq \mathrm{Og}_2 \Leftrightarrow \mathrm{Og}_1 = \mathrm{Og}_2$ o $\mathrm{Og}_1 \prec \mathrm{Og}_2$.

Il prossimo teorema fornisce alcune proprietà dell'ordinamento ora introdotto; in particolare, per la proposizione (i), $\mathrm{Og}(\epsilon) \prec \mathrm{Og}(b) \prec \mathrm{Og}(\omega)$, per ogni b apprezzabile.

Teorema 5.6.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(b_2) \Leftrightarrow b_2 \neq 0$ *e esiste* ϵ *tale che* $b_1 = \epsilon\, b_2$*;*

(ii) L'ordinamento $\preceq$ *è totale;*

(iii) L'insieme ordinato $\mathbb{O}(\preceq)$ *è denso e non completo;*

(iv) $\mathrm{Og}(0)$ è *minimo e non esiste massimo.*

Dimostrazione. (i) Sia intanto $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(b_2)$. Allora $|b_1| < |b_2|$ e quindi $b_2 \neq 0$. Inoltre, posto $b = |b_1/b_2|$, riesce $0 \leq b < 1$. Ora, poichè $b_1 \neq b_2$, il rapporto b_1/b_2 non può essere apprezzabile e pertanto b è infinitesimo. Allora, $|b_1| = \epsilon\,|b_2|$ da cui segue facilmente la tesi.

Sia ora $b_1 = \epsilon\, b_2$ e $b_2 \neq 0$. Siano $b_1' \doteqdot b_1$ e $b_2' \doteqdot b_2$. Esistono allora γ_1, γ_2 apprezzabili tali che $b_1' = \gamma_1 b_1$ e $b_2' = \gamma_2 b_2$. Ne segue, per il Teorema 5.2.3, $|b_2'| - |b_1'| = |\gamma_2 b_2| - |\gamma_1 \epsilon\, b_1| = (|\gamma_2| - |\gamma_1 \epsilon|)|b_2| > 0$ ($b_2 \neq 0$) e quindi $|b_1'| < |b_2'|$. Ne segue la tesi.

(ii) Sia $\mathrm{Og}(b_1) \neq \mathrm{Og}(b_2)$. Allora, $|b_1| \neq |b_2|$. È lecito allora supporre $|b_1| < |b_2|$. Quindi $b_2 \neq 0$ ed esiste b tale che $|b_1| = b\,|b_2|$ con $0 \leq b < 1$. Non può essere b apprezzabile e quindi $b \in \mu(0)$. Per (i), si ha allora $\mathrm{Og}(b_1) \preceq \mathrm{Og}(b_2)$.

(iii) Verifichiamo la densità. Sia $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(b_2)$ e quindi, per (i), $|b_1| = \epsilon\,|b_2|$ e $|b_2| > 0$. Sia intanto $\epsilon = 0$. Allora, dato $\epsilon' > 0$, otteniamo $0 = 0 \cdot \epsilon'$ e $\epsilon' = (\epsilon'/b_2)b_2$ da cui, per (i), $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(\epsilon') \prec \mathrm{Og}(b_2)$.

Sia ora $\epsilon > 0$. Allora, $|b_1| > 0$. Posto $b = |b_1 b_2|^{1/2}$, risulta $b = |\epsilon\,(b_2)^2|^{1/2} = \epsilon^{1/2}|b_2| > 0$; inoltre, $|b_1| = \epsilon\,|b_2| = \epsilon^{1/2}(\epsilon^{1/2}|b_2|) = \epsilon^{1/2} b$. Dunque $|b_1| = \epsilon^{1/2} b$ e $b = \epsilon^{1/2}|b_2|$. Essendo $\epsilon^{1/2}$ infinitesimo (Lemma 8.1.8), per (i), si ha $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(b) \prec \mathrm{Og}(b_2)$.

Ora, per provare la non completezza, facciamo ricorso alle proprietà della funzione esponenziale $^\star\exp$, riportate nel quinto paragrafo della Sezione 7.2, e al Lemma 8.1.8.

A tal fine poniamo $T = \{\mathrm{Og}(\epsilon^n) \,|\, n \in \mathbb{N}\,\mathrm{e}\,\epsilon > 0\}$. Sia ora $\omega > 0$. Per ogni n risulta $\epsilon^\omega = \epsilon^{\omega-n}\epsilon^n$. Essendo $\omega - n > 0$ infinito, riesce $\epsilon^{\omega-n} \in \mu(0)$ e quindi $\mathrm{Og}(\epsilon^\omega) \prec \mathrm{Og}(\epsilon^n)$. Pertanto $\mathrm{Og}(\epsilon^\omega)$ è una limitazione inferiore di T e inoltre $\epsilon^\omega > 0$ infinitesimo.

Ciò premesso, sia per assurdo, $\mathrm{Og}(b) = \inf T$. Allora, per ogni n, $\mathrm{Og}(\epsilon^\omega) \preceq \mathrm{Og}(b) \preceq \mathrm{Og}(\epsilon^n)$. Ne segue b infinitesimo non nullo. Infatti, se $\mathrm{Og}(\epsilon^\omega) = \mathrm{Og}(b)$, esiste allora $\gamma \in {}^\star\mathbb{R}_a$ tale che $0 < \epsilon^\omega = \gamma\, b$ e quindi la tesi. Se, invece, $\mathrm{Og}(\epsilon^n) = \mathrm{Og}(b)$, allora esiste $\gamma \in {}^\star\mathbb{R}_a$ tale che $0 < \epsilon^n = \gamma\, b$ e quindi la tesi. Sia infine $\mathrm{Og}(\epsilon^\omega) \prec \mathrm{Og}(b) \prec \mathrm{Og}(\epsilon^n)$. Allora, per (i), $b \neq 0$ (dalla prima disuguaglianza) ed esiste un infinitesimo ϵ' tali che $b = \epsilon'\,\epsilon^n$ (dalla seconda disuguaglianza) e quindi la tesi.

Allora, $|b| = |b|^{1/2}|b|^{1/2}$ con $|b|^{1/2}$ infinitesimo non nullo e quindi, per (i), $\mathrm{Og}(b) \prec \mathrm{Og}(|b|^{1/2})$. Esiste allora n tale che $\mathrm{Og}(\epsilon^n) \prec \mathrm{Og}(|b|^{1/2})$ e quindi $\epsilon^n < |b|^{1/2}$, ovvero $\epsilon^{2n} < |b|$. Ne segue, per (i), $\mathrm{Og}(\epsilon^{2n}) \prec \mathrm{Og}(b)$; ma, per l'ipotesi assurda, $\mathrm{Og}(b) \preceq \mathrm{Og}(\epsilon^{2n})$ da cui la contraddizione $\mathrm{Og}(\epsilon^{2n}) \prec \mathrm{Og}(\epsilon^{2n})$.

(iv) $\mathrm{Og}(0)$ è l'elemento minimo. Infatti, dalla $0 = 0 \cdot b$ per ogni b $\star$-reale e (i), otteniamo $\mathrm{Og}(0) \preceq \mathrm{Og}(b)$. Concludiamo provando che $\preceq$ non ha massimo. Basta verificare che ogni ordine di grandezza $\mathrm{Og}(b)$ ammette seguente. Per $b = 0$ la tesi è ovvia. Supposto allora $b \neq 0$ e considerato $b_1 = \omega\, b$, otteniamo $b = (1/\omega)b_1$ con $b_1 \neq 0$ e quindi, per (i), la tesi. □

Il prossimo risultato fornisce due proprietà dell'ordine di grandezza relativo alla somma di due numeri $\star$-reali.

Teorema 5.6.4. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\mathrm{Og}(b_1) = \mathrm{Og}(b_2) \Rightarrow \mathrm{Og}(b_1 + b_2) \preceq \mathrm{Og}(b_2)$*;*

(ii) Principio di sostituzione degli ordini di grandezza: $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(b_2) \Rightarrow \mathrm{Og}(b_1 + b_2) = \mathrm{Og}(b_2)$.

Dimostrazione. (i) Da $\mathrm{Og}(b_1) = \mathrm{Og}(b_2)$ otteniamo $b_1 = \gamma b_2$ con γ apprezzabile. Allora, $b_1 + b_2 = (\gamma + 1)b_2$ con $\gamma + 1$ finito. Se $\gamma + 1$ è apprezzabile, allora $\mathrm{Og}(b_1 + b_2) = \mathrm{Og}(b_2)$. Sia infine $\gamma + 1$ infinitesimo. Se $b_2 \neq 0$ riesce, per il Teorema 5.6.3(i), $\mathrm{Og}(b_1 + b_2) \prec \mathrm{Og}(b_2)$. Se invece $b_2 = 0$ si ha $b_1 = 0$ e quindi $\mathrm{Og}(b_1 + b_2) \preceq \mathrm{Og}(b_2)$

(ii) Da $\mathrm{Og}(b_1) \prec \mathrm{Og}(b_2)$ otteniamo, ancora per il Teorema 5.6.3(i), $b_1 = \epsilon\, b_2$ con $b_2 \neq 0$. Allora, $b_1 + b_2 = (\epsilon + 1)b_2$, con $\epsilon + 1$ apprezzabile e quindi la tesi. □

A questo punto, mediante il teorema appena provato, è facile verificare che *l'ordine di grandezza della somma di un numero finito di numeri $\star$-reali è in generale minore o uguale al massimo ordine degli addendi.* In particolare, sussiste senz'altro l'uguaglianza se esiste un solo addendo di ordine massimo.

Osserviamo ancora che per il Teorema 5.6.4(i), l'addizione non è compatibile con l'equivalenza $\doteqdot$; basta notare, per questo, che, se $b_2 = -b_1$, risulta $\mathrm{Og}(b_1 + b_2) = \mathrm{Og}(0)$, mentre, se $b_2 = b_1$, si ha $\mathrm{Og}(b_1 + b_2) = \mathrm{Og}(b_1)$. Non si può quindi introdurre un'operazione di addizione tra ordini di grandezza collegata con l'addizione nei numeri $\star$-reali.

Ciò non accade invece per la moltiplicazione in ${}^\star\mathbb{R}$. Essa riesce compatibile con la relazione di equivalenza $\doteqdot$. Si ha cioè:

$$\mathrm{Og}(b_1) = \mathrm{Og}(b'_1) \text{ e } \mathrm{Og}(b_2) = \mathrm{Og}(b'_2) \Rightarrow \mathrm{Og}(b_1 b_2) = \mathrm{Og}(b'_1 b'_2).$$

Infatti, dall'ipotesi, tramite il Teorema 5.6.1, otteniamo $b'_1 = \gamma b_1$ e $b'_2 = \gamma_2 b_2$ con γ_1, $\gamma_2 \in \mathrm{Og}(1)$ e quindi $\gamma_1\gamma_2 \in \mathrm{Og}(1)$. Tenuto allora conto della $b'_1 b'_2 = (\gamma_1\gamma_2) b_1 b_2$ si ha la tesi.

È dunque possibile introdurre in $\mathbb{O}$, in modo usuale, un'operazione di moltiplicazione ponendo: $\mathrm{Og}(b_1) \cdot \mathrm{Og}(b_2) = \mathrm{Og}(b_1 b_2)$, per ogni b_1, b_2 $\star$-reali.

Dalle proprietà della moltiplicazione negli $\star$-reali segue subito che l'operazione appena introdotta risulta commutativa, associativa e che possiede $\mathrm{Og}(1)$ come elemento neutro. Inoltre, se $b \neq 0$ si ha $\mathrm{Og}(1) = \mathrm{Og}(b(1/b)) = \mathrm{Og}(b) \cdot \mathrm{Og}(1/b)$. Ogni $\mathrm{Og}(b) \neq \mathrm{Og}(0)$ ammette, cioè, elemento reciproco $\mathrm{Og}(1/b)$, che, come usuale, indichiamo con $1/\mathrm{Og}(b)$.

In conclusione, grazie alle proprietà ora elencate, con l'operazione di moltiplicazione tra ordini di grandezza, l'insieme quoziente $\mathbb{O} \setminus \{\{0\}\}$ assume la struttura di *gruppo abeliano.*

Concludiamo la sezione provando un risultato che mette in evidenza come il ricorso agli ordini di grandezza consente di facilitare l'individuazione della parte standard di numeri finiti.

Teorema 5.6.5. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Siano b, b' numeri $\star$-reali finiti tali che $\mathrm{Og}(b') \prec \mathrm{Og}(b)$. *Allora,* $\mathrm{st}(b) = \mathrm{st}(b + b')$*;*

(ii) Siano b_1, b_2, b'_1, b'_2 numeri $\star$-reali finiti tali che $b_2, b_2 + b'_2$ apprezzabili e $\mathrm{Og}(b'_1) \prec \mathrm{Og}(b_1)$, $\mathrm{Og}(b'_2) \prec \mathrm{Og}(b_2)$. *Risulta allora:*

$$\mathrm{st}\left(\frac{b_1 + b'_1}{b_2 + b'_2}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{b_1}{b_2}\right).$$

Dimostrazione. (i) Risulta $b + b' = b(1 + b'/b)$, con b'/b infinitesimo (Teorema 5.6.3(i)) e quindi, per il Teorema 5.5.4(iii),(v),(vi), la tesi.

(ii) Per il Teorema 5.5.4(vi),(vii),

$$\mathrm{st}\left(\frac{b_1 + b'_1}{b_2 + b'_2}\right) = \frac{\mathrm{st}(b_1 + b'_1)}{\mathrm{st}(b_2 + b'_2)}$$

e quindi, tramite (i), la tesi. □

5.7 Alcuni insiemi interni ed esterni di ${}^\star\mathbb{R}$

Nel corso dell'esposizione abbiamo avuto più volte occasione di constatare la notevole differenza che passa tra il comportamento degli insiemi interni rispetto a quelli esterni. Ad esempio, ogni insieme interno non vuoto e limitato possiede certamente estremi ($\star$-completezza). Ciò non è, invece, assicurato per ogni insieme esterno, come è stato messo in luce in occasione dello studio delle galassie, delle monadi e degli ordini di grandezza. Ai fini dell'applicazione del Teorema d'isolamento interno, poi, è indispensabile che l'insieme in cui si effettua l'isolamento sia interno. Per questi motivi abbiamo ritenuto opportuno elencare qui sotto, suddivisi in interni ed esterni, gli insiemi sin qui incontrati nel corso dello studio dei numeri $\star$-reali, assieme ad altri che abbiamo aggiunto perchè interessanti per il seguito.

Sono *interni* gli insiemi:
– ${}^\star\mathbb{R}^+$ e ${}^\star\mathbb{R}^-$;
– Gli intervalli (aperti, chiusi, semiaperti) di estremi numeri $\star$-reali;
– I segmenti (chiusi, aperti, inferiori, superiori) di origine un numero $\star$-reale.

Tutti questi insiemi risultano interni perchè si possono ottenere usando il Teorema 2.5.2(vi) che non presenta, qui, difficile applicazione. Circa i primi due, osserviamo che essi sono i due segmenti aperti di origine 0, il quali, come del resto ogni segmento di origine reale, sono, più specificatamente, entità standard. Infatti, ogni segmento di numeri $\star$-reali di origine reale si può ottenere, applicando il Teorema 3.6.5(vii), come trasformato del corrispondente segmento reale. Lo stesso discorso rimane valido, naturalmente, anche per gli intervalli di estremi reali (Teorema 3.6.5(vi)).

Sono *esterni* gli insiemi:
– ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$, ${}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$ e ${}^\star\mathbb{R}^-_{nf}$;
– La generica galassia; in particolare $\mathrm{Ga}(0) = {}^\star\mathbb{R}_f$, ${}^\star\mathbb{R}^+_f$ e ${}^\star\mathbb{R}^-_f$;
– La generica monade; in particolare $\mu(0)$, $\mu^+(0)$ e $\mu^-(0)$;

– Il generico ordine di grandezza; in particolare $\mathrm{Og}(1) = {}^\star\mathbb{R}_a$, $\mathrm{Og}^+(1)$ e $\mathrm{Og}^-(1)$;
– Il generico sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ (Teorema 4.2.2(ii)).
Sappiamo già che sono esterni gli insiemi $\mathrm{Ga}(b)$, $\mu(b)$ e $\mathrm{Og}(b)$. Essendo poi $\mathrm{Ga}(0) = {}^\star\mathbb{R}_f = {}^\star\mathbb{R} \setminus {}^\star\mathbb{R}_{nf}$ e ${}^\star\mathbb{R}$ standard, si ottiene, con facile ragionamento per assurdo, che anche ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$ è esterno.

Passando agli insiemi che raccolgono separatamente $\star$-numeri negativi e $\star$-numeri positivi, cominciamo col provare che ${}^\star\mathbb{R}_f^+$ è esterno. Per assurdo, sia interno. Essendo un insieme limitato, ammette allora estremo superiore ($\star$-completezza) che risulta, ovviamente, estremo anche di ${}^\star\mathbb{R}_f$. Ma ciò è assurdo perchè in contraddizione con il Teorema 5.3.1. In modo strettamente analogo si prova poi che sono esterni tutti gli altri insiemi di questo tipo riportati nell'elenco, fatta eccezione per gli insiemi ${}^\star\mathbb{R}_{nf}^+$ e ${}^\star\mathbb{R}_{nf}^-$. Per questi ultimi la tesi si raggiunge facilmente, ancora per assurdo, appena si osservi che ${}^\star\mathbb{R}_f^+ = {}^\star\mathbb{R}^+ \setminus {}^\star\mathbb{R}_{nf}^+$ e ${}^\star\mathbb{R}_f^- = {}^\star\mathbb{R}^- \setminus {}^\star\mathbb{R}_{nf}^-$ e si ricordi che ${}^\star\mathbb{R}^+$ e ${}^\star\mathbb{R}^-$ sono interni.

Capitolo 6

Nozioni topologiche di $\mathbb{R}$

Com'è noto, molte questioni di natura topologica (ad esempio quella di limite) si basano sulla nozione di "prossimità" e trovano una loro espressione unificata in termini di intorni, anche quando questi sono intorni di tipo diverso: di un "punto" o dei simboli $\pm\infty$ e ∞.[1] Nella trattazione nonstandard questa idea di prossimità viene caratterizzata, nel caso dei punti, tramite la nozione di "infinitamente prossimo", e vedremo che ciò comporta una naturale, e molto intuitiva, versione di molte idee topologiche e quindi, di conseguenza, una, talvolta, drastica semplificazione della loro trattazione. Un analogo discorso avviene anche per gli intorni di $\pm\infty, \infty$, ove la prossimità sarà realizzata ricorrendo agli $\star$-reali infiniti.

Passiamo ora ad una breve descrizione del contenuto di questo capitolo. La prima sezione è dedicata ad un preliminare esame, in termini infinitesimali e infiniti della nozione d'intorno - sia con riferimento agli intorni *limitati* di un punto, che agli intorni *illimitati* di $\pm\infty, \infty$ - che permette poi di fornire, tramite il fondamentale teorema dell'intorno di Cauchy, una caratterizzazione nonstandard delle due usuali nozioni, sopra ricordate, di intorno.

Nella seconda, caratterizziamo, sempre in termini nonstandard, le proprietà *puntuali* (valide in ogni intorno) e quelle *locali* (valide in qualche intorno).

Nella terza, dopo un'analisi nonstandard delle nozioni topologiche di punto interno, esterno, aderente, di frontiera, di accumulazione e isolato, caratterizziamo, in termini infinitesimali, sia le nozioni di insieme aperto, chiuso,

[1] Il termine "punto" è qui usato come sinonimo di *numero reale*. In questo contesto non appare né opportuno, né utile estendere questa nomenclatura anche ai numeri $\star$-reali. Pertanto, la parola "punto" non sarà *mai* usata nel seguito per indicare un numero $\star$-reale.

Usiamo inoltre la notazione abbreviata $\pm\infty, \infty$ al posto della $-\infty$, $+\infty, \infty$.

limitato, come pure quella di chiusura di un insieme. Inoltre, riportiamo anche il celebre criterio di compattezza di Robinson, punto di riferimento nei problemi inerenti i sottoinsiemi compatti della retta reale.

Infine, nella quarta, allo scopo di mostrare come possano essere utilizzate in fase dimostrativa le precedenti caratterizzazioni, forniamo dimostrazioni nonstandard dei celebri teoremi di Bolzano-Weierstrass, Cantor e Heine-Pincherle-Borel (di quest'ultimo riportando anche la prova classica per confrontarla con quella nonstandard).

6.1 Intorni e loro $\star$-trasformate

Il significato da attribuire alla parola "intorno" può avere, com'è noto, un'accezione più o meno ampia. In questa esposizione usiamo l'accezione più ristretta, che per la sua semplicità risulta operativamente la più economica. Posto $\rho \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty, \infty\}$, chiamiamo **intorno** (**di base**) di ρ in $\mathbb{R}$ ogni:
− intervallo aperto *centrato* in ρ, se ρ è un numero reale;
− segmento inferiore (superiore) aperto, se $\rho = -\infty$ ($\rho = +\infty$);
− unione di due segmenti aperti, uno inferiore e uno superiore, entrambi di *origine opposta*.
La scelta degli intervalli sferici nel primo caso e della coppia di segmenti di origine opposta nel terzo, è motivata semplicemente da ragioni di praticità. Operando questa scelta, infatti, in tutti i casi un intorno di base viene fissato assegnando un unico numero reale: la semiampiezza dell'intorno, nel primo caso, l'origine dei segmenti negli altri casi.[2]

Essendo in presenza di quattro tipi diversi d'intorno di base, conviene introdurre, al fine di una loro trattazione più snella, la notazione unificante (ove, ovviamente, $\delta \in \mathbb{R}$):

$$\imath^{(\delta)}(\rho) = \begin{cases}]\rho - \delta, \rho + \delta[& \text{se } \rho \in \mathbb{R} \text{ e } \delta > 0 \\ ]\delta, +\infty[& \text{se } \rho = +\infty \\ ]-\infty, \delta[& \text{se } \rho = -\infty \\ ]-\infty, -\delta[\cup]\delta, +\infty[& \text{se } \rho = \infty \text{ e } \delta > 0 \end{cases} .$$

[2]Ricordiamo che gli intorni qui considerati formano, come facilmente si verifica, una base della usuale topologia definita in $\bar{\mathbb{R}}$; quindi, le loro unioni, finite o infinite che siano, vengono a coincidere con gli insiemi aperti di $\bar{\mathbb{R}}$, mentre gli intorni con gli insiemi che ne contengono almeno uno.

Passando a considerare gli associati **intorni standard** ${}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$, il prossimo risultato mostra che le loro espressioni coincidono con quelle degli intorni da cui provengono, intese, però, nei numeri $\star$-reali.

Teorema 6.1.1. *Risulta:*

$$
{}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) = \begin{cases}]{}^\star\rho - {}^\star\delta, {}^\star\rho + {}^\star\delta[\, = \,]\rho - \delta, \rho + \delta[& se\ \rho \in \mathbb{R}\ e\ \delta > 0 \\ ]\delta, \hookrightarrow [& se\ \rho = +\infty \\ ] \hookleftarrow, \delta[& se\ \rho = -\infty \\ ] \hookleftarrow, -\delta[\cup]\delta, \hookrightarrow [& se\, \rho = \infty\ e\ \delta > 0 \end{cases} .^3 \tag{6.1}
$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $I = \imath^{(\delta)}(\rho)$. Assumiamo intanto $\rho = r$ e $\delta > 0$ reale. Considerata allora la semiformalizzazione del metapredicato $X(x)$: "$x \in I$":

$$X(x) : \forall y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\,(y = -\delta\, \mathrm{e}\, y_1 = r + y\, \mathrm{e}\, y_2 = r + \delta \Rightarrow x =]y_1, y_2[)$$

otteniamo, tramite i teoremi 3.6.1(iv), 3.6.5(vi) e 3.6.7(ii),(v),

$$\star\text{-}X(x) : \forall y, y_1, y_2 \in {}^\star\mathbb{R}\,(y = -\delta\, \mathrm{e}\, y_1 = r + y\, \mathrm{e}\, y_2 = r + \delta \Rightarrow x =]y_1, y_2[),$$

cioè $\star$-$X(x) : x = \,]r - \delta, r + \delta[$. Poichè sussiste $X(I)$, sussiste anche, per PdT, la proposizione $\star$-$X({}^\star I)$. Dunque ${}^\star I = \,]r - \delta, r + \delta[\, \subset {}^\star\mathbb{R}$.

Le dimostrazioni negli altri casi possibili sono del tutto analoghe e le lasciamo al lettore come esercizio. □

[3] In questo contesto, le usuali scritture $]-\infty, \cdot[$, $]\cdot, +\infty[$ diventano ambigue, in quanto non esplicano l'ambiente in cui si riferiscono, quello reale o quello $\star$-reale. Per questo motivo le abbiamo sostituite, rispettivamente, con le notazioni $] \hookleftarrow, \cdot[$ e $]\cdot, \hookrightarrow [$. Il trasformato ${}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$, nel caso che ρ sia un reale positivo, è un intervallo aperto, di numeri $\star$-reali, centrato in ρ e di raggio un reale positivo. Ciò suggerisce di considerare, per ogni $\star$-reale b, gli intervalli aperti centrati in b e di raggio reale positivo per introdurre in ${}^\star\mathbb{R}$ un topologia. Purtroppo questa via non risulta percorribile. Infatti, dati due intervalli di questo tipo $]b - r, b + r[$, $]b' - r', b' + r'[$ con intersezione non vuota, sia, ad esempio, $b' - r' < b + r$ e $b' - r' \approx b + r$. Allora, $]b - r, b + r[\cap]b' - r', b' + r'[=]b' - r', b + r[$ e quindi la loro intersezione non può includere un intervallo di ampiezza finita (come dovrebbe se fosse una base). A questo inconveniente, Robinson rimediò rafforzando il concetto d'intorno di base rimuovendo dall'intervallo $]b - r, b + r[$ gli elementi che sono infinitamente prossimi agli estremi e conservando quelli che sono ivi "ben collocati", nel senso che ogni $\star$-reale infinitamente vicino ad essi appartiene all'intervallo considerato. D'altra parte, è possibile percorrere un'altra via per introdurre negli $\star$-reali una topologia più fine e più "naturale" di quella sopra delineata. Basta, a tale scopo, come si vede facilmente, abbandonare la richiesta che l'intervallo abbia solo raggi reali e consentire che possa averne anche di infinitesimi e di infiniti. Non è inutile osservare che questa topologia proviene dall'applicazione dello $\star$-concetto: $\star$-(x intervallo di centro b).

Conviene, a questo punto, introdurre, prima di procedere, una ulteriore notazione semplificatrice:

$$\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) = \begin{cases} \mu(\rho) & \text{se } \rho \in \mathbb{R} \\ {}^\star\mathbb{R}^+_{nf} & \text{se } \rho = +\infty \\ {}^\star\mathbb{R}^-_{nf} & \text{se } \rho = -\infty \\ {}^\star\mathbb{R}_{nf} & se \rho = \infty \end{cases} \tag{6.2}$$

e chiamare tali insiemi, che sappiamo essere esterni, **intorni esterni** di ρ.

Ciò premesso, prendiamo ora in esame la famiglia degli intorni di un numero reale r e quella dei suoi intorni standard, in quanto "rappresentanti", questi ultimi, in ${}^\star\mathbb{R}$ la famiglia degli intorni di r in $\mathbb{R}$. Appare naturale confrontare l'intersezione $\bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} \imath^{(\delta}(r)$, che opera con intorni di $\mathbb{R}$, con l'intersezione $\bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} {}^\star\imath^{(\delta)}(r)$, che opera invece con intorni standard di ${}^\star\mathbb{R}$. Orbene, mentre con la prima famiglia risulta $\bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} \imath^{(\delta)}(r) = \{r\}$, con la seconda si ottiene, come lo prova il prossimo importante risultato, che l'intersezione di tutti gli intorni standard contiene, oltre a r, anche l'insieme di tutti i numeri $\star$-reali a lui infinitamente prossimi, cioè la monade $\mu(r)$. In altre parole, l'intorno esterno di r può essere visto come il più piccolo insieme di ${}^\star\mathbb{R}$ che si riesce a isolare nei numeri $\star$-reali "riducendo" il più possibile gli intorni standard di r, cioè quelli di estremi reali. Questa proprietà finirà col conferire a $\mu(r)$ un ruolo molto importante. Come avremo occasione di vedere in questa e nelle prossime sezioni, nelle caratterizzazioni di proprietà topologiche in termini infinitesimali, l'intorno esterno $\mu(r)$ sarà in grado di sostituire in ${}^\star\mathbb{R}$ l'intera famiglia degli intorni di r in $\mathbb{R}$.

Un discorso analogo può essere fatto, alla luce del prossimo risultato, anche per le famiglie degli intorni di $\rho \notin \mathbb{R}$. Per esempio, per $\rho = \infty$, risulta $\bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} \imath^{(\delta)}(\infty) = \emptyset$ e $\bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} {}^\star\imath^{(\delta)}(\infty) = {}^\star\mathbb{R}_{nf}$, cioè l'intersezione, in $\mathbb{R}$, di tutti gli intorni di ∞ è vuota, mentre l'intersezione, in ${}^\star\mathbb{R}$, degli intorni standard fornisce l'insieme dei numeri $\star$-reali infiniti. Dunque, nelle formulazioni nonstandard di questioni riguardanti il simbolo ∞, l'intorno esterno ${}^\star\mathbb{R}_{nf}$ da solo sostituirà nei numeri $\star$-reali l'intera famiglia degli intorni di ∞ nei reali. È chiaro a questo punto che un ruolo analogo sia riservato agli intorni esterni di ${}^\star\mathbb{R}^-_{nf}$ e ${}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$, nei riguardi delle famiglie di intorni (in $\mathbb{R}$) di $-\infty$ e $+\infty$, rispettivamente.

Teorema 6.1.2. *Risulta* $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) = \bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$.[4]

[4] È utile osservare, come emergerà dalla dimostrazione, che tale uguaglianza continua a

DIMOSTRAZIONE. Posto $T = \bigcap_{\delta \in \mathbb{R}^+} {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$, sia intanto $\rho \in \mathbb{R}$. Allora $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) = \mu(\rho)$. Consideriamo l'intorno standard ${}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) =]\rho - \delta, \rho + \delta[$. Dato $b \in \mu(\rho)$, poniamo $b = \rho + \epsilon$. Allora, $|\epsilon| < \delta$, cioè $-\delta < \epsilon < \delta$ e quindi $\rho - \delta < \rho + \epsilon = b < \rho + \delta$. Ne segue, $b \in {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$. Dunque, $\mu(\rho) \subset {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$. Ne segue, per l'arbitrarietà di δ, $\mu(\rho) \subset T$.
Proviamo ora l'inclusione opposta. Dato $b \in T$, risulta $b \in {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$ per ogni $\delta > 0$ reale. Allora, $|b - \rho| < \delta$ per ogni reale $\delta > 0$ e quindi $b - \rho$ infinitesimo. Ne segue $b \approx \rho$ e quindi $b \in \mu(\rho)$.

Sia ora $\rho = +\infty$. Allora $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) = {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Dato $\omega > 0$, dal Teorema 5.2.1(iii), otteniamo $\omega > \delta$ per ogni $\delta > 0$ finito. Ne segue $\omega \in {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$ per ogni $\delta > 0$ reale e quindi ${}^\star\mathbb{R}^+_{nf} \subset T$.
Proviamo l'inclusione opposta. Dato $b \in T$, risulta $b \in {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho)$ per ogni $\delta > 0$ reale. Allora, $b > \delta$ per ogni δ reale e quindi $b \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$.

I casi $\rho \in \{-\infty, \infty\}$, si provano in modo analogo. $\square$

Centrale nella trattazione nonstandard della nozione di intorno è il seguente fondamentale principio dell'intorno che viene talvolta riportato, in letteratura, come *Principio di Cauchy*.

Riteniamo utile soffermare l'attenzione sul suo significato, che riguarda un insieme interno T di ${}^\star\mathbb{R}$. La proposizione (i), assicura che esiste un intervallo aperto centrato nello $\star$-reale b, di semiampiezza *reale*, incluso in T, se $\mu(b) \subset T$ (condizione che, in particolare, comporta che ogni intervallo aperto centrato in b di semiampiezza infinitesima è incluso in T). La proposizione (ii) assicura, invece, l'esistenza di un segmento di origine *reale* incluso in T, se $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \subset T$ (condizione che, in particolare, comporta l'esistenza di infiniti segmenti di origine un numero infinito inclusi in T).

Teorema 6.1.3 (Principio dell'intorno). *Sia T un sottoinsieme interno dei numeri $\star$-reali. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Caso limitato*: Sia b uno $\star$-reale tale che $\mu(b) \subset T$. Esiste allora un numero reale $\delta > 0$ tale che $]b - \delta, b + \delta[\subset T$;*

(ii) Caso illimitato*: Sia $\rho \in \{\pm\infty, \infty\}$ e $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \subset T$. Esiste allora un numero reale $\delta > 0$ tale che ${}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) \subset T$.*

sussistere anche se al posto degli intorni $\imath^{(\delta)}(\rho)$ si considerano, rispettivamente, gli intervalli sferici chiusi o semiaperti e i segmenti chiusi.

Dimostrazione. (i) Consideriamo il metapredicato $X(x) :]b-1/x, b+1/x[\subset T$ che si formalizza, tenuto conto del Teorema 2.5.2(i), nel linguaggio interno mediante la wff limitata:

$$\bigsqcap_{i=1}^{4} y_i \lessdot {}^\star\mathbb{R}^3 \bigsqcap z \lessdot {}^\star\mathbb{R}\,(\langle x, y_1, 1\rangle \lessdot \cdot \wedge \langle y, y_2, 0\rangle \lessdot + \wedge \langle b, y_2, y_3\rangle \lessdot + \\ \wedge\langle b, y, y_4\rangle \lessdot + \wedge \langle y_3, z\rangle \lessdot\, < \wedge\langle z, y_3\rangle \lessdot\, < \rightarrow z \lessdot T).$$

Osservato che $X(x)$ sussiste, in forza dell'ipotesi, per *ogni* numero naturale infinito, otteniamo, tramite il Lemma del prolungamento 4.4.3(ii), che esiste un naturale n' tale che sussiste$X(n')$, cioè $]b-1/n', b+1/n'[\subset T$. Ne segue la tesi.

(ii) Consideriamo il metapredicato $Y(\rho, x) : {}^\star\imath^{(x)}(\rho) \subset T$ che, in tutti i tre casi previsti, facilmente si prova formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno. Per l'ipotesi fatta, $Y(\rho, x)$ sussiste per *ogni* numero naturale infinito. Per il Lemma del prolungamento, esiste allora un numero naturale n' tale che sussiste $Y(\rho, n')$, cioè ${}^\star\imath^{(n')}(\rho) \subset T$. Da qui la tesi. $\square$

Poichè l'obiettivo è quello di mostrare come operano le tecniche nonstandard nella trattazione di problemi di analisi reale, risulta piuttosto evidente che quando capiterà di dover utilizzare il Principio dell'intorno lo si farà molto spesso nelle ipotesi che b sia numero reale e T un insieme standard. In questo caso il principio può essere espresso in una forma che meglio si adatta alla situazione particolare, mettendo in collegamento proprietà dell'ambiente reale con proprietà di quello $\star$-reale. Si ottiene così una caratterizzazione nonstandard della nozione d'intorno nei quattro casi contemplati; caratterizzazione che comporta, com'è peraltro facile intendere, una minore complessità nell'espressione dei concetti e una conseguente semplificazione nelle fasi dimostrative.

Teorema 6.1.4 (Caratterizzazione degli intorni reali). *Sia $T \subset \mathbb{R}$. Allora, esiste $\delta > 0$ reale tale che $\imath^{(\delta)}(\rho) \subset T \Leftrightarrow \imath^{(\text{ext})}(\rho) \subset {}^\star T$. Ne segue, per la definizione di intorno, che sussiste l'equivalenza:*

$$T \textit{ intorno di } \rho \Leftrightarrow \begin{cases} \mu(\rho) \subset {}^\star T & \textit{se } \rho \in \mathbb{R} \\ {}^\star\mathbb{R}^-_{nf} \subset {}^\star T & \textit{se } \rho = -\infty \\ {}^\star\mathbb{R}^+_{nf} \subset {}^\star T & \textit{se } \rho = +\infty \\ {}^\star\mathbb{R}_{nf} \subset {}^\star T & \textit{se } \rho = \infty \end{cases}.$$

Dimostrazione. Esista intanto $\delta > 0$ reale tale che $\imath^{(\delta)}(\rho) \subset T$. Allora, per i Teoremi 2.1.1(iii) e 6.1.2, $\imath^{(\text{ext})}(\rho) \subset {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) \subset {}^\star T$.

Sia ora $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \subset {}^\star T$. Ricorrendo al Principio dell'intorno, esiste $\delta > 0$ reale tale che ${}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) \subset {}^\star T$, cioè $\imath^{(\delta)}(\rho) \subset T$. □

In base a questa caratterizzazione, per accertare che T è un intorno di ρ, si può operare nell'ambito dei numeri $\star$-reali, facendo vedere che l'intorno esterno $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho)$ è incluso in ${}^\star T$. Il risultato seguente prova che questa condizione può essere indebolita.

Corollario 6.1.5. *Sia $T \subset \mathbb{R}$. Sussiste allora l'equivalenza:*

$$T \textit{ intorno di } \rho \Leftrightarrow \begin{cases} \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ \, ({}^\star]\rho - \delta, \rho + \delta[\subset {}^\star T) & \textit{se } \rho \in \mathbb{R} \\ \exists\, \omega > 0 \, (]\omega, \hookrightarrow [\subset {}^\star T) & \textit{se } \rho = +\infty \\ \exists\, \omega < 0 \, (] \hookleftarrow, \omega[\subset {}^\star T) & \textit{se } \rho = -\infty \\ \exists\, \omega > 0 \, (] \hookleftarrow, -\omega[\cup]\omega, \hookrightarrow [\subset {}^\star T) & \textit{se } \rho = \infty \end{cases}.$$

Dimostrazione. Le quattro caratterizzazioni elencate si provano tutte facilmente. Riteniamo, tuttavia, utile dimostrare compiutamente la prima e l'ultima.

Sia ρ reale. Assumiamo $\imath^{(\delta)}(\rho) \subset T$. Allora, per il teorema precedente, $\mu(\rho) \subset {}^\star T$ e quindi, per il Principio dell'intorno limitato 6.1.3(i), esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che ${}^\star]\rho - \delta, \rho + \delta[\subset {}^\star T$.

Sia ora $\epsilon > 0$ reale tale che $\imath^{(\epsilon)}(\rho) =]\rho - \epsilon, \rho + \epsilon[\subset {}^\star T$. Allora, per il Teorema 6.1.2, $\mu(\rho) = \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \subset {}^\star T$ e quindi, per il teorema precedente, T è intorno di ρ.

Supposto $\rho = \infty$, sia intanto T un suo intorno. Dato $\omega > 0$, risulta, per il teorema precedente, $] \hookleftarrow, -\omega[\cup]\omega, \hookrightarrow [\subset {}^\star\mathbb{R}_{nf} \subset {}^\star T$.

Sia infine $\omega > 0$ tale che $] \hookleftarrow, -\omega[\cup]\omega, \hookrightarrow [\subset {}^\star T$. Introdotta la semiformalizzazione della frase "$x > 0$ e $] \hookleftarrow, -x[\cup]x, \hookrightarrow [\subset T$":

$$X(x) : \forall y, z \in \mathbb{R} \, (0 < x \,\mathrm{e}\, y = -x \,\mathrm{e}\, (z < y \,\mathrm{o}\, x < z) \to z \in T),$$

otteniamo, mediante i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.6(v) e 3.6.7(v),

$$\star\text{-}X(x) : \forall y, z \in {}^\star\mathbb{R} \, (0 < x \,\mathrm{e}\, y = -x \,\mathrm{e}\, (z < y \,\mathrm{o}\, x < z) \to z \in {}^\star T) \,\mathrm{e}\, x \text{ interna},$$

cioè, $x > 0$ interna e $] \hookleftarrow, -x[\cup]x, \hookrightarrow [\subset {}^\star T$. Osservato che, per ipotesi fatta, l'enunciato $\exists x \in {}^\star\mathbb{R} \; \star\text{-}X(x)$ è valido in ${}^\star\mathbb{R}$, possiamo concludere, per il Teorema 3.3.2, la validità della proposizione "$\exists x \in \mathbb{R}\, X(x)$" in $\mathbb{R}$, cioè l'esistenza di $\delta > 0$ reale tale che $\imath^{(\delta)}(\rho) \subset T$, cioè T intorno di ∞. □

6.2 Proprietà puntuali e locali

Ci occupiamo ora della versione nonstandard delle proprietà *puntuali*, valide cioè in *ogni* intorno di un punto, e *locali*, valide cioè in *qualche* intorno di un punto. Caratterizziamo anche proprietà a loro volta analoghe, ma riferite agli intorni di $\pm\infty, \infty$, che denominiamo ancora "puntuali" se valgono in *ogni* intorno e "locali" se sussistono in *qualche* intorno.[5]

L'importanza della formulazione in termini nonstandard di queste proprietà è subito capita quando si rifletta sul fatto che molte nozioni dell'analisi reale vengono introdotte richiedendo che sussistano proprietà puntuali o locali o definitive. Sono di carattere puntuale, ad esempio, le nozioni di punto di accumulazione e di frontiera di un insieme; di carattere locale quelle di punto interno, di punto di massimo relativo, di crescenza in un punto, varie nozioni di limite; di carattere definitivo, infine, le nozioni di funzione definitivamente monotona e definitivamente positiva o limitata, così come la nozione di carattere di una serie.

Questi brevi cenni rendono evidente l'interesse di procurarsi una caratterizzazione delle proprietà puntuali e locali in una forma generale. Questa potrà poi essere utilmente adoperata in tutti i casi particolari che si avrà occasione di incontrare.

Prima di procedere alla trattazione nonstandard di dette proprietà, premettiamo, naturalmente, le loro definizioni precise. Dato, come al solito $\rho \in \bar{\mathbb{R}}$, il metapredicato unario $X(x)$ è una proprietà:
− **locale** in ρ se *esiste* un intorno di base U di ρ tale che $X(u)$ sussista per *ogni* $u \in U$;
− **puntuale** in ρ se per *ogni* intorno di base U di ρ sussista $X(u)$ per *qualche* $u \in U$;

Teorema 6.2.1. *Sia $X(x)$ un metapredicato unario. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) $X(x)$ proprietà locale di $\rho \Leftrightarrow \star$-$X(b)$ sussiste per ogni $b \in \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho)$;

(ii) $X(x)$ proprietà puntuale di $\rho \Leftrightarrow \star$-$X(b)$ sussiste per qualche $b \in \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho)$.

Dimostrazione. (i) Sia intanto ρ reale. Esiste allora un intorno $U = \imath^{(\delta)}(\rho)$ tale che sussiste la proposizione $\forall u \in U X(u)$ e quindi, per il Teorema 3.3.2, sussiste

[5] La proprietà locale viene anche chiamata, seguendo una terminologia più abituale, *definitiva*, se $\rho = \infty$, *definitivamente negativa*, se $\rho = -\infty$, e *definitivamente positiva*, se $\rho = +\infty$.

anche lo $\star$-enunciato $\forall u \in {}^\star U \star\text{-}X(u)$. Poichè, per il Teorema 6.1.2, $\imath^{(\text{ext})}(\rho) = \mu(\rho) \subset {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) = {}^\star U$, si ha la tesi.

Sussista ora $\star\text{-}X(b)$ per ogni $b \in \mu(\rho)$. Considerato, l'insieme $T = \{x \in \mathbb{R} \mid X(x)\}$, otteniamo, per il Teorema 3.3.4, ${}^\star T = \{x \in {}^\star\mathbb{R} \mid \star\text{-}X(x)\} \supset \mu(\rho)$. Per il Principio dell'intorno limitato 6.1.3(i), esiste allora $\delta > 0$ reale tale che ${}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) \subset {}^\star T$. Ne segue che sussiste la proposizione $\forall x \in {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) \star\text{-}X(x)$ e quindi, per il Teorema 3.3.2, anche la $\forall x \in \imath^{(\delta)}(r)\, X(x)$, cioè la tesi.

Nei casi in cui ρ non sia reale, la dimostrazione si consegue procedendo in modo strettamente analogo a quello ora seguito, sostituendo $\mu(\rho)$ con $\imath^{(\text{ext})}(\rho)$ e usando il Principio dell'intorno illimitato 6.1.3(ii) al posto di quello limitato.

(ii) Le dimostrazioni nei quattro casi possibili per ρ sono anche qui strettamente analoghe. È sufficiente pertanto fornire la prova per uno solo di essi. Poichè abbiamo provato (i) per ρ reale, scegliamo ora di provare (ii) per $\rho = +\infty$.

Sia dunque $X(x)$ una proprietà puntuale in $+\infty$. Allora, per ogni $U = \imath^{(\delta)}(+\infty)$, sussiste la proposizione $\exists x \in U X(x)$. Pertanto, è valida anche la frase $\forall u \in \mathbb{R}\, \exists v \in \mathbb{R}\, (u < v \wedge X(v))$. Ne segue, per i Teoremi 3.3.2 e 3.6.6(v), che sussiste lo $\star$-enunciato: $\forall u \in {}^\star\mathbb{R}\, \exists v \in {}^\star\mathbb{R}\, (u < v \wedge \star\text{-}X(v))$. Posto quindi $u = \omega > 0$, risulta la validità di $\exists v \in {}^\star\mathbb{R}\, (\omega < v \wedge \star\text{-}X(v))$; esiste, cioè, $b > \omega$ tale che $\star\text{-}X(b)$. Notato che $b \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf} = \imath^{(\text{ext})}(+\infty)$, si ha la tesi.

Sussista infine $\star\text{-}X(b)$ con $b \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Fissasto un intorno $U = \imath^{(\delta)}(+\infty)$ risulta, per il Teorema 6.1.2, ${}^\star\mathbb{R}^+_{nf} \subset {}^\star\imath^{(\delta)}(+\infty) = {}^\star U$ e quindi $b \in {}^\star U$. Ne segue la validità dello $\star$-enunciato: $\exists x \in {}^\star U \star\text{-}X(x)$ e quindi, per il solito Teorema 3.3.2, anche quella di $\exists x \in U X(x)$, cioè la tesi. □

6.3 Insiemi aperti, chiusi, compatti e limitati

Come già osservato, la trattazione nonstandard delle proprietà puntuali e locali in generale, rendono più agevole l'individuazione delle caratterizzazioni nonstandard di nozioni particolari, come messo, ad esempio, in evidenza nel teorema seguente.

Teorema 6.3.1. *Siano $T \subset \mathbb{R}$. Allora, per ogni reale r, risulta:*

(i) r punto interno di $T \Leftrightarrow \mu(r) \subset {}^\star T$;

(ii) r punto esterno di $T \Leftrightarrow \mu(r) \cap {}^\star T = \emptyset$;

(iii) r punto aderente di $T \Leftrightarrow \mu(r) \cap {}^\star T \neq \emptyset$;

(iv) r punto di frontiera di $T \Leftrightarrow \mu(r) \cap {}^\star T \neq \emptyset$ e $\mu(r) \cap ({}^\star\mathbb{R} \setminus {}^\star T) \neq \emptyset$;

(v) r punto di accumulazione di T $\Leftrightarrow (\mu(r) \setminus \{r\}) \cap {}^\star T \neq \emptyset$;

(vi) r punto isolato di T $\Leftrightarrow \mu(r) \cap {}^\star T = \{r\}$.

Dimostrazione. (i) Conseguenza del Teorema 6.1.4, essendo T un intorno di r.

(ii) Sia intanto r esterno a T. Allora r è interno a $\mathbb{R} \setminus T$ e quindi, per (i), $\mu(r) \subset {}^\star(\mathbb{R} \setminus T) = {}^\star\mathbb{R} \setminus {}^\star T$, ove l'uguaglianza sussiste per il Teorema 2.3.3(i).

Si ora $\mu(r) \cap {}^\star T = \emptyset$. Allora $\mu(r) \subset {}^\star\mathbb{R} \setminus {}^\star T = {}^\star(\mathbb{R} \setminus T)$ e quindi, per (i), r è punto interno di $\mathbb{R} \setminus T$, cioè punto esterno di T.

(iii) Dire che r è aderente a T significa affermare che per ogni intorno di base di r esiste un suo elemento appartenente a T. Trattasi dunque di una nozione di carattere puntuale, che si esprime con il metapredicato $X(x) : x \in T$. Ne segue, per il Teorema 6.2.1(ii), la tesi.

(iv) Segue da (iii), osservato che r è di frontiera se è aderente a T e a $\mathbb{R} \setminus T$.

(v) Dire che r è punto di accumulazione di T significa affermare che per ogni intorno di base di r esiste un suo elemento appartenente a T e diverso da r. Trattasi allora di una nozione di carattere puntuale che si esprime col metapredicato $X(x)$: "$x \in T$ e $x \neq r$". Ne segue, per il Teorema 6.2.1(ii), la tesi.

(vi) Dire che R è punto isolato di T significa affermare che esiste un intorno di base di r tale che ogni suo elemento appartenente a T coincide con r. Trattasi allora di una nozione di carattere locale, che si esprime col metapredicato $X(x)$: $x \in T \Rightarrow x = r$. Ne segue, per il Teorema 6.2.1(i), la tesi. □

Un confronto tra le formalizzazioni usuali e quelle nonstandard delle nozioni considerate in quest'ultimo teorema permette di mettere in evidenza la maggiore complessità delle versioni classiche rispetto a quelle nonstandard. Nelle versioni usuali, infatti, le definizioni vengono date mediante l'uso di quantificatori operanti sulla famiglia degli intorni del punto in esame r (esiste un'intorno di $r \ldots$, per ogni intorno di $r \ldots$). Per contro, le caratterizzazioni nonstandard, che possono essere assunte naturalmente per definizioni, al posto di una famiglia d'insiemi sostituiscono un *unico* insieme collegato a r, la sua monade $\mu(r)$, che viene messa a confronto con l'insieme ${}^\star T$, trasformato di T. È facile immaginare come questa notevole semplificazione nella formulazione dei concetti base possa apportare semplificazioni, anche rilevanti, sia nella formulazione di altri concetti ad essi collegati (come le nozioni di insieme aperto, chiuso, ...), sia a livello dimostrativo. Quest'ultimo aspetto viene messo chiaramente in luce nella prossima sezione, ove si forniscono come preannunciato, le prove nonstandard di alcuni fondamentali teoremi dell'analisi classica.

6.3.1 Insiemi aperti e chiusi

Forniamo ora le versioni nonstandard delle nozioni di insieme aperto e chiuso.

Teorema 6.3.2. *Sia $T \subset \mathbb{R}$. Riesce allora:*

(i) T aperto $\Leftrightarrow \bigcup_{r\in T} \mu(r) \subset {}^\star T$;

(ii) T chiuso $\Leftrightarrow \bigcup_{r\notin T} \mu(r) \subset {}^\star\mathbb{R} \setminus {}^\star T$.

Dimostrazione. (i) Sia T aperto. Allora ogni suo punto è interno a T. Ne segue, per il Teorema 6.3.1(i), $\mu(r) \subset {}^\star T$ per ogni $r \in T$ e quindi la tesi. Sia ora $\bigcup_{r\in T} \mu(r) \subset {}^\star T$. Ne segue, qualunque sia $r \in T$, $\mu(r) \subset {}^\star T$ e quindi, sempre per il medesimo teorema, r punto interno di T, Da qui la tesi.

(ii) Segue da (i) e dal Teorema 2.3.3(i), ricordato che un insieme è chiuso se il suo complementare è aperto. □

Il prossimo risultato consente di ottenere la monade di un numero reale tramite l'intersezione dei trasformati di tutti gli aperti che lo contengono, fornendo così un'altra versione del Teorema 6.1.2.

Teorema 6.3.3. *Per ogni reale r risulta $\mu(r) = \bigcap\{{}^\star T \mid r \in T \,\mathrm{e}\, T \text{ aperto}\}$.*

Dimostrazione. Per i Teoremi 6.1.2 e 6.1.4, $\mu(r) \subset \bigcap\{{}^\star T \mid r \in T \,\mathrm{e}\, T \text{ aperto}\} \subset \bigcap_{\delta\in\mathbb{R}^+} {}^\star\imath^{(\delta)}(\rho) = \mu(r)$. □

6.3.2 Insiemi limitati

Per la nozione di insieme limitato consideriamo due differenti caratterizzazioni, entrambe interessanti e utili.

Teorema 6.3.4. *Sia $T \subset \mathbb{R}$. Riesce allora:*

(i) T limitato $\Leftrightarrow {}^\star T$ limitato in ${}^\star\mathbb{R}$;

(ii) T limitato $\Leftrightarrow {}^\star T \subset {}^\star\imath^{(r)}(0) \subset {}^\star\mathbb{R}_f$ per qualche $r > 0$ reale.

Dimostrazione. (i) Considerata la semiformalizzazione del concetto "x sottoinsieme limitato in $\mathbb{R}$ secondo l'ordine $\leq$":

$$X(x) : x \subset \mathbb{R} \,\mathrm{e}\, \exists y \in \mathbb{R}^+ \forall z \in \mathbb{P}(\mathbb{R})(z = \imath^{(y)}(0) \Rightarrow x \subset z),$$

tramite il Teorema 3.6.1(iii),(iv),(v), otteniamo

$$\star\text{-}X(x) : x \subset {}^\star\mathbb{R} \,\text{e}\, \exists y \in {}^\star\mathbb{R}^+ \forall z \in {}^\star\mathbb{P}(\mathbb{R})(z = {}^\star\imath^{(y)}(0) \Rightarrow x \subset z) \,\text{e}\, x \text{ interno},$$

cioè $\star$-$X(x)$: x sottoinsieme interno limitato di ${}^\star\mathbb{R}$ secondo l'ordine $\leq$. Ne segue (i), notato che, per PdT, $X(T) \Leftrightarrow \star\text{-}X({}^\star T)$.

(ii) Sia intanto T limitato. Esiste quindi $r > 0$ tale che $T \subset \imath^{(r)}(0)$. Allora, per i Teoremi 2.1.1(iii) e 5.2.1(i), ${}^\star T \subset {}^\star\imath^{(r)}(0) \subset {}^\star\mathbb{R}_f$.

Sia ora ${}^\star T \subset \imath^{(r)}(0)$. Allora ${}^\star T \subset]-r, r[$ e quindi ${}^\star T$ è limitato in ${}^\star\mathbb{R}$. Da (i) si ottiene infine la tesi. □

Il teorema appena provato permette di mettere in luce la struttura dei sottoinsiemi standard ${}^\star T$ di ${}^\star\mathbb{R}$.

Per la prima proposizione, l'insieme T è illimitato se e solo se ${}^\star T$ è illimitato in ${}^\star\mathbb{R}$. D'altra parte, per la seconda, ${}^\star T$ è privo di numeri infiniti se e solo se T è limitato (osservare che ${}^\star\mathbb{R}_f$ è esterno). Pertanto, se ${}^\star T$ contiene un numero infinito, allora ${}^\star T$ è necessariamente illimitato in ${}^\star\mathbb{R}$ e quindi i numeri infiniti appartenenti a ${}^\star T$ costituiscono un insieme di cardinalità infinita, più precisamente un insieme superiormente e/o inferiormente illimitato.

Possiamo dunque concludere che *ogni sottoinsieme standard* ${}^\star T$ *o* è *privo di numeri infiniti (quando* T è *limitato) oppure ne possiede infiniti (quando* T è *illimitato); inoltre, in quest'ultimo caso, il loro insieme* è *necessariamente superiormente e/o inferiormente illimitato.*

6.3.3 Chiusura di un insieme

Alla caratterizzazione nonstandard della chiusura di un insieme di numeri reali occorre premettere il teorema seguente di notevole interesse generale e riguardante il comportamento della parte finita degli insiemi interni, sulla quale, come sappiamo, è definita la funzione parte standard.

Teorema 6.3.5. *Sia* T *un sottoinsieme interno di* ${}^\star\mathbb{R}$. *Allora l'insieme di numeri reali* $\mathrm{st}[T \cap {}^\star\mathbb{R}_f]$ è *chiuso.*

Dimostrazione. Posto $E = \mathrm{st}[T \cap {}^\star\mathbb{R}_f]$, si tratta di provare che ogni punto aderente a E vi appartiene.

Sia dunque r aderente a E. Qualunque sia il naturale n risulta allora $\imath^{(1/n)}(r) \cap E \neq \emptyset$ e quindi esiste un numero reale $r_n \in \imath^{(1/n)}(r) \cap E$. Da $r_n \in E$ segue allora che esiste $b_n \in T \cap {}^\star\mathbb{R}_f$ tale che $\mathrm{st}(b_n) = r_n$ e quindi, per il Teorema 6.1.2, $b_n \in \mu(r_n) \subset {}^\star\imath^{(1/n)}(r)$; dunque ${}^\star\imath^{(1/n)}(r) \cap T \neq \emptyset$.

Consideriamo, ora, il metapredicato $X(x)$: ${}^\star\imath^{(1/x)}(r) \cap T \neq \emptyset$ che si formalizza nel linguaggio interno mediante la wff limitata:

$$\bigsqcap_{i=1}^{3} y_i \lessdot {}^\star\mathbb{R}^3 \left(\langle x, y, 1\rangle \lessdot \cdot \wedge \langle y, y_1, 0\rangle \lessdot + \wedge \langle r, y_1, y_2\rangle \lessdot + \wedge \langle r, y, y_3\rangle \lessdot + \right.$$
$$\left. \to \bigsqcup z \lessdot T \bigsqcup_{j=1}^{2} z_j \lessdot {}^\star\mathbb{R}^2 \left(\langle y_2, z\rangle \lessdot < \wedge \langle z, y_3\rangle \lessdot <\right)\right).$$

Osservato che, per quanto visto sopra, $X(x)$ sussiste per ogni numero naturale n, otteniamo, tramite il Lemma del prolungamento 4.4.3(i), l'esistenza di un $\star$-naturale infinito ω tale che ${}^\star]r - 1/\omega, r + 1/\omega[\cap T \neq \emptyset$. Esiste quindi $b \in T$ tale che $b \approx r$; dunque $\mathrm{st}(b) = r$ e $b \in T \cap {}^\star\mathbb{R}_f$, cioè $r \in E$. $\square$

Siamo ora in grado di fornire la preannunciata caratterizzazione nonstandard della chiusura di un insieme di numeri reali.

Teorema 6.3.6. *Sia $T \subset \mathbb{R}$ e $\bar{T}$ la sua chiusura. Allora $\bar{T} = \mathrm{st}[{}^\star T \cap {}^\star\mathbb{R}_f]$.*

Dimostrazione. Posto $E = \mathrm{st}[{}^\star T \cap {}^\star\mathbb{R}_f]$, proviamo intanto l'inclusione $\bar{T} \subset E$. A tal fine, osserviamo che, per il Teorema 2.1.1(ii), $T = \star[T] \subset {}^\star T$ e che ogni numero reale è finito; quindi $T \subset^\star T \cap^\star \mathbb{R}_f$. Essendo poi, banalmente, $\mathrm{st}[T] = T$, risulta $T \subset \mathrm{st}[{}^\star T \cap {}^\star\mathbb{R}_f] = E$. Passando alle chiusure, cioè agli insiemi dei punti aderenti a T ed a E, si ottiene $\bar{T} \subset \bar{E} = E$, ove l'uguaglianza sussiste in forza del Teorema 6.3.5.

Proviamo ora l'inclusione $E \subset \bar{T}$. Sia $r \in E$. Esiste allora $b \in {}^\star T$ tale che $r = \mathrm{st}(b)$. Ne segue $\mu(r) \cap {}^\star T \neq \emptyset$ e quindi, per il Teorema 6.3.1(iii), r è aderente a T, cioè $r \in \bar{T}$. $\square$

6.3.4 Insiemi compatti

Con questo paragrafo ha termine lo studio delle nozioni topologiche relative alla retta reale, nella loro formulazione nonstandard, con la caratterizzazione della nozione di insieme compatto. A tal fine, ricordiamo che un insieme di numeri reali è *compatto* se da ogni suo ricoprimento fatto con insiemi aperti (di qualsiasi cardinalità) è estraibile un suo ricoprimento finito.

Teorema 6.3.7 (Criterio di compattezza (Robinson)). *Sia $T \subset \mathbb{R}$. Allora, T è compatto $\Leftrightarrow$ ${}^\star T \subset \bigcup_{r \in T} \mu(r)$, cioè se se solo se ogni elemento di ${}^\star T$ è infinitamente prossimo a qualche punto di T.*

Dimostrazione. Posto $E = \bigcup_{r \in T} \mu(r)$, sia intanto T compatto. Ora, per provare che ${}^\star T \subset E$ basta evidentemente dimostrare che se $b \notin E$, allora $b \notin {}^\star T$.

Sia allora $b \notin E$. Proviamo intanto che, per ogni $r \in T$, esiste $\delta > 0$ reale tale che $b \notin {}^\star\imath^{(\delta)}(r) = {}^\star U_r$. Infatti, altrimenti riuscirebbe $b \in {}^\star\imath^{(\delta)}(r)$ per ogni $\delta > 0$ reale e quindi, per il Teorema 6.1.2, la contraddizione $b \in \mu(r) \subset E$.

Ciò visto, consideriamo la famiglia $(U_r)_{r\in T}$ che risulta essere un ricoprimento di insiemi aperti di T. Essendo T compatto, esistono $r_1, \ldots, r_s \in T$ tali che $T \subset \bigcup_{i=1}^s U_{r_i}$. Ne segue, per i Teoremi 2.1.1(iii) e 2.3.3(iv), ${}^\star T \subset {}^\star(\bigcup_{i=1}^s U_{r_i}) = \bigcup_{i=1}^s {}^\star U_{r_i}$ e quindi $b \notin {}^\star T$.

Sia ora ${}^\star T \subset E$. Supponiamo, per assurdo, T non compatto. Esiste allora un ricoprimento $(V_j)_{j\in J}$ di T, formato da aperti, dal quale non è possibile estrarre alcun sottoricoprimento finito di T. In altri termini, scelti comunque $j_1, \ldots, j_s \in T$, riesce $T \not\subset \bigcup_{i=1}^s V_{j_i}$. Ne segue che la relazione $\bumpeq$, tra l'insieme $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ e T, tale che

$$V_j \bumpeq r \Leftrightarrow r \notin V_j$$

è concorrente. Poichè $\star$ è allargante, esiste allora $b \in \mathcal{I}$ tale che ${}^\star V_j \;{}^\star\!\bumpeq b$ per ogni $j \in J$. Osservato poi che, per il Teorema 2.4.1,

$$^\star\!\bumpeq = {}^\star\{(e_1, e_2) \in \mathcal{V} \times T \mid \hat{A} \Vdash \neg(e_2 \lessdot e_1)\} = \{(e_1, e_2) \in {}^\star\mathcal{V} \times {}^\star T \mid e_2 \notin e_1\}$$

risulta $b \in {}^\star T$ e

$$b \notin {}^\star V_j \;\text{ per ogni}\, j \in J. \tag{6.3}$$

Ora, per l'ipotesi fatta, $b \in {}^\star T$ implica $b \in E$ e quindi esiste $r \in T$ tale che $b \in \mu(r)$. Allora, per il Teorema 6.3.3, $b \in {}^\star U$ per ogni intorno aperto U di r. Inoltre, per qualche $j \in J$, risulta $r \in V_j$ con V_j intorno aperto di r. Esiste allora $j \in J$ tale che, per il Teorema 6.1.4, $b \in {}^\star V_j$; ma ciò contraddice (6.3). Dunque T è compatto. $\square$

Ci sembra interessante osservare come la nozione usuale di compattezza venga data in modo alquanto complesso, poichè ricorre all'uso dei quantificatori su due famiglie di insiemi (per ogni ricoprimento ..., esiste un ricoprimento ...). La nozione nonstandard è formulata invece, oltre ad essere molto suggestiva, in modo molto più semplice, in quanto non richiede alcuna quantificazione.

Ci sembra utile rilevare anche che le nozioni di "insieme aperto" (che nella definizione classica richiede una quantificazione) e quella di "insieme compatto" risultano, nella formulazione nonstandard, dello stesso livello di complessità; entrambe prevedono infatti un confronto tra il trasformato ${}^\star T$ e l'unione di tutte le monadi dei punti di T.

6.4 Tre teoremi fondamentali

Le considerazioni precedenti lasciano intendere come molte dimostrazioni che fanno pervenire la compattezza possano risultare notevolmente più semplici delle corrispondenti dimostrazioni classiche, se condotte con tecnica nonstandard. Un esempio è fornito dalla dimostrazione nonstandard del teorema di Heine-Pincherle-Borel che viene, qui, confrontata con quella usuale.

Teorema 6.4.1 (Heine-Pincherle-Borel). *Un insieme $T \subset \mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. `PROVA NONSTANDARD` Sia intanto T compatto. Per il precedente Criterio di compattezza, ${}^\star T \subset \bigcup_{r\in T}\mu(r) \subset {}^\star\mathbb{R}_f$ (ogni $\mu(r) \subset {}^\star\mathbb{R}_f$ essendo r reale e dunque finito) e quindi, per il Teorema 6.3.4(ii), T è limitato. Infine, per il Teorema 6.3.6, $\bar{T} = \mathrm{st}[{}^\star T \cap {}^\star\mathbb{R}_f] = \mathrm{st}[{}^\star T] \subset \mathrm{st}[\bigcup_{r\in T}\mu(r)] \subset T$ e quindi T è chiuso.

Sia ora T chiuso e limitato. Essendo T limitato, per il Teorema 6.3.4(ii), ${}^\star T \subset {}^\star\mathbb{R}_f$. Proviamo infine la compattezza, cioè, per il Criterio di compattezza, l'inclusione ${}^\star T \subset \bigcup_{r\in T}\mu(r)$. Sia dunque $b \in {}^\star T$. Allora, per il Teorema 6.3.6, $r = \mathrm{st}(b) \in \mathrm{st}[{}^\star T] = \mathrm{st}[{}^\star T \cap {}^\star\mathbb{R}_f] = \bar{T} = T$. Ne segue, essendo $b \in \mu(r)$, la tesi.

`PROVA STANDARD` Sia intanto T chiuso e limitato. Sia inoltre $T \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, con U_i aperto. Per ogni sottoinsieme finito $E = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset I$, indichiamo con $C_E = T \setminus \bigcup_{j=1}^{s} U_{i_j}$, ossia la parte di T non ricoperta dalla famiglia finita $(U_{i_j})_{j=1,\ldots,s}$. Basta provare che vi è uno di tali sottoinsiemi finiti E di indici per il quale C_E è vuoto.

Notato che gli insiemi limitati C_E sono chiusi (essendo T chiuso e aperti gli U_r), procediamo per assurdo, supponendo che, qualunque sia E sottoinsieme finito di I, risulti $C_E \neq \emptyset$.

Ora, l'intersezione di un numero finito qualunque di C_E è ancora uno di tali insiemi. Infatti, dati gli insiemi $C_{E_1} = \{i_1^{(1)}, \ldots, i_{s_1}^{(1)}\}, \ldots, C_{E_n} = \{i_1^{(n)}, \ldots, i_{s_n}^{(n)}\}$, si ha (avendo indicato con F^c il complementare di un qualsiasi insieme F):

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_{E_i} = \bigcap_{i=1}^{n}[T \cap (\bigcup_{j=1}^{s_i^{(i)}} U_{i_j})^c] = T \cap [\bigcap_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{s_i^{(i)}} U_{i_j})^c] = T \cap (\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{s_i^{(i)}} U_{i_j})^c = T \setminus \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{s_i^{(i)}} U_{i_j}.$$

Essendo l'ultima unione estesa ad un insieme finito di indici, l'intersezione degli insiemi $C_{E_1}, \ldots, C_{E_n}$ è essa stessa del tipo C_E.

Pertanto, dall'ipotesi assurda fatta, tramite il Teorema di Cantor (vedi teorema seguente), otteniamo l'esistenza di almeno un punto $t \in T$ appartenere a tutti gli insiemi C_E. Conseguentemente, tale punto non può appartenere ad alcuno degli U_i (da $t \in U_{i'}$ seguirebbe $t \notin C_{\{i'\}}$), contro l'ipotesi che gli U_i ricoprono T.

Sia infine T compatto. Supponiamo, per assurdo, che sia non chiuso o non limitato. Assumiamo intanto T non chiuso. Esiste allora un suo punto aderente $\bar{r} \notin T$. Posto $d(x) = |x - \bar{r}|/2$, consideriamo la famiglia degli intervalli aperti di centro x di semiampiezza $d(x)$, $\mathcal{U} = (U_x^{d(x)})_{x \in T}$, ricoprente T. È facile vedere che una sottofamiglia finita $\mathcal{U}'$ di $\mathcal{U}$ non può ricoprire T; infatti, indicata con d_0 la minima semiampiezza degli intervalli di $\mathcal{U}'$, risulta che nessun intervallo di $\mathcal{U}'$ ha punti distanti da $\bar{r}$ meno di d_0, mentre in T vi sono punti arbitrariamente vicini a $\bar{r}$. Sia poi T non limitato. Un ricoprimento $\mathcal{U}$ i cui insiemi aperti siano tutti limitati (per esempio, un intervallo limitato aperto intorno a ogni suo punto) non ammette sottoricoprimenti finiti. □

Concludiamo il capitolo riportando anche, sempre a titolo d'esempio, le dimostrazioni nonstandard di due altri celebri teoremi dell'analisi classica. Invitiamo il lettore a confrontarle con quelle standard, reperibili in un qualunque testo di analisi reale.

Teorema 6.4.2 (Cantor). *Sia $(T_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ che verifica la proprietà dell'intersezione finita. Risulta allora $\bigcap_{i \in I} T_i \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T} = \{T_i \mid i \in I\}$. Allora, essendo $\star$ un monomorfismo allargante, si ha, per il Teorema 4.7.1(iii), $\cap \star [\mathcal{T}] \neq \emptyset$ e quindi esiste $b \in {}^{\star}T$ per ogni $T \in \mathcal{T}$. Inoltre, poichè gli insiemi di $\mathcal{T}$ sono limitati, per il Teorema 6.3.4(ii), $b \in {}^{\star}\mathbb{R}_f$. Risulta allora, per il Teorema 6.3.6, $r = \mathrm{st}(b) \in \mathrm{st}[{}^{\star}T \cap {}^{\star}\mathbb{R}_f] = \bar{T}$, per ogni $T \in \mathcal{T}$; ma ogni T è chiuso e quindi $\bar{T} = T$. Pertanto $r \in T$ per ogni $T \in \mathcal{T}$; cioè $r \in \cap \mathcal{T}$ e quindi $\cap \mathcal{T} \neq \emptyset$. □

Teorema 6.4.3 (Bolzano-Weierstrass). *Sia $T \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato e infinito. Esiste allora un punto di accumulazione per T.*

Dimostrazione. Essendo T limitato, per il Teorema 6.3.4(ii), ${}^{\star}T \subset {}^{\star}\mathbb{R}_f$; inoltre, essendo T infinito, per il Teorema 2.7.1, ${}^{\star}T \setminus T \neq \emptyset$ e quindi ${}^{\star}T$ ha elementi nonstandard. Sia allora b un suo elemento nonstandard. Ricordando che b è finito, possiamo considerare la sua parte standard $r = \mathrm{st}(b)$. Poichè, $b \in (\mu(r) \setminus \{r\}) \cap {}^{\star}T$, riesce $(\mu(r) \setminus \{r\}) \cap {}^{\star}T \neq \emptyset$. Allora, per il Teorema 6.3.1(v), r è di accumulazione per T. □

Parte III

Analisi Infinitesimale

Nella terza e ultima parte entriamo nel "cuore" dell'analisi infinitesimale occupandoci dello studio con tecniche nonstandard dei principali argomenti di analisi reale, classicamente svolti nei corsi universitari ricorrendo alla tecnica *epsilon-delta* (introdotta da Weierstrass, attorno al 1870, nelle sue lezioni [6]). Avremo così occasione di vedere come trovano rigorosa giustificazione, e quindi riabilitazione, le tecniche dimostrative basate sugli infinitesimi. Tecniche che sono state adoperate, come accennato nell'introduzione, largamente e con successo per un non breve periodo iniziale di ricerche e che hanno consentito di conseguire risultati di assoluto rilievo, avviando così, in modo fecondo, lo studio dell'analisi reale.

Lo scopo che ci proponiamo non è però quello di sviluppare tali argomenti in modo sistematico e completo, ma piuttosto quello di avviare il lettore all'impiego delle tecniche nonstandard che, come apparirà sempre più chiaramente nel corso dell'esposizione, risultano essere indiscutibilmente di grande efficacia. Per la soluzione di molti problemi, infatti, esse si rivelano molto più incisive delle ben note tecniche classiche.

Dopo queste considerazioni è naturale che lo studio venga qui limitato alla trattazione di alcuni argomenti di base. Perciò, abbiamo scelto solo argomenti riguardanti le funzioni reali di una variabile (anche se talvolta, capiterà di dover considerare anche funzioni di più variabili). Tutte le questioni affrontate vengono sviluppate in modo abbastanza esteso, certamente quanto basta ai fini appena dichiarati. La loro trattazione è condotta dando preliminarmente, come già fatto nella seconda parte, una caratterizzazione non standard della nozione (o nozioni) in esame, seguita poi da alcune applicazioni a titolo esemplificativo.

Tracciata a grandi linee la via che ci accingiamo a percorrere, passiamo ora a trattare l'argomento in modo dettagliato e rigoroso. Avvertiamo che nelle fasi dimostrative, di questo e dei prossimi capitoli, facciamo uso di semiformalizzazioni talvolta piuttosto sintetiche. Sulla base dell'esperienza sin qui acquisita non sarà solitamente difficile tuttavia, per il lettore, intuire il risultato che si dovrebbe ottenere, ricorrendo alla tecnica degli $\star$-concetti, anche in presenza di formalizzazioni lontane da quel dettaglio formale che consente

[6] Influenzato da queste lezioni, Heinrich E.Heine formula, nel suo *Die Elemente der Funktionenlehre* del 1872, la nozione di funzione continua nel modo seguente: Eine Function $f(x)$ heisst bei *einem bestimmten einzelnen Werthe* $x = X$ *continuirlich*, wenn, für jede noch so klein gegebene Grösse ϵ, eine andere positive Zahl η_0 von solcher Beschaffenheit existirt, dass für keine positive Grösse η, die kleiner als η_0 ist, der Zahlwerth von $f(X \pm \eta) - f(X)$ das ϵ überschreitet.

di applicare correttamente il Principio di trasferimento. Le dimostrazioni dettagliate vengono spesso lasciate al lettore come utile esercizio di verifica delle sue capacità di formalizzazione (indicando comunque, di massima, i teoremi relativi agli $\star$-concetti che vi intervengono).

Capitolo 7

Funzioni a valori reali

Passiamo ad una breve descrizione del contenuto del capitolo. La prima sezione è dedicata alla formulazione infinitesimale, ad esempio, delle nozioni di funzione periodica e di funzione monotona (nei suoi vari aspetti), sia dal punto di vista globale che locale.

Affrontiamo poi, nella seconda, l'importante aspetto della trasformazione delle funzioni elementari - razionali, trigonometriche, esponenziali e logaritmiche - provando che tutte conservano, nell'ambiente dei numeri $\star$-reali, le stesse proprietà delle corrispondenti funzioni reali.

Infine nell'ultima studiamo le principali proprietà delle $\star$-sommatorie, cioè delle trasformate delle sommatorie finite di numeri reali, constatando che verificano le stesse proprietà di quelle finite (commutativa, associativa, telescopica, ...).

7.1 Proprietà globali e locali delle funzioni

Iniziamo col completare i risultati generali del Teorema 3.7.2, studiando poi alcune nozioni di carattere globale (riferite cioè all'intero dominio) e locale (riferite cioè ad un intorno), relative alle funzioni reali di una variabile reale.

Teorema 7.1.1. *Siano $f, g : a \mapsto a'$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) *Sia α reale. Allora, ${}^\star(f \pm g) = {}^\star f \pm {}^\star g$, ${}^\star(f \cdot g) = {}^\star f \cdot {}^\star g$ e ${}^\star(\alpha f) = \alpha\, {}^\star f$ e ${}^\star(f + \alpha) = {}^\star f + \alpha$;*

(ii) $\Theta_f = \{r \in a \,|\, f(r) = 0\} \Rightarrow {}^\star\Theta_f = \{b \in {}^\star a \,|\, {}^\star f(b) = 0\} = \Theta_{{}^\star f}$. *Inoltre,* $\Theta_f \subset \Theta_{{}^\star f}$;

(iii) g *non nulla in* $a \Rightarrow {}^\star(1/g) = 1/{}^\star g$ *e* ${}^\star(f/g) = {}^\star f/{}^\star g$;

(iv) ${}^\star|f| = |{}^\star f|$.

Dimostrazione. (i) Le prime due uguaglianze sono un'immediata conseguenza del Teorema 3.7.2(ix) (con riferimento alle operazioni di addizione, differenza e moltiplicazione). Per quanto riguarda le altre, sia h la funzione su a costante di valore α. Risulta allora, per il Teorema 3.7.2(v), ${}^\star(\alpha f) = {}^\star(h \cdot f) = {}^\star h \cdot {}^\star f = \alpha {}^\star f$ e ${}^\star(f + h) = {}^\star f + {}^\star h = {}^\star f + \alpha$.

(ii) Osservato che la frase "$f(x) = 0$" è equivalente al metapredicato "u funzione e $y = u(x)$", ponendo $y = 0$ e $u = f$, otteniamo, per i Teoremi 3.3.4 e 3.6.4(xv), ${}^\star\Theta_f = \{b \in {}^\star a \mid \star\text{-}(0 = f(b))\} = \{b \in {}^\star a \mid {}^\star f(b) = 0\} = \Theta_{{}^\star f}$, ove l'ultima uguaglianza sussiste in quanto, per il Teorema 2.4.3(v), ${}^\star a$ è il dominio di ${}^\star f$. La seconda parte di (ii), segue dal Teorema 2.6.1(v), ricordato che $\star$ è una immersione.

(iii) Risulta $\Theta_g \subset \mathbb{R} \setminus a$ e quindi, per (ii) e il Teorema 2.3.3(i), $\Theta_{{}^\star g} \subset {}^\star\mathbb{R} \setminus {}^\star a$. Inoltre $1/g = \{(r, r') \in a \times a' \mid r' = 1/g(r)\}$. Considerata allora la semiformalizzazione $X(x, y)$:"$\exists y_1 \in a' \, (y = g(x) \, \mathrm{e} \, y_1 = 1/y)$" della $y = 1/g(x)$, otteniamo, tramite i Teoremi 3.6.1(iv)[1], 3.6.4(xv) e 3.6.7(v), $\star\text{-}X(x, y)$:"$\exists y_1 \in {}^\star a' \, (y = {}^\star g(x)$ e $y_1 = 1/y)$ e x, y interni" e quindi $\star\text{-}X(x, {}^\star g(x))$:"$\exists y_1 \in {}^\star a' \, (y_1 = 1/{}^\star g(x))$ e x interna". Risulta allora, per il Teorema 3.3.4,

$${}^\star(1/g) = \{(b, b') \in {}^\star a \times {}^\star a' \mid \star\text{-}X(b, b')\} = \{(b, b') \in {}^\star a \times {}^\star a' \mid b' = 1/{}^\star g(b)\} = 1/{}^\star g,$$

tenuto presente che, per il Teorema 2.4.3(v), ${}^\star a$ e ${}^\star a'$, sono, rispettivamente, il dominio e il codominio di ${}^\star g$.

Per quanto riguarda la seconda parte della tesi, basta osservare che, per (i), ${}^\star(f/g) = {}^\star(f \cdot (1/g)) = {}^\star f \cdot {}^\star(1/g) = {}^\star f/{}^\star g$.

(iv) Per il Teorema 3.7.2(vii) e la nota 4 del quinto capitolo, ${}^\star|f| = {}^\star(|\cdot| \circ f) = {}^\star|\cdot| \circ {}^\star f = |\cdot| \circ {}^\star f = |{}^\star f|$. □

Come preannunciato, passiamo ora a caratterizzare alcune nozioni di natura globale, sempre riferite alle funzioni. Ricordiamo, preliminarmente, che, nella Sezione 6.3, abbiamo caratterizzato, in termini nonstandard, gli insiemi limitati di numeri reali mediante il Teorema 6.3.4. Se ora teniamo presente che una funzione è limitata quando la sua imagine è un insieme limitato, a partire da quella caratterizzazione possiamo derivare immediatamente due corrispondenti caratterizzazioni anche per questa nozione. Ci limitiamo

[1] Avvertiamo che, per non appesantire l'esposizione citando, quasi ad ogni passo, i teoremi relativi agli $\star$-concetti di "uguaglianza" e di "appartenenza" (Teoremi 3.6.1(iii),(iv) e 3.6.4(i),(ii)), gli stessi non verranno richiamati nel seguito dell'esposizione.

a considerare, nella proposizione (i) del prossimo teorema, una delle due, quella che meglio interesserà nel seguito e che proviene dalla (ii) del teorema citato.

Teorema 7.1.2. *Siano $f, g : a \mapsto a'$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) f limitata $\Leftrightarrow \pi_2^2({}^\star f) \subset {}^\star\imath^{(r)}(0) \subset {}^\star\mathbb{R}_f$ per qualche r reale;

(ii) f crescente (decrescente, noncrescente, nondecrescente) $\Leftrightarrow {}^\star f$ crescente (decrescente, noncrescente, nondecrescente);

(iii) r minimo (massimo, estremo inferiore, estremo superiore) di $f \Leftrightarrow r$ minimo (massimo, estremo inferiore, estremo superiore) di ${}^\star f$;

(iv) Sia a un insieme simmetrico rispetto l'origine. Allora, f pari (dispari) $\Leftrightarrow {}^\star f$ pari (dispari);

(v) Sia a un segmento (iniziale, finale) o la retta reale. Allora, f periodica di periodo $p \Leftrightarrow {}^\star f$ periodica di periodo p. Risulta inoltre ${}^\star f(b) = {}^\star f(b+\nu p)$, per ogni $b \in {}^\star a$ e $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$.

Dimostrazione. (i) Segue dai Teoremi 2.4.3(iii) e 6.3.4(ii).

(ii) Conseguenza di PdT e del Teorema 3.6.6(iii),(iv).

(iii) Conseguenza di PdT e del Teorema 3.6.5(iv),(v).

(iv) Usando i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(xv) e 3.6.7(v), la dimostrazione discende facilmente dalle semiformalizzazioni riguardanti, rispettivamente, la polarità e disparità:

$$\forall x, y \in a\, \forall z_1, z_2 \in a' (y = -x \,\mathrm{e}\, z_1 = f(x) \,\mathrm{e}\, z_2 = f(y) \Rightarrow z_1 = z_2)$$
$$\forall x, y \in a\, \forall z_1, z_2 \in a' (y = -x \,\mathrm{e}\, z_1 = f(x) \,\mathrm{e}\, z_2 = f(y) \Rightarrow z_2 = -z_1).$$

(v) La frase "f periodica di periodo p" si formalizza con la:

$$\forall x, y \in a\, \forall z_1, z_2 \in a' (y = x + p \,\mathrm{e}\, z_1 = f(x) \,\mathrm{e}\, z_2 = f(y) \Rightarrow z_1 = z_2)$$

da cui otteniamo, tramite PdT e il Teorema 3.6.7(ii),

$$\forall x, y \in {}^\star a\, \forall z_1, z_2 \in {}^\star a' (y = x + p \,\mathrm{e}\, z_1 = {}^\star f(x) \,\mathrm{e}\, z_2 = {}^\star f(y) \Rightarrow z_1 = z_2).$$

Ne segue la prima parte della tesi.

Passando alla seconda, usiamo la dimostrazione per $\star$-induzione (Teorema 4.2.4(ii)), utilizzando il metapredicato $X(\nu; x) : {}^\star f(x) = {}^\star f(x + \nu p)$ che è formalizzabile nel linguaggio interno [2], in quanto interne (essendo standard) le entità

[2] Con la wff: $\sqcap y_1, y_2, y_3 \lessdot {}^\star a\, (\langle x, y_1\rangle \lessdot {}^\star f \wedge \langle \nu, p, y_2\rangle \lessdot \cdot \wedge \langle x, y_2, y_3\rangle \lessdot + \rightarrow y_1 = y_3)$.

${}^\star f, +, \cdot, p$. Poichè per $\nu = 0$ la tesi è banale, assumiamo che $X(\nu; x)$ sussista per ν e proviamo che rimane valido anche per $\nu + 1$. Ora, ${}^\star f(x + (\nu + 1)p) = {}^\star f((x + \nu p) + p) = {}^\star f(x + \nu p) = {}^\star f(x)$, la penultima uguaglianza valendo perchè ${}^\star f$ è periodica di periodo p e l'ultima per l'ipotesi $\star$-induttiva. Ne segue la tesi. □

Concludiamo fornendo le caratterizzazioni di alcune nozioni di natura locale, sempre riferite alle funzioni.

Teorema 7.1.3. *Siano f una funzione di dominio a e $r \in a$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) f limitata in $r \Leftrightarrow {}^\star f[\mu(r)] \subset {}^\star\mathbb{R}_f$;

(ii) f crescente in $r \Leftrightarrow {}^\star f(b_1) < f(r) < {}^\star f(b_2)$ per ogni $b_1, b_2 \in \mu(r) \cap {}^\star a$ tali che $b_1 < r < b_2$;

(iii) f decrescente in $r \Leftrightarrow {}^\star f(b_1) > f(r) > {}^\star f(b_2)$ per ogni $b_1, b_2 \in \mu(r) \cap {}^\star a$ tali che $b_1 < r < b_2$;

(iv) r massimo relativo di $f \Leftrightarrow {}^\star f(b) \geq f(r)$ per ogni $b \in \mu(r) \cap {}^\star a$;

(v) r minimo relativo di $f \Leftrightarrow {}^\star f(b) \geq f(r)$ per ogni $b \in \mu(r) \cap {}^\star a$.

Dimostrazione. (i) Sia intanto f limitata. Esiste allora un intorno U di r tale che f risulta limitata in $U \cap a$. Ne segue, tenuto conto dell'uguaglianza $f[U] = f[U \cap a]$ e dei Teoremi 2.4.3(iv), 3.7.2(iii) e 7.1.2(i), ${}^\star f[{}^\star U] = {}^\star(f[U]) = {}^\star(f[U \cap a]) = {}^\star f[{}^\star(U \cap a)] \subset {}^\star\mathbb{R}_f$. Inoltre, per il Teorema 6.1.4, $\mu(r) \subset {}^\star U$. Dunque ${}^\star f[\mu(r)] \subset {}^\star f[{}^\star U] \subset {}^\star\mathbb{R}_f$.

Sia ora ${}^\star f[\mu(r)] \subset {}^\star\mathbb{R}_f$. Dato ω, consideriamo l'insieme $a_1 = \{b \in {}^\star\mathbb{R} \,|\, b \in {}^\star a \Rightarrow -\omega < {}^\star f(b) < \omega\}$ che è interno in quanto il metapredicato che lo descrive è, come facilmente si vede, formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno. Essendo $\mu(r) \subset a_1$, esiste allora, per il Principio dell'intorno limitato 6.1.3(i), $\delta > 0$ reale tale che ${}^\star\imath^{(\delta)}(r) \subset a_1$. Posto $I = \imath^{(\delta)}(r)$, risulta ${}^\star I \subset a_1$ e quindi ${}^\star(f[I]) = {}^\star f[{}^\star I] \subset]-\omega, \omega[$, cioè ${}^\star(f[I])$ limitato in ${}^\star\mathbb{R}$. Per il Teorema 6.3.4(i), $f[I]$ è dunque limitato in $\mathbb{R}$, cioè f è limitata in r.

(ii) + (iii) Poichè le due proposizioni si provano in modo del tutto analogo, ci limitiamo a verificare la prima. Dire "f crescente in r" significa affermare che esiste un intorno di r tale che, in ogni suo elemento appartenente ad a che precede (segue) r, la funzione f è minore (maggiore) di $f(r)$. Trattasi quindi di una nozione di carattere locale, che si esprime con con il metapredicato $X(u)$: "$(u < r \Rightarrow f(u) < f(r))$ e $(u > r \Rightarrow f(u) > f(r))$". Tramite il Teorema 6.2.1(i), si ha la tesi.

(iv) + (v) Anche in questo caso le due proposizioni si provano in modo del tutto analogo, Ci limitiamo pertanto a verificare la prima. Dire "r massimo relativo di f" significa affermare che esiste un intorno di r tale che, in ogni suo elemento appartenente ad a, la funzione f non è maggiore di $f(r)$. Trattasi quindi di una nozione di carattere locale, che si esprime con con il metapredicato $X(u) : f(u) \leq f(r)$. Ne segue, tramite il Teorema 6.2.1(i), la tesi. □

7.2 Trasformate delle funzioni elementari

Siamo ora in grado di iniziare lo studio delle trasformate delle principali funzioni elementari di una variabile reale. Abbiamo già visto, per il Teorema 2.6.2(ii), che sono estensioni in ${}^\star\mathbb{R}$ delle funzioni di partenza. Vedremo, tra poco, che trattasi di estensioni particolarmente "fedeli" alle funzioni originarie; di quelle infatti conservano, nell'ambiente ampliato, le principali proprietà, a cominciare da quelle che le caratterizzano.

Le funzioni che prendiamo in considerazione sono: le funzioni razionali, trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

1. Potenze con esponente naturale Siamo qui interessati alle trasformate delle potenze con esponente naturale di dominio i numeri reali.[3] Risulta che *tali trasformate sono le potenze con esponente naturale di dominio i numeri $\star$-reali.* Infatti, dato il numero naturale n, trasformando si ottiene, per il Teorema 3.7.2(v),(ix), ${}^\star p_0 = 1$ e ${}^\star p_{n+1} = {}^\star p_n\, {}^\star p_1$ che è la definizione induttiva della potenza n-sima in ${}^\star\mathbb{R}$. Viene allora naturale usare anche per le potenze $\star$-reali la medesima notazione $p_n(x) = x^n$ delle potenze reali, porre cioè ${}^\star p_n(x) = x^n$ per ogni x numero $\star$-reale.

2. Funzioni razionali intere Sia $P = a_0 + a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$ una funzione razionale intera di grado n, con coefficienti reali definita in $\mathbb{R}$. Allora, *${}^\star P$ è la funzione razionale intera di grado n con i medesimi coefficienti, ma definita in ${}^\star\mathbb{R}$.* Infatti, procedendo per induzione, per $n = 0$ l'uguaglianza è banale, essendo P una costante. Assumendo poi ${}^\star P = a_0 + a_1 {}^\star p_1 + \cdots + a_n {}^\star p_n$,

[3] Ricordiamo che, considerato un monoide commutativo (in notazione moltiplicativa) $M(\cdot; 1)$, s'introduce in M la potenza n-sima p_n ricorrendo alla definizione per induzione e ponendo $p_0 = 1$ e $p_{n+1} = p_n\, p_1$ per ogni $n \geq 0$. Da queste due proprietà caratteristiche si deducono poi le due fondamentali uguaglianze $p_{n+m} = p_n\, p_m$ e $p_{mn} = p_m \circ p_n$.

otteniamo, per il Teorema 7.1.1(i),

$$\begin{aligned}
&{}^\star(a_0 + a_1p_1 + \cdots + a_np_n + a_{n+1}p_{n+1}) \\
&\qquad = {}^\star((a_0 + a_1p_1 + \cdots + a_np_n) + a_{n+1}p_{n+1}) \\
&\qquad = {}^\star(a_0 + a_1p_1 + \cdots + a_np_n) + {}^\star(a_{n+1}p_{n+1}) \\
&\qquad = {}^\star P + a_{n+1}{}^\star p_{n+1} = (a_0 + a_1{}^\star p_1 + \cdots + a_n{}^\star p_n) + a_{n+1}{}^\star p_{n+1}.
\end{aligned}$$

Dunque, ${}^\star P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ per ogni x numero $\star$-reale.

3. Funzioni razionali fratte Siano P, Q due funzioni razionali intere definite in $\mathbb{R}$ e Θ_Q l'insieme degli zeri di Q. Allora, ${}^\star(P/Q) = {}^\star P/{}^\star Q$ *è la funzione razionale fratta definita in* ${}^\star\mathbb{R}\backslash\Theta_Q$. Infatti, per il Teorema 7.1.1(ii),(iii), ${}^\star\Theta_Q = \Theta_{{}^\star Q}$ e ${}^\star(P/Q) = {}^\star P/{}^\star Q$. Inoltre, per il Teorema 2.3.3(v), $\Theta_{{}^\star Q} = \Theta_Q$, essendo Θ_Q un insieme finito.

Sia ora $P = a_0 + a_1p_1 + \cdots + a_np_n$ e $Q = a'_0 + a'_1p_1 + \cdots + a'_mp_m$. Allora, per ogni x $\star$-reale tale che $Q(x) \neq 0$ risulta

$$\begin{aligned}
{}^\star(P/Q)(x) &= \frac{{}^\star(a_0 + a_1p_1(x) + \cdots + a_np_n(x))}{{}^\star(a'_0 + a'_1p_1(x) + \cdots + a'_mp_m(x))} \\
&= = \frac{a_0 + a_1{}^\star p_1(x) + \cdots + a_n{}^\star p_n(x)}{a'_0 + a'_1{}^\star p_1(x) + \cdots + a'_m{}^\star p_m(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{a'_0 + a'_1x + \cdots + a'_mx^m}
\end{aligned}$$

e quindi l'espressione di ${}^\star(P/Q)(x)$ è formalmente uguale a quella di $(P/Q)(x)$. *Il valore di* ${}^\star(P/Q)(x)$ *si ottiene dunque eseguendo gli stessi calcoli richiesti per determinare* $(P/Q)(x)$*; calcoli che vengono però effettuati nell'ambiente ampliato, partendo con un* x $\star$*-reale e operando con le relative* $\star$*-operazioni razionali e le* $\star$*-potenze.*[4]

4. Funzioni trigonometriche Le funzioni sin, cos sono funzioni suriettive di $\mathbb{R}$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Le loro estensioni ${}^\star\sin$, ${}^\star\cos$ sono, per i Teoremi 2.4.3(iv), 3.7.2(i) e 6.1.1(i), funzioni suriettive di ${}^\star\mathbb{R}$ in $[-1, 1] \subset {}^\star\mathbb{R}$.

[4] È facile rendersi conto che l'espressione formale ottenuta resta quella delle funzioni di partenza anche per le trasformate delle funzioni razionali di più variabili reali. Lo si può provare con procedimento induttivo dopo aver completato le considerazioni precedenti con l'osservazione che, usando il Teorema 7.1.1(i), si ottiene ${}^\star(p_n(x)p_m(y)) = {}^\star p_n(x)\,{}^\star p_m(y) = x^ny^m$. Pertanto, anche i valori delle funzioni razionali di più variabili reali e delle loro trasformate si ottengono eseguendo formalmente gli stessi calcoli, rispettivamente con operazioni e corrispondenti $\star$-operazioni.

Inoltre, tenuto conto del Teorema 7.1.2(v), entrambe risultano periodiche di periodo $p = 2\pi$. Allora, lo studio delle loro proprietà può essere limitato ad un arbitrario intervallo di ${}^\star\mathbb{R}$ di ampiezza pari al periodo.

La funzione ${}^\star\cos$ conviene studiarla nell'intervallo ${}^\star]-\pi,\pi] =]-\pi,\pi] \subset {}^\star\mathbb{R}$, essendo $]-\pi,\pi] \subset \mathbb{R}$ l'abituale intervallo di studio del coseno. Quest'ultimo risulta prima crescente, in $]-\pi, 0]$, e poi decrescente, in $[0,\pi]$. Lo stesso accade allora, per il Teorema 7.1.2(ii), per ${}^\star\cos$ nei corrispondenti intervalli di ${}^\star\mathbb{R}$. Sfruttando la periodicità possiamo ora trasportare queste proprietà sull'intero insieme e concludere che ${}^\star\cos$ è crescente in $](-1 \pm 2\nu)\pi, \pm 2\nu\pi]$ e decrescente in $[\pm 2\nu\pi, (1 \pm 2\nu)\pi]$, per ogni ν $\star$-naturale.

Determiniamo ora l'insieme degli zeri di ${}^\star\cos$. La funzione cos si annulla solo in $\pm\pi/2$. Per Teoremi 2.3.3(v) e 7.1.1(ii), la trasformata si annulla, in $]-\pi,\pi]$, solo in $\pm\pi/2$. Pertanto, trasportando per periodicità si ottiene che l'insieme degli zeri di ${}^\star\cos$ è costituito da tutti e soli i numeri $\star$-reali del tipo $\pi/2 \pm \nu\pi$, per ogni ν $\star$-naturale.

Veniamo ora allo studio dei massimi e minimi. La funzione cos è massima in 0 (con valore 1) e minima in π (con valore -1). Per il Teorema 7.1.2(iii), 0 e π sono massimo e minimo di ${}^\star\cos$, rispettivamente. Per la solita periodicità, risulta allora che $\pm 2\nu\pi$ è un massimo e che $(1 \pm 2\nu)\pi$ è un minimo, per ogni ν $\star$-naturale.

Passando alla funzione ${}^\star\sin$, non conviene più studiarla, come per ${}^\star\cos$, nell'intervallo $\star$-reale $]-\pi,\pi]$, in quanto in quello reale $]-\pi,\pi]$ il seno cambia monotonia due volte e non una soltanto, come avviene per la funzione cos. A questo requisito nei riguardi della funzione sin, risponde invece l'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$. Pertanto, conviene basare su di esso lo studio della funzione ${}^\star\sin$. Con argomentazioni analoghe a quelle svolte per ${}^\star\cos$ è facile allora provare che, per ogni ν, la funzione $\star$-reale ${}^\star\sin$:
− è crescente nell'intervallo $]-\frac{\pi}{2} \pm 2\nu\pi, \frac{\pi}{2} \pm 2\nu\pi]$, decrescente nell'intervallo $[\frac{\pi}{2} \pm 2\nu\pi, \frac{3}{2}\pi \pm 2\nu\pi]$ e si annulla in tutti e soli i punti $\pm\nu\pi$;
− ha massimo (e vale 1) nei punti $\frac{\pi}{2} \pm 2\nu\pi$ e minimo (e vale -1) nei punti $-\frac{\pi}{2} \pm 2\nu\pi$.

Anche il comportamento delle trasformate delle funzioni tangente $\mathrm{tg} = \sin/\cos$ e cotangente $\mathrm{cotg} = \cos/\sin$ è analogo a quello delle funzioni trigonometriche di provenienza. Infatti, sono periodiche di periodo $p = \pi$, superiormente e inferiormente illimitate, prive di massimi e minimi relativi. Inoltre, per il Teorema 7.1.1(iii), ${}^\star\mathrm{tg} = {}^\star\sin/{}^\star\cos$ e ${}^\star\mathrm{cotg} = {}^\star\cos/{}^\star\sin$.

Com'è noto, tutte le ben note formule trigonometriche (di sottrazione, di duplicazione, di prostaferesi, ...), si possono ottenere nel campo reale, a partire dalle tre relazioni:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{7.1}$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \tag{7.2}$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{7.3}$$

valide per ogni x, y reali. Nelle relative dimostrazioni vengono naturalmente sfruttate le proprietà delle operazioni razionali tra numeri reali. Di tali proprietà godono, com'è noto, anche le corrispondenti $\star$-operazioni tra numeri $\star$-reali. Risulta allora del tutto evidente che sarà sufficiente verificare che tali relazioni sussistono anche per le funzioni ${}^\star\sin$ e ${}^\star\cos$, per dedurre che *le principali formule trigonometriche valgono anche nell'ambito degli $\star$-reali, sostituendo le funzioni coinvolte con le rispettive trasformate.* Le relative verifiche si ottengono ricorrendo, come ormai d'abitudine, alla tecnica degli $\star$-concetti. A titolo d'esempio, proviamo che (7.3) si trasforma nell'uguaglianza ${}^\star\cos(x + y) = {}^\star\cos x\, {}^\star\cos y - {}^\star\sin x\, {}^\star\sin y$. A tal fine, consideriamo il metapredicato finitamente limitabile:

$$X(x, y) : \forall u, u_1, u_2, z\, (u = x + y \,\mathrm{e}\, z = \cos u \,\mathrm{e}\, (\cos x, \cos y, \mathrm{i}_{\mathbb{R}}(u_1)) \in \cdot \\ \mathrm{e}\, (\sin x, \sin y, \mathrm{i}_{\mathbb{R}}(u_2)) \in \cdot \Rightarrow z = u_1 - u_2).$$

Usando i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(xv),(xvi), 3.6.7(ii), 3.7.2(iv), otteniamo

$$\star\text{-}X(x, y) : \forall u, u_1, u_2, z\, (u = x + y \,\mathrm{e}\, z = {}^\star\cos u \\ \mathrm{e}\, ({}^\star\cos x, {}^\star\cos y, \mathrm{i}_{{}^\star\mathbb{R}}(u_1)) \in \cdot \;\mathrm{e}\, ({}^\star\sin x, {}^\star\sin y, \mathrm{i}_{{}^\star\mathbb{R}}(u_2)) \in \cdot \\ \Rightarrow z = u_1 - u_2) \text{ e } x, y \text{ interne}$$

e quindi, $\star$-$X(x, y)$: ${}^\star\cos(x + y) = {}^\star\cos x\, {}^\star\cos y - {}^\star\sin x\, {}^\star\sin y$. Ne segue, mediante il Teorema 3.3.2 (nota 9), la tesi.

Da quanto provato, trova allora ulteriore giustificazione la convenzione di indicare le trasformate delle funzioni trigonometriche con il medesimo simbolo delle funzioni che le originano.

5. Funzioni potenza ed esponenziali Le proprietà delle trasformate delle potenze a esponente reale qualsiasi e delle funzioni esponenziali possono essere ottenute tramite lo studio della trasformata della funzione a valori reali $\exp(x, y) = x^y$ di dominio $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Funzione che verifica le tre proprietà caratteristiche delle potenze:

$$x^{y_1}x^{y_2} = x^{y_1+y_2} \tag{7.4}$$
$$(x^{y_1})^{y_2} = x^{y_1 y_2} \tag{7.5}$$
$$x_1^y x_2^y = (x_1x_2)^y. \tag{7.6}$$

Dai Teoremi 2.3.1, 2.4.3(i),(v) e 2.6.2(ii) (notato che $\mathbb{R}^+$ è il segmento superiore aperto di origine lo zero), otteniamo intanto che ${}^\star\exp$ è un'estensione di exp, di dominio ${}^\star\mathbb{R}^+ \times {}^\star\mathbb{R}$ e codominio ${}^\star\mathbb{R}$. Inoltre, come ora proviamo, verifica nell'ambiente ampliato le stesse proprietà caratteristiche sopra elencate.

Iniziamo col provare la prima che, usando la notazione exp, diventa $\exp(x, y_1) \cdot \exp(x, y_2) = \exp(x, y_1 + y_2)$. Sussiste allora la frase:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+\, \forall y_1, y_2, u, v \in \mathbb{R}\, ((\exp(x, y_1), \exp(x, y_2), \mathrm{i}_{\mathbb{R}}(u)) \in \cdot \\ \text{e}\, v = y_1 + y_2 \Rightarrow u = \exp(x, v))$$

e quindi, per i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.4(xv),(xvi), 3.6.7(ii) e 3.7.2(iv), anche la proposizione:

$$\forall x \in {}^\star\mathbb{R}^+\, \forall y_1, y_2, u, v \in {}^\star\mathbb{R}\, (({}^\star\exp(x, y_1), {}^\star\exp(x, y_2), \mathrm{i}_{{}^\star\mathbb{R}}(u)) \in \cdot \\ \text{e}\, v = y_1 + y_2 \Rightarrow u = {}^\star\exp(x, v)).$$

Dunque, per ogni $x \in {}^\star\mathbb{R}^+$ e $y_1, y_2 \in {}^\star\mathbb{R}$, risulta ${}^\star\exp(x, y_1)\, {}^\star\exp(x, y_2) = {}^\star\exp(x, y_1 + y_2)$, cioè l'uguaglianza (7.4).

Osservato che (7.5), (7.6) si possono scrivere come $\exp(\exp(x, y_1), y_2) = \exp(x, y_1y_2)$ e $\exp(x_1, y)\exp(x_2, y) = \exp(x_1x_2, y)$, rispettivamente, con procedimento analogo a quello seguito per provare (7.4), si ottiene che sussistono le ${}^\star\exp({}^\star\exp(x, y_1), y_2) = {}^\star\exp(x, y_1y_2)$ e ${}^\star\exp(x_1, y){}^\star\exp(x_2, y) = {}^\star\exp(x_1x_2, y)$, per ogni $x, x_1, x_2 \in {}^\star\mathbb{R}^+$ e $y, y_1, y_2 \in {}^\star\mathbb{R}$.

Le proprietà ora provate giustificano, anche in questo caso, l'uso della notazione del caso reale anche in relazione all'estensione ${}^\star\exp$. Poniamo quindi ${}^\star\exp(x, y) = x^y$. Inoltre, appare naturale chiamare:
– **esponenziali a base $\star$-reale** le restrizioni del tipo ${}^\star\exp|_{\{b\}\times{}^\star\mathbb{R}}$ con $b \in {}^\star\mathbb{R}^+$, cioè le funzioni $\star$-reali $x \mapsto b^x$ di dominio ${}^\star\mathbb{R}$;
– **potenze ad esponente $\star$-reale qualsiai** le restrizioni del tipo ${}^\star\exp|_{{}^\star\mathbb{R}^+\times\{b\}}$ con $b \in {}^\star\mathbb{R}$, cioè le funzioni $\star$-reali $x \mapsto x^b$ di dominio ${}^\star\mathbb{R}^+$.

In forza del Teorema 2.5.2(ix) queste restrizioni sono funzioni interne. Quando b è reale sono addirittura standard, perchè allora si possono ottenere anche come trasformate delle corrispondenti funzioni reali. Infatti, usando i Teoremi 2.3.3(v), 2.4.3(i) e 3.7.2(iii), otteniamo ${}^\star(\exp|_{\{r\}\times\mathbb{R}}) = {}^\star\exp|_{\{r\}\times{}^\star\mathbb{R}}$ e ${}^\star(\exp|_{\mathbb{R}^+\times\{r\}}) = {}^\star\exp|_{{}^\star\mathbb{R}^+\times\{r\}}$.

Per quanto riguarda l'imagine degli esponenziali e delle potenze (a esponente qualsiasi) $\star$-reali, esse si riducono a $\{1\}$ nei due casi banali $b = 1$ e $b = 0$, rispettivamente. Sono invece ${}^\star\mathbb{R}^+$ per gli esponenziali e ${}^\star\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ per le potenze, in tutti gli altri casi. Lo si prova subito ricorrendo alle omonime proprietà delle relative funzioni reali e al Teorema 3.7.2(iii).

Passando a considerare il comportamento monotono, risulta:
− la funzione esponenziale di base $b \in {}^\star\mathbb{R}^+$ è decrescente, se $0 < b < 1$, costante (con valore 1), se $b = 1$ e crescente, se $b > 1$;
− la funzione potenza di esponente $b \in {}^\star\mathbb{R}$ è decrescente, se $b < 0$, costante (con valore 1), se $b = 0$ e crescente, se $b > 0$.
Tutti i sei casi considerati si provano con procedimenti analoghi. Ci limitiamo qui a verificare la decrescenza della funzione ${}^\star\exp(b, x)$ nel caso $0 < b < 1$. Tenuto conto che tale proprietà sussiste per la funzione $\exp(b, x)$, otteniamo, tramite PdT e i Teoremi 3.7.2(iii) e 6.1.1, ${}^\star(f|_{]0,1[}) = {}^\star f|_{{}^\star]0,1[} = {}^\star f|_{]{}^\star0,{}^\star1[}$ e quindi, per il Teorema 7.1.2(ii), la tesi.

In conclusione, *le funzioni esponenziali e le potenze $\star$-reali, conservano le proprietà delle omonime funzioni reali.*

6. Funzioni logaritmiche Le funzioni esponenziali $\star$-reali di base $b \neq 1$ sono, come visto, monotone in senso stretto, di dominio ${}^\star\mathbb{R}$ e imagine ${}^\star\mathbb{R}^+$. Sono dunque invertibili e le loro inverse sono, ovviamente, monotone in senso stretto (decrescenti, se $b < 1$, e crescenti, se $b > 1$), di dominio ${}^\star\mathbb{R}^+$ e imagine ${}^\star\mathbb{R}$. In analogia al caso reale, chiamiamo **logaritmo di base** b l'inversa di $\exp(b, \cdot)$ e la indichiamo con la notazione $\log_b$, cioè con la stessa notazione che si usa nel caso dei logaritmi di base reale (in accordo con la convenzione fatta nel paragrafo 2.6). Questa terminologia è suffragata dal fatto che queste funzioni inverse verificano le tre proprietà caratteristiche dei logaritmi reali, e quindi anche a tutte le usuali proprietà che da queste derivano. Sussistono infatti le proposizioni:

$$\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y; \tag{7.7}$$

$$\log_b(x^y) = y\,\log_b x \tag{7.8}$$

$$\log_{b_1} y = \log_{b_1} b_2\,\log_{b_2} y \tag{7.9}$$

che possono essere lette sia in termini reali che $\star$-reali. Le relative dimostrazioni, nell'ipotesi $\star$-reale, sono del tutto analoghe a quelle, ben note, fatte nel caso reale e le lasciamo al lettore come esercizio.

I logaritmi $\star$-reali sono, per il Teorema 2.5.2(v), funzioni interne, in quanto inverse di funzioni interne. In particolare, se la base è reale, ${}^\star\log_r$ è una funzione standard, essendo, come facilmente si verifica, la trasformata della funzione $\log_r$; basta ricordare che, come visto poc'anzi, la trasformata della funzione esponenziale reale di base r è la funzione esponenziale $\star$-reale di base r e che, per il Teorema 3.7.2(ii), l'inversa di quest'ultima ($\log_r$ $\star$-reale) è allora la trasformata dell'inversa della prima ($\log_r$ reale).

Concludiamo osservando che anche le potenze ad esponente $\star$-reale diverso da zero sono invertibili, Esse non danno luogo, però, a una nuova famiglia di funzioni, perchè l'insieme delle loro inverse, come accade del resto già nel caso reale, viene a coincidere con quello delle potenze.

7.3 Trasformata della sommatoria

Nell'analisi classica le nozioni di serie e di integrale vengono introdotte utilizzando come strumento la *sommatoria*, cioè la somma di un numero finito di termini. Com'è facile immaginare, lo strumento adatto all'introduzione della stessa nozione con tecniche nonstandard, sarà una sua estensione. È questo, appunto, l'argomento della sezione che è dedicata allo studio delle proprietà della trasformata della somma finita.

1. Sequenze Chiamiamo **sequenza** una qualsiasi applicazione s di dominio un intervallo limitato di numeri naturali.[5] Inoltre, dato un qualunque insieme C, per **sequenza in** C (a valori in C) intendiamo ogni sequenza avente come codominio l'insieme C.

Ciò puntualizzato, passiamo a individuare lo $\star$-concetto ad essa relativo, che introduce la nozione di $\star$-sequenza. A tal fine, consideriamo la frase:

$$X(x) : \exists y_1, y_2 \in \mathbb{N}\, \forall z (x \,\text{applicazione e}\, y_1 \leq y_2 \,\text{e}\, z = [y_1, y_2] \Rightarrow z = \pi_1^2(x))$$

[5] Nel dare la nozione di sequenza abbiamo focalizzato l'attenzione sul dominio della applicazione s, richiedendo che sia un intervallo limitato dei naturali. Questa scelta, s'intende, risponde più a motivi di comodità che di necessità. Invero, nella nozione di sequenza quello che importa veramente è che il suo dominio sia finito. In generale, pertanto, si chiamano sequenze tutte le applicazioni di dominio finito. Poichè ogni insieme finito può essere messo in corrispondenza biunivoca con un intervallo limitato dei numeri naturali, la definizione proposta è chiaramente equivalente a quella generale.

finitamente limitabile. Allora, tramite i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(v),(x) e 3.6.5(ii),(vi), risulta:

$$\begin{aligned} \star\text{-}X(x) \quad : \quad & \exists y_1, y_2 \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall z (x \,\text{applicazione e}\, y_1 \leq y_2 \,\text{e}\, z = [y_1, y_2] \\ & \Rightarrow z = \pi_1^2(x)) \text{ e } x \text{ interna.} \end{aligned}$$

Ne segue, dunque, che:
− *σ è una* **$\star$-sequenza** *se e solo se σ è un'applicazione interna di dominio un intervallo limitato di* ${}^\star\mathbb{N}$ (che può essere sia finito che infinito).

In modo del tutto analogo si constata che lo $\star$-concetto relativo a "sequenze in $C \in \hat{A}$", individua le **$\star$-sequenze in** ${}^\star C \in \mathcal{I}$, cioè le applicazioni *interne* di dominio un intervallo limitato di ${}^\star\mathbb{N}$ e codominio ${}^\star C$.

Nel seguito ci interessiamo quasi esclusivamente di sequenze di numeri reali (a valori in $\mathbb{R}$) e, corrispondentemente, di $\star$-sequenze di numeri $\star$-reali (a valori in ${}^\star\mathbb{R}$). In questo contesto, ha allora senso prendere in considerazione le funzioni che si ottengono come loro somma, prodotto o rapporto. Interessa osservare, in proposito, che dette funzioni sono delle sequenze, le prime (ovvio), e $\star$-sequenze, le seconde. Più in dettaglio, per quest'ultime sussiste la proposizione seguente.

Lemma 7.3.1. *Siano σ, σ' due $\star$-sequenze in ${}^\star\mathbb{R}$ aventi lo stesso dominio. Sono allora $\star$-sequenze le funzioni: $b \cdot \sigma$ con b numero $\star$-reale, $\sigma \pm \sigma'$, $\sigma \cdot \sigma'$ e, se σ'* è *ovunque non nulla, anche σ/σ'.*[6]

Dimostrazione. Tutte le cinque applicazioni considerate hanno per dominio un intervallo limitato I di numeri $\star$-naturali. Per provare che sono delle $\star$-sequenze basta allora verificare che trattasi di applicazioni interne.

Le dimostrazioni sono analoghe in tutti i casi. È sufficiente perciò fornire la prova per uno solo di essi. Lo facciamo per $\sigma + \sigma'$. Risulta $\sigma + \sigma' = \{(u, v) \in I \times {}^\star\mathbb{R} \mid v = \sigma(u) + \sigma'(u)\}$. Essendo, per il Teorema 4.2.3(ii), I un'entità interna e la frase "$v = \sigma(u) + \sigma'(u)$" un metapredicato formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno[7], tramite il Teorema 2.5.2(ii), si ha la tesi. □

Utili risultano nel seguito anche le due proposizioni seguenti che sussistono con riferimento ad una $\star$-sequenza di elementi qualsiasi. In particolare, la

[6] Il teorema si può generalizzare con riferimento a due applicazioni interne f, f' aventi lo stesso dominio e a valori $\star$-reali. In questo caso si prova che sono interne anche le applicazioni $f \pm f', f \cdot f'$ e f/f' (f' ovunque non nulla). La dimostrazione coincide con quella concernente le sequenze, sostituendo naturalmente σ, σ' con f, f', rispettivamente.

[7] Con la wff: $\sqcup y, y' \lessdot {}^\star\mathbb{R}\, (\langle u, y\rangle \lessdot \sigma \wedge \langle u, y'\rangle \lessdot \sigma' \wedge \langle y, y', v\rangle \lessdot +)$.

seconda mette in evidenza che traslando gli indici di una $\star$.-sequenza si ottiene ancora una $\star$-sequenza.

Lemma 7.3.2. *Sia σ una $\star$-sequenza. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Sia f un'applicazione interna tale che esista $f \circ \sigma$. Allora $f \circ \sigma$ è una $\star$-sequenza;

(ii) Sia $I = [\nu, \nu + \nu']$ il dominio di σ. Allora, l'applicazione τ tale che $\tau_i = \sigma_{\nu+i}\,(i = 0, \ldots, \nu')$, è una $\star$-sequenza.[8]

DIMOSTRAZIONE. (i) Osservato che il dominio di $f\circ\sigma$ coincide con quello di σ, che è un intervallo limitato di ${}^\star\mathbb{N}$, basta verificare che $f\circ\sigma$ è interna. Ciò è conseguenza immediata del Teorema 2.5.2(vii) (σ e f sono interne).

(ii) Poichè il dominio $J = [0, \nu]$ è, per il Lemma 4.2.3(ii), interno, basta provare che τ è una sequenza interna. Dalla $\tau = \{(u, v) \in J \times \pi_2^2(\sigma) \mid v = \sigma_{\nu+u})\}$, otteniamo, per il Teorema 2.5.2(ii),(iii), la tesi.[9] □

2. Sommatorie Passiamo ora a definire la nozione di sommatoria (o somma finita). Indicato, a tal fine, con Σ l'insieme delle *sequenze reali* (a valori in $\mathbb{R}$), chiamiamo **sommatoria** l'applicazione $\mathtt{s}$, di Σ in $\mathbb{R}$, tale che alla sequenza reale $s = (s_i)_{i\in I}$, definita nell'intervallo $I = [n, m] \subset \mathbb{N}$ con $n \leq m$, associa il numero reale $\mathtt{s}(s)$ così definito:

$$\mathtt{s}(s) = \begin{cases} s_m & \text{se } n = m \\ \mathtt{s}(s|_{[n,m-1]}) + s_m & \text{se } n < m \end{cases}.^{10} \qquad (7.10)$$

Siamo ora in grado d'introdurre e analizzare la nozione di **$\star$-sommatoria**. Si tratta di studiare, per il Teorema 2.4.3(iv), l'applicazione ${}^\star\mathtt{s}$ di ${}^\star\Sigma$ in ${}^\star\mathbb{R}$. A tal fine, il prossimo teorema, fornisce sia di quali entità risulta formato ${}^\star\Sigma$, che quale sia l'immagine in ${}^\star\mathbb{R}$, tramite ${}^\star\mathtt{s}$, di ogni suo elemento.

[8] S'intende facilmente, e lo si dimostra in modo analogo, che risulta una $\star$-sequenza di dominio $[0, \nu']$ anche l'applicazione τ' definita dalla $\tau'_i = \sigma_{\nu+\nu'-i}$, per ogni $i = 0, \ldots, \nu'$.

[9] Usando la wff limitata del linguaggio interno: $\sqcup z \lessdot {}^\star\mathbb{N}\,(\langle \nu, u, z\rangle \lessdot + \wedge \langle z, v\rangle \lessdot \sigma)$.

[10] La definizione data è un esempio di definizione per induzione del composto di un numero finito di termini, che viene ottenuto, operando in modo iterato, con un'operazione binaria associativa qualsiasi. È chiaro come, in questo contesto, possa aver interesse di estendere questa definizione anche nel caso del composto di un numero *finito* di numeri $\star$-reali, operando mediante la $\star$-addizione. A tal fine, basta riscrivere la definizione in oggetto sostituendo $\mathbb{R}$ con ${}^\star\mathbb{R}$ e "reale" con "$\star$-reale".

Lemma 7.3.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) L'insieme ${}^\star\Sigma$ *è costituito delle* $\star$*-sequenze a valori negli* $\star$*-reali, ovvero delle applicazioni interne* σ *di dominio un intervallo limitato di* ${}^\star\mathbb{N}$ *e codominio* ${}^\star\mathbb{R}$*;*

(ii) Ogni sequenza di numeri reali è anche una $\star$*-sequenza di numeri* $\star$*-reali; cioè* $\Sigma \subset {}^\star\Sigma$*;*

(iii) La trasformata ${}^\star\mathtt{s}$ *è l'applicazione di* ${}^\star\Sigma$ *in* ${}^\star\mathbb{R}$ *tale che, alla* $\star$*-sequenza* $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$*, con* $I = [\nu, \nu'] \subset {}^\star\mathbb{N}$ *e* $\nu \leq \nu'$*, associa il numero* $\star$*-reale:*

$$
{}^\star\mathtt{s}(\sigma) = \begin{cases} \sigma_{\nu'} & \textit{se } \nu = \nu' \\ {}^\star\mathtt{s}(\sigma|_{[\nu,\nu'-1]}) + \sigma_{\nu'} & \textit{se } \nu < \nu' \end{cases}. \tag{7.11}
$$

Dimostrazione. (i) Risulta $\Sigma = \{u \in \mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{R}) \,|\, u \,\text{sequenza di elementi in}\, \mathbb{R}\}$. Per il Teorema 3.3.4, ${}^\star\Sigma = \{u \in {}^\star\mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{R}) \,|\, u \,\star\text{-sequenza di elementi in}\, {}^\star\mathbb{R}\}$. Ora, notato che, per i Teoremi 2.3.3(vii) e 2.4.3(i), ogni $\star$-sequenza in ${}^\star\mathbb{R}$ appartiene a ${}^\star\mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{R}) = \mathbb{P}({}^\star\mathbb{N} \times {}^\star\mathbb{R}) \cap \mathcal{I}$, otteniamo la tesi.

(ii) Ogni sequenza in $\mathbb{R}$ è un'applicazione di un sottoinsieme finito $I \subset \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$; dunque un insieme finito di coppie di numeri reali. Ne segue, per il Teorema 2.2.3(iii),(iv), la tesi.

(iii) Per (i), la dimostrazione consiste nel provare che l'imagine, tramite ${}^\star\mathtt{s}$, di una generica $\star$-sequenza in ${}^\star\mathbb{R}$ si determina, $\star$-induttivamente, tramite (7.11).

Sia intanto $\nu = \nu'$. Considerata la semiformalizzazione finitamente limitabile di (7.10)(caso $n = m$) "$\forall \sigma \in \Sigma\, \forall \nu \in \mathbb{N}\, \forall u\, (u = \pi_1^2(\sigma)\, \text{e}\, u = [\nu, \nu] \Rightarrow \mathtt{s}(\sigma) = \sigma(\nu))$", otteniamo, tramite i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(v),(xviii) e 3.6.5(vi), che sussiste la frase:

$$
\forall \sigma \in {}^\star\Sigma\, \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall u\, (u = \pi_1^2(\sigma)\, \text{e}\, u = [\nu, \nu] \Rightarrow {}^\star\mathtt{s}(\sigma) = \sigma(\nu)).
$$

Scelta allora una $\star$-sequenza σ di dominio $[\nu, \nu]$, risulta ${}^\star\mathtt{s}(\sigma) = \sigma(\nu) = \sigma_\nu$.

Sia ora $\nu < \nu'$. Procedendo analogamente al caso precedente, la dimostrazione si consegue esprimendo innanzitutto (7.10)(caso $n < m$) mediante la frase:

$$
\forall \sigma \in \Sigma\, \forall \nu, \nu' \in \mathbb{N} (\nu < \nu'\, \text{e}\, \pi_1^2(\sigma) = [\nu, \nu'] \Rightarrow \mathtt{s}(\sigma) = \mathtt{s}(\sigma|_{[\nu,\nu'-1]}) + s_{\nu'}).
$$

Da questa, poi, si perviene alla semiformalizzazione:

$$
\begin{aligned}
\forall \sigma \in \Sigma\, \forall \nu, \nu' \in \mathbb{N}\, \forall u, v_1, v_2, x, y, y_1, y_2\, (\nu < \nu'\, \text{e}\, v_1 = [\nu, \nu']\, \text{e}\, v_1 = \pi_1^2(\sigma) \\
\text{e}\, x = \nu' - 1\, \text{e}\, v_2 = [\nu, x]\, \text{e}\, v_2 \subset v_1\, \text{e}\, u = \sigma|_{v_2}\, \text{e}\, y = \mathtt{s}(\sigma) \\
\text{e}\, y_1 = \mathtt{s}(u)\, \text{e}\, y_2 = \sigma(\nu') \Rightarrow y = y_1 + y_2).
\end{aligned}
$$

È facile rendersi conto che questa frase ha tutti i quantificatori finitamente limitabili, in quanto tutte le variabili si riferiscono a entità di livello non superiore a quello dell'entità σ che è una sequenza di numeri reali; perciò un insieme di coppie di numeri reali, e quindi appartenente al livello A_3. Tramite i Teoremi 3.6.1(iv),(v), 3.6.4(v),(xv),(xx), 3.6.5(vi), 3.6.6(v) e 3.6.7(ii), otteniamo che sussiste il corrispondente $\star$-enunciato, la cui semiformalizzazione si ottiene da quella precedente sostituendo Σ con ${}^\star\Sigma$, $\mathbb{N}$ con ${}^\star\mathbb{N}$ e $\mathtt{s}$ con ${}^\star\mathtt{s}$. Ne segue la tesi. □

La $\star$-sommatoria verifica le stesse proprietà formali della sommatoria, come viene messo in evidenza dal teorema seguente. Rileviamo che, qui e nel seguito, poniamo ${}^\star\mathtt{s}(\sigma) = \sum_{i=\nu}^{\mu} s_i = s_\nu + \cdots + s_\mu$, introducendo, così, l'abituale notazione delle sommatorie anche nel contesto degli $\star$-reali.

Teorema 7.3.4. *Siano $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}, \sigma' = (\sigma'_i)_{i\in I}$ due $\star$-sequenze di numeri $\star$-reali di dominio $I = [\nu, \mu]$. Sussistono allora le proprietà:*

(i) Commutativa: *Sia π una permutazione interna dell'intervallo I.*[11] *Risulta $\sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i = \sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_{\pi(i)}$;*

(ii) Linearità: *Sia b un numero $\star$-reale. Risulta $\sum_{i=\nu}^{\mu}(b \cdot \sigma_i) = b \cdot \sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i$ e $\sum_{i=\nu}^{\mu}(\sigma_i + \sigma'_i) = \sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i + \sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma'_i$;*

(iii) Associativa: *Sia τ una $\star$-sequenza crescente di $\star$-naturali di dominio $[0, \lambda]$ e codominio $[\nu, \nu + 1]$ tale che $\tau_0 = \nu$ e $\tau_\lambda = \mu + 1$. Risulta $\sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i = \sum_{j=0}^{\lambda-1}(\sum_{i=\tau_j}^{\tau_{j+1}-1} \sigma_i)$;*

(iv) Monotonia: *Sia $\sigma'_i \leq \sigma_i$ per ogni $i \in I$. Risulta $\sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma'_i \leq \sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i$. Inoltre, se esiste $i' \in I$ tale che $\sigma'_{i'} < \sigma_{i'}$, si ha $\sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma'_i < \sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i$;*

(v) Positività: *Sia $\sigma_i \geq 0$ per ogni $i \in I$. Risulta $\sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i \geq 0$;*

(vi) Triangolare: *Risulta $|\sum_{i=\nu}^{\mu} \sigma_i| \leq \sum_{i=\nu}^{\mu} |\sigma_i|$;*

(vii) Telescopica: *Sia f una funzione interna $\star$-reale di due variabili $\star$-reali di dominio ${}^\star\mathbb{R}^2$ e tale che $f(x, y) = f(x, z) + f(z, y)$, per ogni $x, y, z \in {}^\star\mathbb{R}$. Allora $f(\sigma_\nu, \sigma_\mu) = \sum_{i=\nu+1}^{\mu} f(\sigma_{i-1}, \sigma_i)$;*

(viii) Traslazione degli indici: *Sia $\tau = (\tau_j)_{j\in J}$ una $\star$-sequenza di $\star$-reali di dominio $J = [\nu, \nu + \lambda]$. Risulta $\sum_{i=\nu}^{\nu+\lambda} \tau_i = \sum_{j=0}^{\lambda} \tau_{\nu+j}$.*

[11] Ricordiamo che per "permutazione di un insieme" s'intende ogni applicazione biunivoca dell'insieme in sé.

Dimostrazione. Le analoghe proprietà della sommatoria relativa alle sequenze reali si provano tutte con procedimento induttivo sfruttando (7.10) e le proprietà algebriche dell'addizione e della moltiplicazione. Poichè (7.11) coincide formalmente con la precedente e le operazioni di $\star$-addizione e di $\star$-moltiplicazione tra numeri $\star$-reali verificano le medesime proprietà algebriche dell'addizione e della moltiplicazione tra numeri reali, tutte le proprietà della $\star$-sommatoria qui elencate si possono provare ricorrendo alla dimostrazione per $\star$-induzione (Teorema 4.2.4(ii)), ripetendo le dimostrazioni induttive del caso reale. Occorre per questo, ovviamente, provare preliminarmente che l'enunciato che si vuole dimostrare sia formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno.

Tuttavia, preferiamo dimostrare queste proprietà, via trasferimento, considerandole note nel caso reale. Solo per l'ultima forniamo, a titolo d'esempio, la dimostrazione per $\star$-induzione.[12]

È utile segnalare ancora che tutte le dimostrazioni sono strutturate in due parti. Nella prima, indipendente dalla tecnica dimostrativa che s'intende seguire nella seconda, si mostra che hanno senso i simboli scritti, verificando che le applicazioni su cui si opera sono $\star$-sequenze.

Tutte le dimostrazioni, eccetto l'ultima, si basano sul teorema riguardante la composizione degli $\star$-concetti e il comportamento dei quantificatori (Teorema 3.4.1) e sui principi di trasferimento e di sostituzione. Essendo la loro applicazione del tutto evidente, ci limitiamo a citare solamente i teoremi relativi agli $\star$-concetti fondamentali, volta per volta, coinvolti; precisiamo infine che li richiamiamo, nel corso della dimostrazione, solo la prima volta che compaiono.

(i) Poichè σ, π sono applicazioni interne a valori $\star$-finiti di dominio I, lo è pure, per il Teorema 2.5.2(vii), la loro composta e quindi $\sigma \circ \pi$ è una $\star$-sequenza di numeri $\star$-reali. Dobbiamo, ora, provare l'uguaglianza ${}^\star\mathtt{s}(\sigma) = {}^\star\mathtt{s}(\sigma \circ \pi)$.

Ciò premesso, sia σ una sequenza reale di dominio $[n.m]$ e π una permutazione su $[n, m]$. La proprietà commutativa di $\mathtt{s}$ si può esprimere mediante la scrittura "$\forall s \in \Sigma\, \forall p\, \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}\, (\pi_1^2(s) = [\nu, \mu]\, \mathrm{e}\, p\, \text{permutazione di}\, [\nu, \mu] \Rightarrow \mathtt{s}(s) = \mathtt{s}(s \circ p))$" da cui otteniamo la semiformalizzazione:

$$\begin{aligned}\forall s, u \in \Sigma\, \forall p\, \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}\, \forall v\, (v = \pi_1^2(s)\, \mathrm{e}\, v = [\nu, \mu]\\ \mathrm{e}\, p\, \text{permutazione di}\, v\, \mathrm{e}\, u = s \circ p \Rightarrow \mathtt{s}(s) = \mathtt{s}(u)).\end{aligned}$$

Osservato che le entità di livello più alto sono σ, u, p (che denotano sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2 \subset A_3$), è facile provare che tutti i quantificatori sono finitamente limitabili.

[12] Riteniamo comunque un utile esercizio, che lasciamo al lettore volonteroso, scambiare i metodi dimostrativi, provando l'ultima via trasferimento e le altre ricorrendo alla dimostrazione per $\star$-induzione.

Usando allora i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(v),(vii),(xiii),(xviii) e 3.6.5(vi), otteniamo che sussiste lo $\star$-enunciato:

$$\forall s, u \in {}^\star\Sigma\, \forall p\, \forall \nu, \mu \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall v\, (v = \pi_1^2(s) \,\mathrm{e}\, v = [\nu, \mu] \\ \mathrm{e}\ \star\text{-}(p \,\text{permutazione interna di}\ v)\,\mathrm{e}\, u = s \circ p \Rightarrow {}^\star\mathtt{s}(s) = {}^\star\mathtt{s}(u)).$$

Da qui, tenuto conto che $\sigma, \sigma \circ \pi$ sono $\star$-sequenze, quindi elementi di ${}^\star\Sigma$ (Lemma 7.3.3(i)), che $\pi_1^2(\sigma) = I$ e π permutazione interna, si ottiene la tesi

(ii) Iniziamo con l'osservare che, per il Lemma 7.3.1, $b \cdot \sigma, \sigma + \sigma'$ sono delle $\star$-sequenze di numeri $\star$-reali. Rimane da provare ${}^\star\mathtt{s}(b \cdot \sigma) = b \cdot {}^\star\mathtt{s}(\sigma)$ e ${}^\star\mathtt{s}(\sigma + \sigma') = {}^\star\mathtt{s}(\sigma) + {}^\star\mathtt{s}(\sigma')$, sapendo che valgono per $\mathtt{s}$.

Proviamo intanto la prima uguaglianza. La frase "u prodotto di $y \in \mathbb{R}$ per s" può esprimersi mediante la semiformalizzazione finitamente limitabile:

$$X(s, u, y) : \forall x, z_1, z_2 \in \mathbb{R}\, \forall v_1, v_2\, (v_1 = \pi_1^2(s) \,\mathrm{e}\, v_2 = \pi_1^2(u) \,\mathrm{e}\, v_1 = v_2 \,\mathrm{e}\, x \in v_1 \\ \mathrm{e}\, z_1 = s(x) \,\mathrm{e}\, z_2 = u(x) \Rightarrow z_2 = y \cdot z_1)$$

da cui, tramite i Teoremi 3.6.4(xv) e 3.6.7(ii), otteniamo

$$\star\text{-}X(s, u, y) : \forall x, z_1, z_2 \in {}^\star\mathbb{R}\, \forall v_1, v_2\, (v_1 = \pi_1^2(s) \,\mathrm{e}\, v_2 = \pi_1^2(u) \,\mathrm{e}\, v_1 = v_2 \,\mathrm{e}\, x \in v_1 \\ \mathrm{e}\, z_1 = s(x) \,\mathrm{e}\, z_2 = u(x) \Rightarrow z_2 = y \cdot z_1)\ \mathrm{e}\ s, u, y\ \text{interne}.$$

Allora, posto $s = \sigma$ e $y \in {}^\star\mathbb{R}$, risulta "u $\star$-sequenza prodotto di y per σ".

Ciò osservato, proviamo finalmente l'uguaglianza in oggetto. Considerata la relativa semiformalizzazione nell'ambito dei numeri reali:

$$\forall s, u \in \Sigma\, \forall y, z_1, z_2 \in \mathbb{R}\, (X(s, u, y) \,\mathrm{e}\, z_1 = \mathtt{s}(s) \,\mathrm{e}\, z_2 = y \cdot z_1 \Rightarrow z_2 = \mathtt{s}(u)),$$

otteniamo

$$\forall s, u \in {}^\star\Sigma\, \forall y, z_1, z_2 \in {}^\star\mathbb{R}\, (\star\text{-}X(s, u, y) \,\mathrm{e}\, z_1 = {}^\star\mathtt{s}(s) \,\mathrm{e}\, z_2 = y \cdot v_1 \Rightarrow z_2 = {}^\star\mathtt{s}(u))$$

e quindi, per quanto appena provato,

$$\forall s, u \in {}^\star\Sigma\, \forall y, z_1, z_2 \in {}^\star\mathbb{R}\, (u = y \cdot s \,\mathrm{e}\, z_1 = {}^\star\mathtt{s}(s) \,\mathrm{e}\, z_2 = y \cdot v_1 \Rightarrow z_2 = {}^\star\mathtt{s}(\tau)).$$

Ne segue, tenuto conto che $\sigma, b \cdot \sigma$ sono delle $\star$-sequenze, l'uguaglianza in oggetto.

Proviamo ora la seconda uguaglianza. La frase "τ somma delle sequenze reali σ, σ' di medesimo dominio" può esprimersi mediante la scrittura "u tale che $\forall x(\tau(x) = s(x) + s'(x)$, con $s, s' \in \Sigma$ aventi medesimo dominio" , che conduce alla semiformalizzazione finitamente limitabile:

$$X(s, s', u) : \exists u_1, u_2\, (u_1 = \pi_1^2(s) \,\mathrm{e}\, u_2 = \pi_1^2(s') \,\mathrm{e}\, u_1 = u_2 \Rightarrow \forall x\, \forall y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R} \\ (x \in u_1 \mathrm{e}\, y_1 = s(x) \,\mathrm{e}\, y_2 = s'(x) \,\mathrm{e}\, y_3 = u(x) \Rightarrow y_3 = y_1 + y_2))$$

da cui otteniamo

$$\star\text{-}X(s,s',u) : \exists u_1,u_2\,(u_1=\pi_1^2(s)\,\mathrm{e}\,u_2=\pi_1^2(s')\,\mathrm{e}\,u_1=u_2 \Rightarrow \forall x\,\forall y_1,y_2,y_3\in{}^\star\mathbb{R}$$
$$(x\in u_1\mathrm{e}\,y_1=s(x)\,\mathrm{e}\,y_2=s'(x)\,\mathrm{e}\,y_3=u(x)\Rightarrow y_3=y_1+y_2))\ \mathrm{e}\ s,s',u \text{ interne.}$$

Allora, posto $s=\sigma$ e $s'=\sigma'$, risulta "u $\star$-sequenza somma delle $\star$-sequenze σ, σ' di medesimo dominio".

Ciò osservato, proviamo finalmente l'uguaglianza in oggetto. Considerata la relativa semiformalizzazione nell'ambito dei numeri reali:

$$\forall s,s',u\in\Sigma\,\forall y,y_1,y_2\in\mathbb{R}(X(s,s',u)\,\mathrm{e}\,y_1=\mathtt{s}(s)\,\mathrm{e}\ \mathrm{e}\,y_2=\mathtt{s}(s')$$
$$\mathrm{e}\,y=y_1+y_2\Rightarrow y=\mathtt{s}(u))$$

otteniamo

$$\forall s,s',u\in{}^\star\Sigma\,\forall y,y_1,y_2\in{}^\star\mathbb{R}\,(\star\text{-}X(s,s',u)\,\mathrm{e}\,y_1={}^\star\mathtt{s}(s)\,\mathrm{e}\ \mathrm{e}\,y_2={}^\star\mathtt{s}(s')$$
$$\mathrm{e}\,y=y_1+y_2\Rightarrow y={}^\star\mathtt{s}(u))$$

e quindi, per quanto appena provato,

$$\forall s,s',u\in{}^\star\Sigma\,\forall y,y_1,y_2\in{}^\star\mathbb{R}\,(u=s+s'\,\mathrm{e}\,y_1={}^\star\mathtt{s}(s)\,\mathrm{e}\ \mathrm{e}\,y_2={}^\star\mathtt{s}(s')$$
$$\mathrm{e}\,y=y_1+y_2\Rightarrow y={}^\star\mathtt{s}(u)).$$

Ne segue, tenuto conto che $\sigma,\sigma',\sigma+\sigma'$ sono delle $\star$-sequenze, l'uguaglianza in oggetto. La dimostrazione di (ii) è così completata.

(iii) Iniziamo con l'osservare che, per ogni $j\in[0,\lambda-1]$, la sequenza $\sigma_{[\tau_j,\tau_{j+1}-1]}$ è una $\star$-sequenza (di numeri $\star$-reali); infatti, ha per dominio $[\tau_j,\tau_{j+1}-1]$, intervallo limitato di ${}^\star\mathbb{N}$, ed è interna, perchè restrizione su un insieme interno di un'applicazione interna (Teorema 2.5.2(ix) e Lemma 4.2.3(ii)). Anche l'applicazione $\sigma'(j)=\sum_{i=\tau_j}^{\tau_{j+1}-1}\sigma_i$ $(j=0,\ldots,\lambda-1)$ è una $\star$-sequenza di numeri $\star$-reali, in quanto il suo dominio $[0,\lambda-1]$ è un intervallo limitato di ${}^\star\mathbb{N}$ e inoltre è un'applicazione interna, come si prova facilmente, tramite il Teorema 2.5.2(ii), osservato che $\sigma'=\{(u,v)\in[0,\lambda-1]\times{}^\star\mathbb{R}\,|\,v={}^\star\mathtt{s}(\sigma|_{[\tau_u,\tau_{u+1}-1]})\}$. Tramite σ', la proprietà da provare diviene dunque ${}^\star\mathtt{s}(\sigma)=\mathtt{s}(\sigma')$.

Ciò premesso, proviamo l'uguaglianza in oggetto. A tal fine, iniziamo col considerare la scrittura della proprietà associativa di $\mathtt{s}$:

$$\forall t,s,s'\in\Sigma\,\forall\lambda,\nu,\nu'\in\mathbb{N}\,(t:[0,\lambda]\mapsto[\nu,\nu'+1]\,\text{crescente}$$
$$\mathrm{e}\,t(0)=\nu\,\mathrm{e}\,t(\lambda)=\nu'+1\,\mathrm{e}\,\pi_1^2(s)=[\nu,\nu']\,\mathrm{e}\,\pi_1^2(s')=[0,\lambda-1]$$
$$\mathrm{e}\,\forall j\in\mathbb{N}\,\forall u\in\Sigma\,(j\in[0,\lambda-1]\ \mathrm{e}\ u=s|_{[t(j),t(j+1)-1]}$$
$$\Rightarrow(s'(j)=\mathtt{s}(u)\Rightarrow\mathtt{s}(s)=\mathtt{s}(s'))))$$

da cui traiamo la semiformalizzazione:

$$\begin{aligned}&\forall t, s, s' \in \Sigma\, \forall \lambda, \nu, \nu' \in \mathbb{N}\, (t : [0, \lambda] \mapsto [\nu, \nu' + 1]\, \text{crescente}\\ &\quad \text{e}\, t(0) = \nu\, \text{e}\, t(\lambda) = \nu' + 1\, \text{e}\, \pi_1^2(s) = [\nu, \nu']\, \text{e}\, \pi_1^2(s') = [0, \lambda - 1]\\ &\quad \text{e}\, \forall j, v, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{P}(\mathbb{N})\, \forall u \in \Sigma\, (j \in \pi_1^2(s')\, \text{e}\, v = j + 1\, \text{e}\, y \subset \pi_1^2(s)\\ &\qquad\qquad \text{e}\, v_1 = t(j)\, \text{e}\, v_2 = t(v)\, \text{e}\, v_3 = v_2 - 1\, \text{e}\, y = [v_1, v_3]\\ &\qquad\qquad\qquad \text{e}\, u = s|_y \Rightarrow s'(j) = \mathtt{s}(u)) \Rightarrow \mathtt{s}(s) = \mathtt{s}(s'))\end{aligned}$$

e quindi, tramite i Teoremi 3.6.1(v), 3.6.4(xx) e 3.6.6(iii), la validità della:

$$\begin{aligned}&\forall t, s, s' \in {}^\star\Sigma\, \forall \lambda, \nu, \nu' \in {}^\star\mathbb{N}\, (t : [0, \lambda] \mapsto [\nu, \nu' + 1]\, \text{crescente}\\ &\quad \text{e}\, t(0) = \nu\, \text{e}\, t(\lambda) = \nu' + 1\, \text{e}\, \pi_1^2(s) = [\nu, \nu']\, \text{e}\, \pi_1^2(s') = [0, \lambda - 1]\\ &\quad \text{e}\, \forall j, v, v_1, v_2, v_3 \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall y \in {}^\star\mathbb{P}(\mathbb{N}) \forall u \in {}^\star\Sigma\, (j \in \pi_1^2(s')\, \text{e}\, v = j + 1\, \text{e}\, y \subset \pi_1^2(s)\\ &\qquad\qquad \text{e}\, v_1 = t(j)\, \text{e}\, v_2 = t(v)\, \text{e}\, v_3 = v_2 - 1\, \text{e}\, y = [v_1, v_3]\\ &\qquad\qquad\qquad \text{e}\, u = s|_y \Rightarrow s'(j) = {}^\star\mathtt{s}(u)) \Rightarrow {}^\star\mathtt{s}(s) = {}^\star\mathtt{s}(s')).\end{aligned}$$

Ne segue l'associatività.

(iv) Proviamo intanto la prima disuguaglianza. L'analoga proprietà di monotonia per $\mathtt{s}$ si semiformalizza con la:

$$\forall s, s' \in \Sigma\, \forall x (x = \pi_1^2(s)\, \text{e}\, x = \pi_1^2(s')\, \text{e}\, \forall i (i \in x \Rightarrow s(i) \leq s'(i)) \Rightarrow \mathtt{s}(s) \leq \mathtt{s}(s')).$$

Usando il Teorema 3.6.5(ii), perveniamo alla disuguaglianza desiderata.

La disuguaglianza stretta si prova in modo analogo ricorrendo, però, al Teorema 3.6.6(v).

(v) Segue da (iv) ponendo σ' la sequenza nulla.

(vi) Per il Lemma 7.3.2(i) (con $f = {}^\star|\cdot| = |\cdot|$ (Teorema 7.1.1(iv)), l'applicazione $|\sigma|$ è una $\star$-sequenza di numeri $\star$-reali di dominio $[\nu, \mu]$. Ciò osservato, l'analoga proprietà di $\mathtt{s}$ valida in $\mathbb{R}$, si semiformalizza con la:

$$\forall s, u \in \Sigma\, \forall x, y, z\, (u = |\cdot| \circ s\, \text{e}\, x = \mathtt{s}(s)\, \text{e}\, y = |x|\, \text{e}\, z = \mathtt{s}(u) \Rightarrow y \leq z)$$

che è finitamente limitabile. Risulta allora

$$\forall s, u \in {}^\star\Sigma\, \forall x, y, z\, (u = |\cdot| \circ s\, \text{e}\, x = {}^\star\mathtt{s}(s)\, \text{e}\, y = |x|\, \text{e}\, z = {}^\star\mathtt{s}(u) \Rightarrow y \leq z)$$

e quindi la disuguaglianza triangolare.

(vii) La sequenza σ' di $[\nu + 1, \nu']$ in ${}^\star\mathbb{N}$ tale che $\sigma'(i) = f(\sigma_{i-1}, \sigma_i)\, (i = \nu + 1, \ldots, \nu')$, è una $\star$-sequenza; infatti ha come dominio un intervallo limitato di ${}^\star\mathbb{N}$ e inoltre è interna (lo si prova come al solito, tenendo presente che f è interna e che

$\sigma' = \{(u,v) \in [\nu+1,\nu'] \times {}^\star\mathbb{R} \,|\, v = f(\sigma(u-1),\sigma(u))\})$. Tramite σ', la tesi diviene allora $f(\sigma_\nu,\sigma_\mu) = {}^\star\mathtt{s}(\sigma')$.

Ciò osservato, proviamo l'uguaglianza in oggetto. Una scrittura dell'analoga proprietà di $\mathtt{s}$ è data dalla:

$$\begin{aligned}
&\forall v\,(v : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}\,\mathrm{e}\,\forall x,y,z \in \mathbb{R}\,(v(x,y) = v(x,z)+v(z,y))\\
&\qquad \Rightarrow \forall s,u \in \Sigma\,\forall \nu,\nu' \in \mathbb{N}\,(\pi_1^2(s) = [\nu,\mu]\,\mathrm{e}\,\pi_1^2(u) = [\nu+1,\nu']\\
&\qquad\qquad \mathrm{e}\,\forall\lambda \in \mathbb{N}(\lambda \in [\nu+1,\nu'] \Rightarrow u(\lambda) = v(s(\lambda-1),s(\lambda))\\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow v(s(\nu),s(\nu')) = \mathtt{s}(u))
\end{aligned}$$

che è finitamente limitabile. Passando alla semiformalizzazione e usando il Teorema 3.6.4(xi), otteniamo che sussiste la proposizione:

$$\begin{aligned}
&\forall v\,(v : {}^\star\mathbb{R}^2 \mapsto {}^\star\mathbb{R}\,\mathrm{interna}\,\mathrm{e}\,\forall x,y,z \in {}^\star\mathbb{R}\,(v(x,y) = v(x,z)+v(z,y))\\
&\qquad \Rightarrow \forall s,u \in {}^\star\,\Sigma\,\forall \nu,\nu' \in {}^\star\,\mathbb{N}\,(\pi_1^2(s) = [\nu,\nu']\,\mathrm{e}\,\pi_1^2(u) = [\nu+1,\nu']\\
&\qquad\qquad \mathrm{e}\,\forall\lambda \in {}^\star\,\mathbb{N}(\lambda \in [\nu+1,\nu'] \Rightarrow u(\lambda) = v(s(\lambda-1),s(\lambda))\\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow v(s(\nu),s(\nu')) = {}^\star\mathtt{s}(u)).
\end{aligned}$$

Ricordato che f è interna e che σ,σ' sono $\star$-sequenze, si ottiene la tesi.

(viii) La sequenza τ' tale che $\tau'(j) = \tau(\nu+j)\,(j = 0,\ldots,\lambda)$ è una $\star$-sequenza di numeri $\star$-reali di dominio $[0,\lambda]$ (Lemma 7.3.2(ii)). Rimane allora da dimostrare ${}^\star\mathtt{s}(\tau) = {}^\star\mathtt{s}(\tau')$.

Ciò premesso, usiamo la dimostrazione per $\star$-induzione (Teorema 4.2.4(ii)). A tal fine, consideriamo il metapredicato:

$$\begin{aligned}
X(x):\qquad &\forall s,u \in {}^\star\Sigma\,\forall\nu \in {}^\star\mathbb{N}(\pi_1^2(s) = [\nu,\nu+x]\,\mathrm{e}\,\pi_1^2(u) = [0,x]\\
&\qquad \mathrm{e}\,\forall\nu' \in {}^\star\mathbb{N}(\nu' \in \pi_1^2(u) \Rightarrow u(\nu') = s(\nu+\nu')) \Rightarrow {}^\star\mathtt{s}(s) = {}^\star\mathtt{s}(u)
\end{aligned}$$

che è, con un po' di pazienza, formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno.

Ciò osservato, sia intanto $x = 0$. Dato $\tau \in {}^\star\Sigma$ tale che $\pi_1^2(\tau) = [\nu,\nu]$, risulta $\pi_1^2(\tau') = [0,0]$ e quindi, per (7.11), ${}^\star\mathtt{s}(\tau) = {}^\star\mathtt{s}(\tau')$. Sussiste pertanto $X(0)$.

Assumiamo ora la validità di $X(\lambda)$ per $\lambda \in {}^\star\mathbb{N}$ (ipotesi induttiva). Sia τ una generica $\star$-sequenza di numeri $\star$-reali di dominio $[\nu,\nu+\lambda+1]$ ($\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ generico). Allora, $\tau_1 = \tau|_{[\nu,\nu+\lambda]}$ è una sequenza di $[\nu,\nu+\lambda]$ in ${}^\star\mathbb{R}$ ed è interna, perchè restrizione su un insieme interno (Lemma 4.2.3(ii)) di un'applicazione interna (Teorema 2.5.2(ix)), cioè τ_1 è una $\star$-sequenza. Considerata allora la $\star$-sequenza τ_1' tale che $\tau_1'(j) = \tau(\nu+j)\,(j = 0,\ldots,\lambda)$, risulta (ipotesi induttiva) ${}^\star\mathtt{s}(\tau_1) = {}^\star\mathtt{s}(\tau_1')$. Ne segue, per (7.11), ${}^\star\mathtt{s}(\tau) = {}^\star\mathtt{s}(\tau|_{[\nu,\nu+\lambda]}) + \tau(\nu+\lambda+1) = {}^\star\mathtt{s}(\tau_1) + \tau(\nu+\lambda+1) = {}^\star\mathtt{s}(\tau_1') + \tau(\nu+\lambda+1) = {}^\star\mathtt{s}(\tau')$. Sussiste pertanto $X(\lambda)$.

La dimostrazione è così conclusa. □

Osservazione 7.3.5. È noto che, oltre alle sommatorie, si considera anche la **produttoria**, intesa come applicazione $\mathtt{p}$ di Σ in $\mathbb{R}$ tale che, alla sequenza reale $s = (s_i)_{i\in I}$ definita nell'intervallo $I = [n, m] \subset \mathbb{N}$ con $n \leq m$, associa il numero reale $\mathtt{p}(\sigma)$ così definita:

$$\mathtt{p}(s) = \begin{cases} s_m & \text{se } n = m \\ \mathtt{s}(s|_{[n,m-1]}) \cdot s_m & \text{se } n < m \end{cases}.$$

Per l'associata **$\star$-produttoria** si possono ripetere argomentazioni analoghe a quelle svolte per la $\star$-sommatoria, sostituendo $\mathtt{s}$ con $\mathtt{p}$, 0 con 1 e l'operazione di addizione con quella di moltiplicazione ($+$ con $\cdot$). Si può allora provare (lasciamolo al lettore come esercizio) che ${}^\star\mathtt{p}$ è l'applicazione di ${}^\star\Sigma$ in ${}^\star\mathbb{R}$ tale che, alla $\star$-sequenza $\sigma = (\sigma_i)_{i\in I}$, con $I = [\nu, \nu'] \subset {}^\star\mathbb{N}$ associa il numero $\star$-reale:

$${}^\star\mathtt{p}(\sigma) = \begin{cases} \sigma_\nu & \text{se } \nu = \nu' \\ {}^\star\mathtt{s}(\sigma|_{[\nu,\nu'-1]}) \cdot \sigma_\mu & \text{se } \nu < \nu' \end{cases}.$$

La $\star$-produttoria verifica le stesse proprietà formali della produttoria (commutativa, associativa, telescopica, ...), come si constata ripercorrendo la dimostrazione del Teorema 7.3.4. Per questo motivo introduciamo la notazione ${}^\star\mathtt{p}(\sigma) = \prod_{i=\nu}^{\mu} s_i = s_\nu \cdot \cdots \cdot s_\mu$, usando così l'abituale notazione delle produttorie anche nel contesto degli $\star$-reali. Così, ad esempio, considerata la $\star$-sequenza σ costituita dai primi ν $\star$-naturali, ${}^\star\mathtt{p}(\sigma) = \prod_{i=1}^{\nu} i = \nu!$.

Capitolo 8

Funzioni continue

> Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué a la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.
>
> *A.L.Cauchy, Résumé des lecons sur le calcul infinitèsimal*

Ci occupiamo delle caratterizzazioni infinitesimali delle nozioni di continuità (nella prima sezione) e di continuità uniforme (nella seconda), che consentono poi di fornire delle dimostrazioni nonstandard di alcuni fondamentali risultati dell'analisi classica: i teoremi di Bolzano, di compattezza, di Weierstrass e di Heine-Cantor. Per un confronto tra queste dimostrazioni e quelle standard, riportiamo anche le dimostrazioni classiche.

Nella prima sezione proviamo anche un risultato sulle potenze a base infinitesima positiva che è stato già utilizzato per provare che l'insieme degli ordini di grandezza è denso.

8.1 Continuità

Iniziamo col ricordare che una funzione f, definita in $D \subset \mathbb{R}$, è continua in $r \in D$ se per ogni reale $\xi > 0$ esiste un reale $\delta > 0$ tale che, per tutti i punti $x \in D$ tali che $|x - r| < \delta$, risulta $|f(x) - f(r)| < \xi$; oppure, equivalentemente, se, dato un intorno arbitrario V di $f(r)$, esiste un intorno U di r tale che

$f[U] \subset V$ (cioè f assume un valore appartenente a V, in ogni punto di U).

Il prossimo risultato fornisce la caratterizzazione infinitesimale della continuità di una funzione in un punto.

Teorema 8.1.1. *Sia f una funzione di dominio D e $r \in D$. Allora, f è continua in r se e solo se ${}^\star f$ muta numeri infinitamente prossimi a r, appartenenti ad ${}^\star D$, in numeri infinitamente prossimi a $f(r)$; in simboli,*

$$f \text{ continua in } r \Leftrightarrow {}^\star f[\mu(r)] \subset \mu(f(r)).$$

Dimostrazione. Sia f continua in r. Allora, per ogni intorno V di $f(r)$, esiste un intorno U di r tale che $f[U] \subset V$. Trattasi quindi di una nozione di carattere locale che si esprime col predicato $X(x) : x \in D \Rightarrow f(x) \in V$. Allora, per i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.4(xv) e 6.2.1(i), sussiste $\star$-$X(b)$ per ogni $b \in \mu(r)$, cioè $b \in {}^\star D \Rightarrow {}^\star f(b) \in {}^\star V$ per ogni $b \in \mu(r)$. Ne segue ${}^\star f[\mu(r)] \subset {}^\star V$ da cui, per l'arbitrarietà di V e tenuto conto del Teorema 6.1.2, risulta ${}^\star f[\mu(r)] \subset \mu(f(r))$.

Sia ora ${}^\star f[\mu(r)] \subset \mu(f(r))$. Considerato un intorno V di $f(r)$, otteniamo, tramite il Teorema 6.1.2, ${}^\star f[\mu(r)] \subset {}^\star V$ e quindi $\star$-$X(b)$ sussiste per ogni $b \in \mu(r)$. Allora, per il Teorema 6.2.1(i), il predicato $X(x)$ è una proprietà locale di r. Ne segue la tesi. $\square$

Sulla base di questa caratterizzazione, proviamo, dapprima, le usuali proprietà "algebriche" della continuità e, poi, quattro fondamentali teoremi relativi a funzioni continue definite su particolari insiemi: intervalli chiusi e limitati e insiemi compatti. Osserviamo, inoltre, che una funzione f è **continua in un insieme** D se solo se ${}^\star f[\mu(r)] \subset \mu(f(r))$, per ogni $r \in D$.

Teorema 8.1.2. *Sia f definita in D e continua in $r \in D$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Se g è definita in D e continua in $r \in D$, allora sono continue in r anche le funzioni $f \pm g$, $f\,g$ e αf per ogni reale α;

(ii) Se $f(r) \neq 0$, allora è continua in r anche la funzione reciproca $1/f$;

(iii) Se g, di dominio il codominio di f, è continua in $f(r)$, allora è continua in r anche la funzione composta $g \circ f$;

(iv) Se D è un intervallo (limitato o no) e f strettamente monotona, allora la sua funzione inversa è continua in $f(r)$.

Dimostrazione. (i) Consideriamo intanto la funzione somma. Sia $b \in {}^\star D \cap \mu(r)$. Allora $b \approx r$ e quindi, per il Teorema 8.1.1, ${}^\star f(b) \approx f(r)$ e ${}^\star g(b) \approx g(r)$. Ne segue, per il Lemma 5.5.1 e il Teorema 7.1.1(i), ${}^\star(f+g)(b) = {}^\star f(b) + {}^\star g(b) \approx f(r) + g(r)$ e quindi la tesi.

Le dimostrazioni per le funzioni prodotto e prodotto esterno, sono analoghe.

(ii) La funzione $1/f$ è definita nell'insieme $E = \{e \in D \mid f(e) \neq 0\}$ e quindi, per i Teoremi 2.4.3(v) e 7.1.1(iii), ${}^\star(1/f) = 1/{}^\star f$ è definita su ${}^\star E$.

Ciò osservato, sia $b \in \mu(r) \cap {}^\star E$. Per la continuità di f in r otteniamo, per il Teorema 8.1.1, $\mathrm{st}({}^\star f(b)) = f(r) \neq 0$ e quindi ${}^\star f(b)$ è apprezzabile. Allora, per il Teorema 5.5.4(vii), $\mathrm{st}(1/{}^\star f(b)) = 1/\mathrm{st}({}^\star f(b)) = 1/f(r)$, cioè $1/{}^\star f(b) \approx 1/f(r)$. Ne segue la tesi.

(iii) Tramite il Teorema 8.1.1, otteniamo ${}^\star f[\mu(r)] \subset \mu(f(r))$ e ${}^\star g[\mu(f(r))] \subset \mu(g(f(r)))$. Ora, dalla prima inclusione si ha ${}^\star g[{}^\star f[\mu(f(r)]] \subset {}^\star g[\mu(f(r))]$ e quindi, tenuto conto del Teorema 3.7.2(vii) e della seconda inclusione, ${}^\star(g \circ f)[\mu(r)] = ({}^\star g \circ {}^\star f)[\mu(r)] = {}^\star g[{}^\star f[\mu(r)]] \subset \mu(g(f(r))) = \mu((g \circ f)(r))$. Ne segue la tesi.

(iv) La dimostrazione è quella standard. Assumiamo f crescente. Sia intanto $x_0 = r$ interno a D. Possiamo allora scegliere un intorno arbitrario $U = [r_1, r_2] \subset D$ di x_0. Posto allora $y_i = f(x_i)\,(i = 0, 1, 2)$ e tenuto presente che la funzione inversa g è crescente, otteniamo $x_1 = g(y_1) < g(y) < g(y_2) = x_2$, per ogni y compreso fra y_1, y_2 nel quale g sia definita, ossia $g(y) \in U$. Ne segue la continuità di g in $f(r)$. Se poi r è un estremo di D, si procede in modo analogo.

La dimostrazione relativa a f decrescente è del tutto simile. □

La dimostrazione infinitesimale del teorema di Bolzano (alla quale premettiamo un lemma) fornisce, per noi, un primo esempio dei cosiddetti **metodi $\star$-finiti**, che, in questo caso, si concretizza nell'individuazione di una suddivisione $\star$-finita dell'intervallo. La dimostrazione è suggerita dalle seguenti considerazioni intuitive che riprendono lo spirito della dimostrazione originale di Bernhard Bolzano. In forza della continuità, il numero reale r dovrebbe essere uno zero per la funzione se nella sua monade $\mu(r)$ la funzione ${}^\star f$ cambia segno, e ciò nel senso che assume sia valori non negativi che valori non positivi (eventualmente sempre nulli). Per individuare un tale punto si può pensare di ripartire l'intervallo ${}^\star[a,b]$ in intervalli di ampiezza infinitesima e di ricercarne uno in cui la ${}^\star f$ cambia segno. Il numero reale infinitamente prossimo agli elementi di tale intervallo dovrebbe essere lo zero cercato.

Lemma 8.1.3. *Dato l'intervallo $[a,b]$ e scelto un arbitrario numero $\star$-naturale infinito ω, la suddivisione $\mathbf{x}$ dell'intervallo così definita:*

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{\omega} \quad (i = 0, \ldots, \omega)$$

è una sequenza interna.

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che è interna la funzione h di ${}^\star\mathbb{R}^3$ in ${}^\star\mathbb{R}$ definita dalla relazione $h(x, y, z) = y + x\,z$, in quanto trasformata dell'analoga funzione razionale intera di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}$ (Paragrafo 7.2, punto 2). È allora interna, per il Teorema 2.5.2(ix), la sua restrizione sull'insieme $\{a\} \times \{(b-a)/\omega\} \times {}^\star\mathbb{R}$, che è, per i Teoremi 2.2.3(iii) e 2.5.2(i), interno. È cioè interna la funzione $a + \cdot\,(b-a)/\omega$ di dominio ${}^\star\mathbb{R}$. Ne segue, per il Teorema 2.5.2(ix), che è interna anche la sequenza $(a + \cdot\,(b-a)/\omega)|_{{}^\star\mathbb{N}\cap[0,\omega]}$, notato che ${}^\star\mathbb{N} \cap [0, \omega]$ è interno (Teoremi 2.2.3(iii) e 5.2.3(ii)). □

Siamo ora in grado di fornire la preannunciata dimostrazione nonstandard alla quale affianchiamo anche la standard, in quanto può essere vista come una versione "dinamica" di quella nonstandard.

Teorema 8.1.4 (Bolzano). *Sia f continua nell'intervallo $[a, b]$ tale che $f(a) \cdot f(b) < 0$. Esiste allora un numero reale $r \in]a, b[$ tale che $f(r) = 0$,*

Dimostrazione. `PROVA NONSTANDARD` Evidentemente possiamo sempre supporre $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Data la suddivisione $\mathbf{x}$ introdotta nel lemma precedente, consideriamo l'insieme interno $D = \{\nu \,|\, \nu \leq \omega \,\mathrm{e}\, {}^\star f(a + \nu(b-a)/\omega) \geq 0\}$[1], non vuoto in quanto $\omega \in D$. Per il Teorema 4.2.5(ii), D ammette massimo $\nu_0 > 0$, perchè per $\nu = 0$ risulta ${}^\star f(a + 0 \cdot (b-a)/\omega) = {}^\star f(0) = f(a) < 0$. Posto quindi $b_1 = a + (\nu_0 - 1)(b-a)/\omega$, $b_2 = a + \nu_0(b-a)/\omega$ e $r = \mathrm{st}(b_1)$, riesce ${}^\star f(b_1) < 0$, ${}^\star f(b_2) > 0$ e $b_1 \approx r \approx b_2$. Tenuto allora conto dei Teoremi 5.5.4(ix) e 8.1.1, otteniamo $0 \leq \mathrm{st}({}^\star f(b_2)) = \mathrm{st}(f(r)) = f(r) = \mathrm{st}({}^\star f(b_1)) \leq 0$ e quindi $f(r) = 0$.

`PROVA STANDARD` Supponiamo, come sopra, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Dimezziamo l'intervallo $I_0 = [a, b]$; se nel suo punto medio m_0 risulta $f(\mathsf{m}_0) = 0$ la tesi è raggiunta. In caso contrario, sia che $f(\mathsf{m}_0)$ abbia valore negativo o positivo, in uno dei due intervalli chiusi ottenuti con la bisezione, diciamo I_1, la funzione assume valori di segno opposto e quindi ci troviamo nella situazione prospettata dell'ipotesi del teorema. Dimezziamo ora l'intervallo I_1; se nel suo punto medio m_1 risulta $f(\mathsf{m}_1) = 0$ la tesi è raggiunta. Altrimenti, iteriamo il procedimento di bisezione

[1]Che D sia interno segue dal Teorema d'isolamento interno che è applicabile in quanto risulta formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno il metapredicato "$x \leq \omega$ e ${}^\star f(a + x(b-a)/\omega) \geq 0$". Ciò deriva facilmente se proviamo che è interna la funzione $g(\cdot) = {}^\star f(a + \cdot\,(b-a)/\omega)$ di dominio ${}^\star\mathbb{N} \cap [0, \omega]$, interno poichè intersezione di due insiemi interni (Teorema 2.2.3(vii)).

Osservato che $g = {}^\star f \circ \mathbf{x}$ è la composta di due funzioni interne: di ${}^\star f$ e della suddivisione $\mathbf{x}$ (Lemma 8.1.3), risulta, per il Teorema 2.5.2(vii), che g è interna.

ottenendo, salvo il caso fortunato in cui la funzione si annulli in un punto medio, la successione di intervalli chiusi e limitati $I_0 \supset I_1 \supset \cdots$ di lunghezze $(b-a)/2^n$. Per il Teorema di Cantor 6.4.2, esiste allora ξ appartenente ad ogni intervallo della successione.

Proviamo ora che $f(\xi) = 0$. Sia, per assurdo, $f(\xi) > 0$. Allora, in forza del Teorema della permanenza del segno[2], esiste un intorno $U = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - \xi| < \delta\}$ nel quale la funzione si mantiene positiva. Poichè $I_n \subset U$ per ogni n tale che $(b-a)/2^n < \delta$, otteniamo una contraddizione, osservando che in ognuno di questi intervalli la funzione assume, agli estremi, valori di segno opposto. La dimostrazione, nel caso $f(\xi) > 0$, è del tutto analoga. □

Nel corso della dimostrazione nonstandard abbiamo visto che, usando i numeri del tipo $a + \nu(b-a)/\omega$ $(\nu = 0, 1, \ldots, \omega)$, si ottiene una partizione di ${}^\star[a, b]$ in intervalli di ampiezza infinitesima. Ciò vuol dire, si badi bene, che ogni numero reale di ${}^\star[a, b]$ appartiene *ad uno e uno solo* di detti intervalli. Poichè gli intervalli della partizione sono numerosi quanto i numeri $\star$-naturali non maggiori di ω, possiamo concludere che l'intervallo $[0, \omega]$ ha cardinalità non inferiore a quella del sottoinsieme dei numeri reali dell'intervallo ${}^\star[a, b]$, cioè di $[a, b]$. Poichè l'intervallo $[a, b]$ ha la cardinalità del continuo, ne segue che la cardinalità di $[0, \omega]$, e quindi quella di ${}^\star\mathbb{N}$, è non inferiore al continuo.

Giova ancora osservare che si è così provato anche che i segmenti iniziali $[0, \nu]$ di ${}^\star\mathbb{N}$ hanno o cardinalità finita, quando ν è un numero naturale, o non inferiore al continuo, quando ν è infinito. Per loro stessa definizione, tali risultano anche le cardinalità degli insiemi $\star$-finiti.

Il teorema appena provato consente una sua formulazione più generale che ora riportiamo.

Teorema 8.1.5 (di connessione). *Se f, continua in un intervallo, assume ivi due valori diversi, assume anche ogni valore intermedio.*

DIMOSTRAZIONE. Siano x_1, x_2 due punti tali che $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Supposto $x_1 < x_2$, sia c tale che $(c - y_1)(c - y_2) < 0$. Allora, la funzione $g = f - c$ è, per il Teorema 8.1.2(i), continua e inoltre assume in x_1 e x_2 valori di segno opposto. Esiste, quindi, per il Teorema di Bolzano, un punto $x \in [x_1, x_2]$ tale che $g(x) = 0$, cioè $f(x) = c$. □

[2]Il teorema afferma che se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0\,(< 0)$, allora esiste un intorno U di x_0 nel quale i valori di f sono positivi (negativi). La prova è immediata, basta scegliere come intorno di $f(x_0)$ un intervallo aperto che escluda lo zero.

Riportiamo ora, per confrontarle, sia la prova nonstandard che quella classica del secondo teorema fondamentale citato all'inizio del capitolo.

Teorema 8.1.6 (di compattezza). *Sia f continua nell'insieme compatto K. Allora, $f[K]$ è anch'esso compatto.*

DIMOSTRAZIONE. `PROVA NONSTANDARD` Per il Criterio di compattezza 6.3.7, basta provare ${}^\star f[{}^\star K] = {}^\star(f[K]) \subset \bigcup_{r \in f[K]} \mu(r)$ (ove la prima uguaglianza deriva dal Teorema 2.4.3(iv)). Sia dunque $b \in {}^\star f[{}^\star K]$. Esiste allora $b_1 \in {}^\star K$ tale che $b = {}^\star f(b_1)$. Essendo K compatto, risulta, per il criterio di compattezza, $b_1 \in {}^\star K \subset \bigcup_{r \in K} \mu(r)$ e quindi esiste un reale r_1 tale che $r_1 \approx b_1$. Per la continuità di f riesce allora, per il Teorema 8.1.1, $r = f(r_1) \approx {}^\star f(b_1) = b$. Ne segue $b \in \mu(r)$ con $r \in f[K]$ e quindi la tesi.

`PROVA STANDARD` Proviamo intanto che l'imagine $f[K]$ è limitata. Infatti, sia, per assurdo, f illimitata. Allora, per ogni naturale n esiste (per l'assioma della scelta) un punto $r_n \in K$ tale che $|f(r_n)| > n$. L'insieme $E = \{r_n : n \geq 0\}$, avendo imagine non limitata e quindi infinita, risulta infinito e limitato, essendo $E \subset K$ insieme limitato (Teorema di Heine-Pincherle-Borel 6.4.1). Dal Teorema di Bolzano-Weierstrass 6.4.3, esiste allora un punto di accumulazione $\hat{r}$ per E e quindi per K. Ora, essendo, per il Teorema 6.4.1, K chiuso, $\hat{r} \in K$ e quindi f è definita in $\hat{r}$. Dal modo come sono stati scelti gli r_n otteniamo che in ogni intorno di $\hat{r}$ la funzione f ha valori grandi a piacere, contraddicendo così la continuità di f nel punto $\hat{r}$.

Proviamo ora che l'imagine $f[K]$ è chiusa. Sia, per assurdo, l'imagine non chiusa. Esiste allora r' appartenente alla chiusura di $f[K]$ tale che $r' \notin f[K]$. La funzione

$$g(x) = \frac{1}{|f(x) - r'|}$$

risulta definita nell'insieme chiuso e limitato K e ivi continua. Ma, l'ipotesi fatta su r' assicura che $|f(x) - r'|$ assume in K valori arbitrariamente piccoli, per cui g risulta illimitata, in contrasto con la prima parte della dimostrazione che prova la limitatezza di ogni funzione continua definita su K. □

Una immediata conseguenza del teorema appena provato e del Teorema di Heine-Pincherle-Borel, è il seguente risultato di estrema importanza, che si ottiene osservando che ogni insieme non vuoto chiuso e limitato ammette, per la completezza dei reali, minimo e massimo. Ne proponiamo anche la prova nonstandard, sia come ulteriore esempio dell'applicazione dei metodi $\star$-finiti che per il suo indubbio interesse, poichè consente di evitare l'uso dei due teoremi sopra citati. L'idea su cui si basa è suggerita dalla suggestione che suddividendo l'intervallo trasformato in un numero $\star$-finito di intervallini di uguale ampiezza infinitesima, il massimo dei valori assunti dalla funzione trasformata sugli estremi degli intervallini (certamente esistente) deve essere infinitamente prossimo al massimo della funzione sull'intervallo di partenza.

Teorema 8.1.7. (Weierstrass) *Ogni funzione definita nell'intervallo reale* $[a, b]$ *ammette valore minimo e massimo.*

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare l'esistenza del massimo. Consideriamo la suddivisione interna $\mathbf{x}$ in intervalli di ampiezza infinitesima, introdotta nel Lemma 8.1.3. Ora, per il Lemma 7.3.2(i), la sequenza ${}^\star f(x_0), \ldots, {}^\star f(x_\omega)$ è una $\star$-sequenza e quindi per il Teorema 4.6.2(v), ammette elemento massimo, diciamo ${}^\star f(x_{\nu'})$. Poichè $x_{\nu'} \in {}^\star[a, b]$, possiamo considerare la sua parte standard e porre $c = \mathrm{st}(x_{\nu'})$.

Proviamo ora che $f(c)$ è in valore massimo di f in $[a, b]$. A tal fine, sia $x \in [a, b]$. Posto $d = b - a$, sussiste allora il metaenunciato:

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\, \exists k \in \mathbb{N} \left(0 \leq k < \nu \,\mathrm{e}\, a + \frac{kd}{\nu} \leq x \leq a + \frac{(k+1)d}{\nu}\right).$$

Dopo una semiformalizzazione più dettagliata, tramite PdT e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.5(ii), 3.6.6(v) e 3.6.7(ii),(v), risulta che sussiste anche la proposizione:

$$\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, \exists k \in {}^\star\mathbb{N} \left(0 \leq k < \nu \,\mathrm{e}\, a + \frac{kd}{\nu} \leq x \leq a + \frac{(k+1)d}{\nu}\right).$$

Conseguentemente, esiste uno $\star$-naturale k tale che $0 \leq k < \omega$ e

$$a + \frac{kd}{\omega} \leq x \leq a + \frac{(k+1)d}{\omega}.$$

Poichè l'intervallo di estremi $a + kh/\omega, a + (k+1)d/\omega$ ha ampiezza infinitesima d/ω e f è continua in x, per il Teorema 8.1.1,

$${}^\star f\left(a + \frac{kd}{\omega}\right) \approx f(x) \approx {}^\star f\left(a + \frac{(k+1)d}{\omega}\right).$$

Ora, per definizione di ν', si ha ${}^\star f(x_{\nu'}) \geq {}^\star f(a + kd/\omega)$; inoltre, per la continuità di f in c, si ha anche $f(c) \approx {}^\star f(x_{\nu'})$. Osservato infine che gli $\star$-reali in oggetto sono tutti finiti, possiamo considerare le loro parti standard e quindi, per il Teorema 5.5.4(ix), $f(x) \leq f(c)$. □

Ricorrendo alla caratterizzazione della continuità, proviamo infine un risultato, relativo alle potenze a base infinitesima, che è stato utilizzato per provare che l'insieme degli ordini di grandezza è denso e non completo (dimostrazione del Teorema 5.6.3(iii)).

Lemma 8.1.8. *Sia $b > 0$ non infinitesimo e $\epsilon > 0$. Allora ϵ^b è infinitesimo.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, essendo $\epsilon < 1$, dati $\omega > 0$ infinito e $c > 0$ apprezzabile, risulta $0 < \epsilon^\omega < \epsilon^c$ (per la monotonia delle trasformate delle funzioni esponenziali provata nel punto 5 della Sezione 7.2).

Pertanto, è sufficiente provare il teorema per $b > 0$ apprezzabile. Esistono allora, per il Teorema 5.2.2(iii), r_1, r_2 reali tali che $0 < r_1 < b < r_2$. Risulta dunque $\epsilon^{r_1} > \epsilon^b > \epsilon^{r_2}$. Ora, essendo la potenza reale ad esponente reale positivo continua nell'origine [3], possiamo concludere, per il Teorema 8.1.1, che $\epsilon^{r_1}, \epsilon^{r_2}$ sono degli infinitesimi. Conseguentemente, lo è anche ϵ^b, essendo $\mu(0)$, per il Teorema 5.4.2, un insieme convesso. □

8.2 Continuità uniforme

Iniziamo col ricordare che una funzione f, di dominio D, è **uniformemente continua** in D, se per ogni $\xi > 0$ reale, esiste $\eta > 0$ reale tale che:

$$\forall x_1, x_2 \in D \, (|x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \xi). \tag{8.1}$$

Il prossimo teorema fornisce la caratterizzazione infinitesimale della continuità uniforme di una funzione in un insieme.

Teorema 8.2.1. *Sia f una funzione di dominio D. Allora, f è uniformemente continua in D se e solo se ${}^\star f$ muta numeri infinitamente vicini di ${}^\star D$ in numeri infinitamente vicini; in simboli,*

$$f \text{ uniformemente continua in } D \Leftrightarrow \forall b \in {}^\star D \, ({}^\star f[\mu(b)] \subset \mu({}^\star f(b))).$$

Dimostrazione. Sia f uniformemente continua in D. Allora, dato $\xi > 0$ esiste $\eta > 0$ tali che verificano (8.1). Non è difficile constatare, tramite PdT e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.4(xv), 3.6.6(v), 3.6.7(ii),(v) e 7.1.1(iv), che sussiste la proposizione: $\forall x_1, x_2 \in {}^\star D \, (|x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |{}^\star f(x_1) - {}^\star f(x_2)| < \xi)$.

[3] Ricordiamo che, qualora si ammettano solo esponenti positivi r, la funzione potenza viene considerata anche nell'origine, ponendo $0^r = 0$, ottenendo così una funzione continua.

Ciò premesso, siano $b, b_1 \in {}^\star D$ e $b_1 \approx b$. Allora $|b_1 - b| = \epsilon < \eta$ e quindi, per lo $\star$-enunciato, $|{}^\star f(b_1) - {}^\star f(b)| < \xi$. Per l'arbitrarietà di ξ, riesce dunque $|{}^\star f(b_1) - {}^\star f(b)|$ infinitesimo. Ne segue la tesi.

Sia ora ${}^\star f[\mu(b)] \subset \mu({}^\star f(b))$ per ogni $b \in {}^\star D$. Fissato un numero reale $\alpha > 0$ e considerato un infinitesimo $\epsilon > 0$ arbitrario, siano $b_1, b_2 \in {}^\star D$ tali che $|b_1 - b_2| < \epsilon$. Allora $b_1 \approx b_2$, da cui risulta ${}^\star f(b_1) \approx {}^\star f(b_2)$ e quindi $|{}^\star f(b_1) - {}^\star f(b_2)| < \alpha$. Sussiste dunque la frase: $\exists x \in {}^\star\mathbb{R}^+ \, \forall x_1, x_2 \in {}^\star D \, (|x_1 - x_2| < x \Rightarrow |{}^\star f(x_1) - {}^\star f(x_2)| < \alpha$ e quindi anche la $\exists x \in \mathbb{R}^+ \, \forall x_1, x_2 \in D \, (|x_1 - x_2| < x \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \alpha$. Dall'arbitrarietà di α, si ha la tesi. $\square$

È interessante notare che le caratterizzazioni nonstandard della continuità e di quella uniforme si esprimono in modo quasi uguale. In entrambi i casi, infatti, si richiede che l'insieme ${}^\star f[\mu(b)]$ sia incluso nella monade di ${}^\star f(b)$. La differenza consiste nel richiedere che ciò accada per *ogni* $\star$-reale b di ${}^\star D$, nel caso della continuità uniforme, limitatamente a ogni b *reale* di ${}^\star D$, nel caso più debole, della continuità.

Esempio Come applicazione dei due teoremi di caratterizzazione considerati, facciamo vedere che la funzione $\sin(1/x)$ è continua ma non uniformemente continua. Per quanto riguarda la continuità, sia $\epsilon > 0$. Osserviamo, preliminarmente, che la funzione sin è continua nell'origine, essendo $|{}^\star \sin \epsilon| \leq \epsilon$; ne segue che anche la funzione cos è continua nell'origine, poichè ${}^\star \cos \epsilon = 1 - 2({}^\star \sin \epsilon/2)^2$. Ciò osservato, dato x, risulta

$$ {}^\star \sin(\frac{1}{x} + \epsilon) = {}^\star \sin \frac{1}{x} \; {}^\star \cos \epsilon + {}^\star \sin \epsilon \; {}^\star \cos \frac{1}{x} \approx \sin \frac{1}{x} \cdot 1 + 0 \cdot \cos \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{x}. $$

Per quanto riguarda la non continuità uniforme, basta individuare due numeri infinitesimi $\epsilon, \epsilon' > 0$ tali che $\sin(1/\epsilon) \not\approx \sin(1/\epsilon')$, o, equivalentemente, due numeri infiniti positivi ω, ω' tali che $\sin \omega \not\approx \sin \omega'$. Scelto, a tale scopo, $\omega > 0$ e tenuto conto che, per quanto visto nel paragrafo 4 della Sezione 7.2, la funzione ${}^\star \sin$ è periodica di periodo 2π, otteniamo ${}^\star \sin((\pi/2) + 2\pi\omega) = \sin(\pi/2) = 1$ e ${}^\star \sin(0 + 2\pi\omega) = \sin 0 = 0$.

Concludiamo il paragrafo provando il teorema di Heine-Cantor, sia con metodi infinitesimali che standard per il solito confronto.

Teorema 8.2.2 (Heine-Cantor). *Sia f continua nell'insieme compatto K. Allora f è uniformemente continua in K.*

DIMOSTRAZIONE. `PROVA NONSTANDARD` Siano $b_1, b_2 \in {}^\star K$ e $b_1 \approx b_2$. Per il Criterio di compattezza, ${}^\star K \subset \bigcup_{r \in K} \mu(r)$. Esiste quindi un numero reale $r \in {}^\star K$ tale che

$b_1 \approx r \approx b_2$. Per la continuità di f si ha, per il Teorema 8.1.1, ${}^\star f(b_1) \approx f(r) \approx {}^\star f(b_2)$ e quindi ${}^\star f(b_1) \approx {}^\star f(b_2)$. Ne segue, per il Teorema 8.2.1, la tesi.

`PROVA STANDARD` Assumiamo, per assurdo, che esista un reale $\xi > 0$ tale che, per ogni $\delta > 0$, esistano x', x'' tali che $|x' - x''| < \delta$ e $|f(x') - f(x'')| \geq \xi$. Ricorrendo all'assioma della scelta, possiamo, per ogni naturale n, trovare due punti x'_n, x''_n tali che

$$|x'_n - x''_n| < 1/n, \qquad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \xi. \tag{8.2}$$

L'insieme limitato $E = \{x'_n \,|\, n \geq 0\}$ è infinito; in caso contrario, per infiniti n, i valori x'_n coinciderebbero in un punto x' nel quale, per (8.2), f non potrebbe essere continua. Esiste allora, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass 6.4.3, un punto di accumulazione $\bar{x}$ per l'insieme E; inoltre, $\bar{x} \in K$, essendo K chiuso.

Proviamo ora che f non è continua nel punto $\bar{x}$. Dato un intorno arbitrario U di $\bar{x}$, per n sufficientemente grande $x'_n, x''_n \in U$ e allora, per la seconda disuguaglianza di (8.2), almeno uno dei due numeri $f(x'_n), f(x''_n)$ differisce in valore assoluto da $f(\bar{x})$ per più di $\xi/2$. Dunque, se prendessimo per verificare la continuità di f in $\bar{x}$, $\xi_1 < \xi/2$, non troveremmo alcun intorno U' nel quale, per ogni $x \in K$, risulti $|f(x) - f(\bar{x})| < \xi$. $\square$

Capitolo 9

Limiti delle funzioni

> La théorie des *limites* est à la base de la vraie Métaphysique du calcul différentiel.
> *J.L.D'Alembert, Encyclopédie Méthodique (Mathématiques)*

Nelle prime due sezioni proviamo, dapprima, tre diverse caratterizzazioni nonstandard della nozione di limite (*esterna*, *interna* e *mista*) e, poi, formuliamo il teorema della permanenza del segno e il criterio del limite finito di Cauchy, sia nella versione infinitesimale che classica.

Dopo aver analizzato nella terza alcuni casi particolari relativi ai limiti della somma e del reciproco, e determinato il limite della composta, affrontiamo nella quarta la versione infinitesimale del limite delle successioni di numeri reali e dei loro punti limite. In particolare, nel caso delle serie numeriche, forniamo nella quinta sia la caratterizzazione nonstandard del celebre criterio di convergenza di Cauchy, che una versione infinitesimale del criterio del confronto di Carl F.Gauss.

Infine nella sesta, con riferimento alle successioni di funzioni, caratterizziamo, in termini infinitesimali, sia la convergenza puntuale che quella uniforme. Relativamente a quest'ultima, proviamo poi il famoso teorema di Cauchy-Seidel sulla continuità della funzione limite come pure il fondamentale teorema di Ascoli-Arzelà (fornendone, per il solito confronto, anche le prove standard).

9.1 Caratterizzazioni esterna, interna e mista

In questa sezione ci occupiamo delle caratterizzazioni nonstandard delle varie nozioni di limite che, con notazione classica, possono essere sintetizzate, in modo unitario, con la scrittura $\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda$, ove ρ, λ appartengono a $\bar{\mathbb{R}}$. È bene ricordare, prima di proseguire, che con tale notazione s'intende esattamente che "ρ è di accumulazione per il dominio D della funzione f e, fissato un arbitrario intorno V di λ, esiste un intorno U di ρ tale che, se $r \in U \cap D$ e $r \neq \rho$, allora $f(r) \in V$".

Ciò richiamato, occupiamoci intanto del caso in cui ρ e λ sono entrambi numeri reali. Le nozioni di limite e di continuità di una funzione in un punto presentano, in questo caso, una stretta analogia. Sono pertanto analoghe, naturalmente, anche le formulazioni delle corrispondenti caratterizzazioni infinitesimali. È utile evidenziare, per questo, i punti che differenziano le due nozioni. Per la nozione di limite interessa esaminare il comportamento della funzione f in prossimità di ρ; non interessa invece considerare il valore di f in ρ, ove la funzione può essere anche non definita. Per questa nozione dunque è tassativo che ρ sia, come già accennato, di accumulazione per il dominio D di f, al quale può appartenere o no. Per la nozione di continuità, invece, in primo luogo interessa proprio il valore di f in ρ, che deve quindi appartenere a D; e solo quando, in particolare, è anche di accumulazione per D, interessa mettere a confronto i valori assunti da f in prossimità di ρ con $f(\rho)$.

Dopo queste considerazioni, tenendo presente la caratterizzazione dei punti di accumulazione (Teorema 6.3.1(v)) e quella di continuità di una funzione in un punto (Teorema 8.1.1), è facile provare che vale la caratterizzazione seguente.

Teorema 9.1.1. *Sia f una funzione di dominio D e ρ, λ numeri reali. Allora:* $\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda \Leftrightarrow (\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D \neq \emptyset$ *e* ${}^\star f[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset \mu(\lambda)$.

Dimostrazione. Basta prolungare, se necessario, per continuità la funzione f in ρ e usare, per il prolungamento, la caratterizzazione 8.1.1. □

È interessante osservare come la caratterizzazione nonstandard della nozione di limite (qualora sia reale) preveda un'analisi dei valori che la funzione ${}^\star f$ assume negli elementi del dominio ${}^\star D$ infinitamente prossimi al numero reale ρ, cioè sugli elementi dell'insieme $(\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D$ costituito *solo* da numeri $\star$-reali *non reali*. Si ripete qui quanto già visto per altre caratterizzazioni

nonstandard di nozioni topologiche. La monade di un punto prende, cioè, il posto dell'intera famiglia dei suoi intorni di base (Teorema 6.1.2).
In questa ottica, passando al caso λ reale e ρ uno dei simboli $-\infty, +\infty, \infty$, non è difficile intuire come i rispettivi intorni esterni ${}^{\star}\mathbb{R}^{-}_{nf}$, ${}^{\star}\mathbb{R}^{+}_{nf}$, ${}^{\star}\mathbb{R}_{nf}$ si inseriscano, nelle tre diverse formulazioni della caratterizzazione nonstandard, in sostituzione delle famiglie degli intorni standard di $-\infty, +\infty$ e ∞.

Il prossimo teorema congloba, in modo unificato, tutte le caratterizzazioni nonstandard di limite relative alle sedici situazioni che si possono considerare in corrispondenza ai possibili valori di ρ e λ. Osserviamo che qui le caratterizzazioni sono di *natura esterna*. Infatti, prevedono che le tradizionali famiglie di intorni vengano sostituite dall'intorno esterno: le famiglie relative ai numeri reali dalle monadi, quelle di $-\infty, +\infty, \infty$ da ${}^{\star}\mathbb{R}^{-}_{nf}$, ${}^{\star}\mathbb{R}^{+}_{nf}$, ${}^{\star}\mathbb{R}_{nf}$, rispettivamente.

Teorema 9.1.2. (caratterizzazione esterna) *Siano f una funzione definita in D e $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora:*

$$\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda \Leftrightarrow (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^{\star}D \neq \emptyset \; e\, {}^{\star}f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda).$$

In particolare, nei tre casi seguenti, scelti in modo da cogliere sostanzialmente tutte le diverse situazioni, risulta:
$-\rho$ reale e $\lambda = +\infty$:

$$\lim_{x\to\rho} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^{\star}D \neq \emptyset \;\; e \; {}^{\star}f[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset {}^{\star}\mathbb{R}^{+}_{nf};$$

$-\rho = +\infty$ e λ reale:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \Leftrightarrow {}^{\star}\mathbb{R}^{+}_{nf} \cap {}^{\star}D \neq \emptyset \; e \; {}^{\star}f[{}^{\star}\mathbb{R}^{+}_{nf}] \subset \mu(\lambda);$$

$-\rho = \infty$ e $\lambda = -\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow {}^{\star}\mathbb{R}_{nf} \cap {}^{\star}D \neq \emptyset \; e \; {}^{\star}f[{}^{\star}\mathbb{R}_{nf}] \subset {}^{\star}\mathbb{R}^{-}_{nf}.$$

Dimostrazione. Essendo le dimostrazioni dei quindici casi rimasti [1] analoghe, è sufficiente riportarne una, lasciando le altre al lettore come esercizio. Consideriamo quindi ρ reale e $\lambda = +\infty$. Poichè la dimostrazione si ottiene adattando quella del Teorema 8.1.1, consigliamo di leggere questa seguendo contemporaneamente quella.

[1] Il caso ρ, λ reali è stato esaminato nel teorema precedente.

Sia intanto $\lim_{x\to\rho} f(x) = +\infty$. La $(\mu(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D = (\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D \neq \emptyset$ deriva dall'ipotesi "ρ di accumulazione per D" e dal Teorema 6.3.1(v). Per provare ${}^\star f[(\mu(\rho) \setminus \{\rho\})] \subset {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$, consideriamo un arbitrario intorno V di $+\infty$. Esiste allora un intorno U di ρ tale che $f[U \setminus \{\rho\}] \subset V$, cioè tale che in ogni suo elemento diverso da ρ e appartenente a D, la funzione f assume un valore appartenente a V. Trattasi dunque di una nozione di carattere locale, che si esprime col metapredicato $X(x)$:"$x \neq \rho \,\mathrm{e}\, x \in D \Rightarrow f(x) \in V$". Allora, per il Teorema 6.2.1(i) e i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(xv), sussiste la frase $\star$-$X(b)$:"$b \neq \rho \,\mathrm{e}\, b \in {}^\star D \Rightarrow {}^\star f(b) \in {}^\star V$", per ogni $b \in \mu(\rho)$. Ne segue ${}^\star f[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset {}^\star V$. Tenuto conto dell'arbitrarietà di V e del Teorema 6.1.2, otteniamo ${}^\star f[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(+\infty) = {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$.

Sia ora $(\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D \neq \emptyset$ e ${}^\star f[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. La prima condizione assicura, per il Teorema 6.3.1(v), che ρ è di accumulazione per D. Fissato poi un intorno V di $+\infty$, tramite il Teorema 6.1.4, risulta ${}^\star f[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset {}^\star V$ e quindi sussiste $\star$-$X(b)$ per ogni $b \in \mu(\rho)$. Allora, per il Teorema 6.2.1(i), $X(x)$ è una proprietà locale in ρ. Ne segue la tesi. □

Esempio Mostriamo, con alcuni esempi, come la caratterizzazione nonstandard di limite consenta d'introdurre una tecnica per il calcolo dei limiti basata su calcoli con numeri $\star$-reali.[2]

1. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3 - 2x}{x^2 + 2} = -\infty$. Dato $\omega \in {}^\star\mathbb{R}^-_{nf}$, risulta

$$ {}^\star f(\omega) = \frac{3\omega^3 - 2\omega}{\omega^2 + 2} = \omega\, \frac{3 - \frac{2}{\omega^2}}{1 + \frac{2}{\omega^2}} \in {}^\star\mathbb{R}^-_{nf}. $$

2. $\lim_{x\to+\infty} x\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = +\infty$. Dato $\omega \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$, risulta

$$ {}^\star f(\omega) = \omega\,(\sqrt{\omega+1} - \sqrt{\omega}) = \frac{\omega(\omega+1-\omega)}{\sqrt{\omega+1} + \sqrt{\omega}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega}\sqrt{1 + \frac{1}{\omega+1}}} = \frac{\sqrt{\omega}}{2+\epsilon} \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}, $$

ove l'ultima uguaglianza si giustifica osservando che, essendo $1/\omega$ infinitesimo e $\sqrt{1+x}$ una funzione continua, risulta, per il Teorema 8.1.1, $\sqrt{1 + 1/\omega} \approx 1$; si può quindi scrivere $\sqrt{1 + 1/\omega} = 1 + \epsilon$, con ϵ opportuno.

3. $\lim_{x\to1} (\ln x/\sqrt{1-x}) = 0$. Poichè l'insieme di definizione della funzione in esame f è l'intervallo $]0,1[$, quello della sua estensione ${}^\star f$ è, per il Teorema 2.4.3(iv),

[2] Abbiamo evidentemente denotato, seguendo la convenzione a suo tempo fatta, con il medesimo simbolo anche l'estensione nonstandard delle funzioni considerate $(\sqrt{\cdot}, \log, \exp)$.

l'intervallo ${}^\star]0,1[$ di numeri $\star$-reali. Pertanto, dovendo studiare il comportamento della funzione ${}^\star f$ in $\mu(1)\cap{}^\star]0,1[$, prendiamo $\epsilon>0$ e calcoliamo ${}^\star f(1-\epsilon)$.

Posto $\omega=1/\sqrt{\epsilon}$, risulta

$$\begin{aligned}
{}^\star f(1-\epsilon) &= \frac{\ln(1-\epsilon)}{\sqrt{\epsilon}} = \ln(1-\epsilon)^{1/\sqrt{\epsilon}} = \ln(1-\epsilon)^{\omega} = \ln(1-\frac{1}{\omega^2})^{\omega^2\cdot 1/\omega} \\
&= \frac{1}{\omega}\ln(1-\frac{1}{\omega^2})^{\omega^2} = \sqrt{\epsilon}\ln(1-\frac{1}{\omega^2})^{\omega^2} = \sqrt{\epsilon}\ln(\frac{1}{\mathrm{e}}+\epsilon_1) \\
&= \sqrt{\epsilon}\,(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}+\epsilon_2) = \sqrt{\epsilon}\,(-1+\epsilon_2)\in\mu(0).
\end{aligned}$$

I passaggi si giustificano osservando che prevedono nell'ordine:
– l'utilizzazione del ben noto limite $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-1/x)^x=1/\mathrm{e}$; si è infatti posto $(1-1/\omega^2)^{\omega^2}=(1/\mathrm{e})+\epsilon_1$, con ϵ_1 infinitesimo opportuno;
– l'utilizzazione della continuità della funzione ln; si è infatti posto $\ln((1/\mathrm{e})+\epsilon_1)=\ln(1/\mathrm{e})+\alpha_2$, con α_2 infinitesimo opportuno;
– l'utilizzazione della continuità della funzione $\sqrt{\cdot}$; infatti, per concludere che il prodotto $\sqrt{\epsilon}\,(-1+\epsilon_2)$ è infinitesimo occorre osservare che $-1+\epsilon_2$ è finito e che $\sqrt{\epsilon}$ è infinitesimo, e questo risulta da $\sqrt{\epsilon}=\sqrt{0+\epsilon}\approx\sqrt{0}=0$.

Come nel caso della nozione di insieme limitato di numeri reali, anche qui possiamo considerare una seconda caratterizzazione nonstandard trasformando la definizione classica di limite. Arriviamo così ad una proposizione che, nella parte nonstandard, è formulata in termini di $\star$-concetti i quali, in quanto tali, trattano esclusivamente di entità interne. A tale proposito, conviene introdurre il lemma seguente.

Lemma 9.1.3. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\star$-*(x intorno di ρ)* $\Leftrightarrow$ *x insieme interno che include un intorno sferico centrato in ρ di ampiezza $\star$-reale, se ρ è reale;*[3]

(ii) $\star$-*(x intorno di ρ)* $\Leftrightarrow$ *x insieme interno che include un segmento inferiore (superiore) di origine $\star$-reale, se $\rho=-\infty\,(+\infty)$;*

(iii) $\star$-*(x intorno di ρ)* $\Leftrightarrow$ *x insieme interno che include l'unione di due segmenti simmetrici di origine $\star$-reale positiva, se $\rho=\infty$.*

[3]Quindi, che può essere sia infinitesima, che apprezzabile, che infinita. A tale proposito, si veda la nota 3 del sesto capitolo.

Dimostrazione. (i) Il concetto "x intorno di ρ" può essere espresso dal metapredicato finitamente limitabile $X(x) : \exists b \in \mathbb{R}^+ \, \forall y \, (y =]\rho - b, \rho + b[\Rightarrow y \subset x)$, da cui otteniamo, usando i Teoremi 3.6.1(iv),(v), 3.6.5(vi) e 3.6.7(ii),(v), il relativo $\star$-concetto $\star$-$X(x)$: "$\exists b \in {}^\star\mathbb{R}^+ \, \forall y \, (y =]\rho - b, \rho + b[\Rightarrow y \subset x)$ e x interno". Dunque, sono $\star$-intorni di ρ tutti e soli gli intorni sferici centrati in ρ di ampiezza infinitesima, apprezzabile o infinita.

(ii) + (iii) Poichè le dimostrazioni sono analoghe, consideriamo il caso $\rho = +\infty$, lasciando gli altri al lettore come esercizio. Il concetto "x intorno di ρ" può essere espresso dal metapredicato finitamente limitabile: $X(x) : \exists b \in \mathbb{R} \, \forall y \, (y =]b, \hookrightarrow [\Rightarrow y \subset x)$, da cui, usando i Teoremi 3.6.1(iv),(v) e 3.6.5(vii), otteniamo il relativo $\star$-concetto $\star$-$X(x) : \exists b \in {}^\star\mathbb{R} \, \forall y \, (y =]b, \hookrightarrow [\Rightarrow y \subset x)$. Dunque, sono $\star$-intorni di $+\infty$ tutti e soli i segmenti superiori di origine uno $\star$-reale. □

Precisata la nozione di $\star$-intorno, enunciamo la seguente caratterizzazione di *natura interna* che usa lo $\star$-concetto di intorno, la cui facile dimostrazione viene lasciata al lettore come esercizio.

Teorema 9.1.4. (caratterizzazione interna) *Siano f una funzione definita in D, ρ di accumulazione per D e $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$.*[4] *Allora:*

$$\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda \iff \forall U (U \star\text{-}intorno\ di\, \lambda \Rightarrow \exists V (V \star\text{-}intorno\ di\ \rho\ e\, {}^\star f[V \setminus \mathbb{R}] \subset U)).$$

Utilizzando queste due ultime caratterizzazioni, è possibile ottenerne una terza, questa volta di *natura mista*. Precisamente: interna con riferimento a ρ, di cui considera opportuni $\star$-intorni; esterna con riferimento a λ, di cui considera l'intorno esterno $\imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda)$. Questa caratterizzazione indebolisce quella esterna. Infatti, in quest'ultima la condizione richiesta per ${}^\star f$ deve valere con riferimento a tutto l'intorno esterno, mentre qui è sufficiente che valga con riferimento ad un suo opportuno $\star$-intorno.

Teorema 9.1.5. (caratterizzazione mista) *Siano f una funzione definita in D, ρ di accumulazione per D e $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora:*

$$\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \exists U (U \star\text{-}intorno\ di\ \rho\ e\ U \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho)\ e\, {}^\star f[U \setminus \mathbb{R}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda)).$$

[4] Notiamo che la dichiarazione "ρ di accumulazione per D", diversamente da quanto fatto nella caratterizzazione esterna, è qui posta esplicitamente tra le ipotesi. La cosa si ripeterà anche nel prossimo teorema. Ciò permette di rendere più semplice la formulazione della caratterizzazione nonstandard a destra dell'equivalenza, concentrando, così, l'attenzione sulla parte essenziale della nozione di limite, oggetto della caratterizzazione.

Dimostrazione. Sia intanto $\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda$. La tesi segue dal Teorema 9.1.2 e dalla constatazione che esistono, per il Lemma 9.1.3, $\star$-intorni inclusi in $\imath^{(\text{ext})}(\rho)$.

Sia ora U uno $\star$-intorno di ρ incluso in $\imath^{(\text{ext})}(\rho)$ e tale che ${}^\star f[U \setminus \mathbb{R}] \subset \imath^{(\text{ext})}(\lambda)$. Dato $\xi > 0$ reale, consideriamo in $\mathbb{R}$ l'intorno $\imath^{(\xi)}(\lambda)$. Allora, per il Teorema 6.1.2, $\imath^{(\text{ext})}(\lambda) \subset {}^\star\imath^{(\xi)}(\lambda)$ e quindi ${}^\star f[U \setminus \mathbb{R}] \subset {}^\star\imath^{(\xi)}(\lambda)$.

Sia intanto ρ reale. Per il Teorema 2.3.3(vii) sussiste allora la frase:

$$\exists u \in {}^\star\mathbb{P}(\mathbb{R})\, (u \star\text{-intorno di } \rho \text{ e} {}^\star f[u \setminus \{\rho\}] \subset {}^\star\imath^{(\xi)}(\lambda))$$

e quindi, usando PdT e i Teoremi 3.6.1(iv),(v), 3.6.3(i),(iv) e 3.6.4(vi), sussiste anche la proposizione:

$$\exists u \in \mathbb{P}(\mathbb{R})\, (u \,\text{intorno di } \rho \text{ e} \, f[u \setminus \{\rho\}] \subset \imath^{(\xi)}(\lambda)).$$

Dall'arbitrarietà di ξ si ottiene la tesi.

Nel caso che ρ sia uno dei simboli $\pm\infty, \infty$, si procede allo stesso modo, osservando che, in questo caso, $U \setminus \mathbb{R} = U$. $\square$

Concludiamo la sezione, provando l'importante teorema della permanenza del segno dandone due versioni equivalenti: una classica e una infinitesimale.

Teorema 9.1.6. (della permanenza del segno) *Siano f una funzione definita in D, ρ di accumulazione per D e $\lim_{x\to\rho} f(x) = \lambda \neq 0, \infty$. Sussistono allora le versioni tra loro equivalenti:*

(i) Versione infinitesimale: *Per ogni $b \in (\imath^{(\text{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$, l'imagine ${}^\star f(b)$ ha segno concorde con λ;*

(ii) Versione classica: *Esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}$ di ρ tale che, per ogni $x \in (U \setminus \{\rho\}) \cap D$, l'imagine $f(x)$ ha segno concorde con λ.*

Dimostrazione. Lasciamo al lettore, come esercizio, la prova (essendo più semplice) relativa ai casi $-\infty, +\infty$. Sia dunque $\lambda \neq 0$ reale.

(i) Per il Teorema 9.1.2, ${}^\star f(b) \in \mu(\lambda)$ per ogni $b \in (\imath^{(\text{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$. Ne segue la tesi, perchè, per il Teorema 5.4.1, ogni elemento di $\mu(\lambda)$ ha il segno di $\lambda \neq 0$, essendo λ reale non nullo e quindi non infinitesimo.

(ii) Proviamo la versione classica mostrando che è equivalente a quella infinitesimale. Lo facciamo nel caso $\lambda > 0$ (se $\lambda < 0$ la prova è naturalmente strettamente analoga). La proprietà in oggetto è di carattere locale in ρ. Si tratta, infatti, di provare che esiste un intorno U di ρ tale che $X(u) : u \in (U \setminus \{\rho\}) \cap D \Rightarrow f(u) > 0$. Osservato che, tramite la tecnica degli $\star$-concetti e il Teorema 2.3.3(i),(iii),(v), risulta $\star$-$X(u) : u \in ({}^\star U \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D \Rightarrow {}^\star f(u) > 0$, otteniamo, mediante il Teorema 6.2.1(i), che la versione classica è equivalente alla proposizione "$\star$-$X(b)$ per ogni $b \in \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho)$". Ne segue l'equivalenza con la versione infinitesimale, notato che, per il Teorema 6.1.4, $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \subset {}^\star U$. $\square$

9.2 Limite finito

Per quanto riguarda il limite finito, proviamone sia l'unicità che il relativo criterio di convergenza di Cauchy.

Teorema 9.2.1. (Unicità del limite finito)[5] *Siano λ_1, λ_2 limiti della funzione nel punto di accumulazione ρ e λ_1 reale. Allora $\lambda_1 = \lambda_2$.*

Dimostrazione. Dal Teorema 9.1.2 segue che esiste $b \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$ tale che ${}^\star f(b) \in \mu(\lambda_1)$. Allora, ${}^\star f(b) \approx \lambda_1$ e quindi, al pari di λ_1, anche ${}^\star f(b)$ è finito. Dovendo essere, sempre per il medesimo teorema, ${}^\star f(b) \in \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda_2)$, risulta che λ_2 non può essere né ∞, né $\pm\infty$, che, altrimenti, si otterrebbe la contraddizione ${}^\star f(b)$ infinito. Pertanto, λ_2 è reale e, sempre per la caratterizzazione esterna, $\lambda_1 \approx {}^\star f(b) \approx \lambda_2$. Da λ_1, λ_2 reali e infinitamente prossimi otteniamo $\lambda_1 = \lambda_2$. $\square$

Consideriamo ora il celebre criterio di convergenza di Cauchy relativo all'esistenza del limite finito. Nel teorema seguente, forniamone una versione nonstandard che proviamo essere equivalente a quella classica, per cui tale versione può essere, a buon diritto, considerata una formulazione infinitesimale del criterio in esame.

Teorema 9.2.2. (Criterio del limite finito) *Siano f una funzione definita in D e ρ di accumulazione per D. La condizione infinitesimale:*

$$ {}^\star f(b_1) \approx {}^\star f(b_2), \text{ qualunque siano } b_1, b_2 \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D \tag{9.1} $$

assicura, intanto, che ${}^\star f(b_1) \in {}^\star\mathbb{R}_f$ qualunque sia $b_1 \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$. Inoltre, la funzione f ammette limite finito in ρ se e solo se:

(i) Versione infinitesimale: *Sussiste la condizione infinitesimale* (9.1)*;*

[5] Com'è noto, non esiste un teorema di unicità del limite quando il limite non è reale. Infatti, se è $-\infty$ o $+\infty$, allora è ovviamente anche ∞. Se invece è ∞, allora potrebbe anche essere $-\infty$ o $+\infty$; l'unica alternativa che *non può* sussistere è che sia contemporaneamente $-\infty$ e $+\infty$.

(ii) Versione classica (Cauchy): *Per ogni numero reale $\xi > 0$, esiste un intorno U di ρ tale che $|f(r_1)-f(r_2)| < \xi$, per ogni $r_1, r_2 \in (U \setminus \{\rho\}) \cap D$.*

Dimostrazione. Assunta la condizione infinitesimale, sia $b_1 \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$. Supposto, intanto, ρ finito, consideriamo l'insieme $D_1 = \{b \in {}^\star\mathbb{R} \mid b \in {}^\star D \setminus \{\rho\} \Rightarrow |{}^\star f(b) - {}^\star f(b_1)| < 1\}$ che è interno.[6] Inoltre, $\mu(\rho) \subset D_1$. Infatti, dato $b \in \mu(\rho) \cap ({}^\star D \setminus \{\rho\}) = (\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D$ si ha, per (9.1), ${}^\star f(b) \approx {}^\star f(b_1)$; ne segue $|{}^\star f(b) - {}^\star f(b_1)| < 1$ e quindi $b \in D_1$. Per il Principio dell'intorno limitato 6.1.3(i), esiste allora un reale $\delta > 0$ tale che ${}^\star]\rho - \delta, \rho + \delta[\subset D_1$. Poichè ρ è di accumulazione per D, esiste $r \neq \rho$ tale che $r \in]\rho - \delta, \rho + \delta[\cap D$. Allora, $r \in D_1$ e quindi $|f(r) - {}^\star f(b_1)| < 1$. Pertanto $f(r) - 1 < {}^\star f(b_1) < f(r) + 1$, con $f(r)$ reale; ne segue ${}^\star f(b_1)$ finito.

Sia ora ρ uno dei simboli $\pm\infty, \infty$. Consideriamo allora l'insieme $D_2 = \{b \in {}^\star\mathbb{R} \mid b \in {}^\star D \Rightarrow |{}^\star f(b) - {}^\star f(b_1)| < 1\}$ che, come nel caso precedente, è subito visto essere un insieme interno che include $\imath^{\mathrm{ext})}(\rho)$. Ricorrendo allora al Principio dell'intorno illimitato 6.1.3(ii), con argomentazioni analoghe alle precedenti, concludiamo, ancora, che ${}^\star f(b_1)$ è finito.

(i) Sia intanto $\lim\limits_{x \to \rho} f(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Ricorrendo al Teorema 9.1.2, otteniamo ${}^\star f[\imath^{\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] \subset \imath^{\mathrm{ext})}(\lambda) = \mu(\lambda)$ e quindi la validità di (9.1).

Sussista ora la condizione infinitesimale. Poichè ρ è di accumulazione per D, risulta $(\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D \neq \emptyset$.[7] Ciò constatato, sia $b_1 \in ({}^\star\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$. Allora, per la prima parte della tesi, ${}^\star f(b_1)$ è finito. Risulta quindi lecito considerare la parte standard di ${}^\star f(b_1)$. Posto $\lambda = \mathrm{st}({}^\star f(b_1))$ e scelto un qualsiasi $b_2 \in ({}^\star\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$, si ha ${}^\star f(b_2) \approx {}^\star f(b_1) \approx \lambda$ e quindi ${}^\star f(b_2) \in \mu(\rho)$. Ne segue, per il Teorema 9.1.2, la tesi.

(ii) Poichè la necessità si prova banalmente in modo standard, proviamo soltanto la condizione sufficiente. A tal fine, basta, evidentemente, verificare che (ii) $\Rightarrow$ (9.1). Ci limitiamo a fornirne la prova nel caso ρ reale, in quanto le prove negli altri casi sono del tutto analoghe.

Assumiamo, dunque, la condizione di Cauchy. Allora, fissato ξ reale, sia U un intorno di ρ tale che sussista la frase: $\forall x_1, x_2 \in (U \setminus \{\rho\}) \cap D\, (|f(x_1) - f(x_2)| < \xi)$. Sussiste allora, per PdT e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.6(v), 3.6.7(ii),(v) e 7.1.1(iv), anche la proposizione: $\forall x_1, x_2 \in {}^\star((U \setminus \{\rho\}) \cap D)\, (|{}^\star f(x_1) - {}^\star f(x_2)| < \xi)$. È quindi valida, per il Teorema 2.3.3(i),(iii),(v), anche la: $\forall x_1, x_2 \in ({}^\star U \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D\, (|{}^\star f(x_1) - {}^\star f(x_2)| < \xi)$. Osservato che, per il Teorema 6.1.4, $\mu(\rho) \subset {}^\star U$ (qualunque sia U),

[6] Infatti, il predicato che lo definisce è chiaramente formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno ed è quindi applicabile il Teorema d'isolamento interno.

[7] Basta ripercorrere la dimostrazione della proposizione (v) del Teorema 6.3.1 per ottenere quanto dichiarato.

si ha allora $\mu(\rho) \setminus \{\rho\} \subset {}^\star U \setminus \{\rho\}$. Pertanto, se $b_1, b_2 \in (\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D$, allora $|{}^\star f(b_1) - {}^\star f(b_2)| < \xi$. Per l'arbitrarietà di ξ segue allora ${}^\star f(b_1) - {}^\star f(b_2)$ infinitesimo, cioè ${}^\star f(b_1) \approx {}^\star f(b_2)$. La dimostrazione è così conclusa. □

9.3 Operazioni con i limiti

È ben noto che il problema di ottenere il limite delle funzioni somma e prodotto, a partire dai limiti noti di due funzioni, conduce alla considerazione di una casistica piuttosto varia che comprende sia i casi in cui la risposta al problema è determinata (e sono i più) che i casi d'indeterminazione. Qui consideriamo invece, a titolo d'esempio, due casi determinati, sufficienti per illustrare la tecnica dimostrativa che si applica, con opportuni adattamenti, anche agli altri casi, che lasciamo al lettore come esercizio.

Teorema 9.3.1. *Siano f, g di dominio D e ρ di accumulazione per D. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Siano ρ finito e $\lim_{x\to\rho} f(x) = \lim_{x\to\rho} g(x) = +\infty$. Allora, $\lim_{x\to\rho}(f+g)(x) = +\infty$;

(ii) Siano $\rho = -\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lambda \neq 0$ reale. Allora, $\lim_{x\to-\infty}(f \cdot g)(x) = \infty$.

Dimostrazione. (i) Basta provare, per il Teorema 9.1.2, che, dato $b \in (\mu(\rho) \setminus \{\rho\}) \cap {}^\star D$, risulta ${}^\star(f+g)[\mu(\rho) \setminus \{\rho\}] \subset {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Ora, per ipotesi, ${}^\star f(b), {}^\star g(b) \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$ e quindi, per il Teorema 7.1.1(i), ${}^\star(f+g)(b) = {}^\star f(b) + {}^\star g(b) \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Ne segue la tesi.

(ii) Basta provare, sempre per il Teorema 9.1.2, che ${}^\star(f \cdot g)[{}^\star\mathbb{R}^-_{nf}] \subset {}^\star\mathbb{R}_{nf}$. Sia, dunque, $b \in {}^\star\mathbb{R}^-_{nf} \cap {}^\star D$. Riesce allora ${}^\star f(b) \in {}^\star\mathbb{R}_{nf}$ e ${}^\star g(b) \in \mu(\lambda)$. Ne segue ${}^\star g(b) = \lambda + \epsilon$ da cui, essendo $\lambda \neq 0$, risulta ${}^\star g(b)$ apprezzabile. Allora, per il Teorema 7.1.1(i), ${}^\star(f \cdot g)(b) = {}^\star f(b) \cdot {}^\star g(b) \in {}^\star\mathbb{R}_{nf}$. Ne segue la tesi. □

Passando a considerare il limite della reciproco di una funzione trascuriamo il caso in cui la funzione ammette limite finito e diverso da zero, perchè analogo a quello già considerato per le funzioni continue. Esaminiamo invece due casi estremi, quello relativo al limite nullo e uno dei tre relativi al limite infinito.

Teorema 9.3.2. *Siano f ovunque non nulla in D e ρ di accumulazione per D. Sussistono allora le implicazioni:*

(i) $\lim_{x\to\rho} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\rho}(1/f)(x) = \infty$;

(ii) $\lim_{x\to\rho} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\rho}(1/f)(x) = 0$.

Dimostrazione. (i) Dall'essere f non nulla in D risulta, per il Teorema 7.1.1(ii), (iii), ${}^\star f$ non nulla in ${}^\star D$ e ${}^\star(1/f) = 1/{}^\star f$. Proviamo ora che, dato $b \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$, si ha ${}^\star(1/f)[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] \subset {}^\star\mathbb{R}_{nf}$. Riesce ${}^\star f(b) \neq 0$ e, per il Teorema 9.1.2, ${}^\star f(b) \approx 0$, cioè ${}^\star f(b)$ infinitesimo non nullo. Ne segue ${}^\star(1/f)(b) = 1/{}^\star f(b) \in {}^\star\mathbb{R}_{nf}$.

(ii) Osservato che ${}^\star f(b) \in {}^\star\mathbb{R}_{nf}$, per ogni $b \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$, otteniamo $1/{}^\star f(b) \in \mu(0)$. □

Il risultato seguente affronta il problema del limite della funzione composta.

Teorema 9.3.3. *Siano f una funzione di D in D_1 e g una funzione definita in D_1; ρ di accumulazione per D e ρ_1 di accumulazione per D_1; $\lim_{x\to\rho} f(x) = \rho_1$ e $\lim_{x\to\rho_1} g(x) = \lambda$. Infine, quando ρ_1 è reale, esista un intorno U di ρ tale che $f(r) \neq \rho_1$ per ogni $r \in U \cap D$ e $r \neq \rho$. Allora, $\lim_{x\to\rho}(g \circ f)(x) = \lambda$.*

Dimostrazione. Per i Teoremi 3.7.2(vii) e 9.1.2, basta verificare che risulta

$$^\star(g \circ f)[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] = ({}^\star g \circ {}^\star f)[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] = {}^\star g[{}^\star f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}]] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda).$$

Conviene provare questa inclusione in due tempi, separando il caso ρ_1 reale, più complicato, dagli altri.

Sia dunque ρ_1 reale. Allora, dall'ipotesi $\lim_{x\to\rho} f(x) = \rho_1$ otteniamo, sempre per il Teorema 9.1.2, ${}^\star f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] \subset \mu(\rho_1)$. Ma, nelle ipotesi fatte, si può indicare un'inclusione più precisa, cioè ${}^\star f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] \subset \mu(\rho_1) \setminus \{\rho_1\}$. Infatti, poichè, per ipotesi, $f(r) \neq \rho_1$ per ogni $r \in U \cap D$ e $r \neq \rho$, sussiste la proposizione:

$$\forall x \in U \cap D\, (x \neq \rho \Rightarrow f(x) \neq \rho_1)$$

e quindi sussiste, per PdT e i Teoremi 3.6.1(iii),(iv) e 3.6.4(xv), anche la frase:

$$\forall x \in {}^\star(U \cap D)\, (x \neq \rho \Rightarrow {}^\star f(x) \neq \rho_1).$$

Risulta allora, tramite il Teorema 2.3.3(iii), ${}^\star f(b) \neq \rho_1$ per ogni $b \in {}^\star U \cap {}^\star D$ e $b \neq \rho$. Essendo poi, per il Teorema 6.1.4, $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \subset {}^\star U$ riesce ${}^\star f(b) \neq \rho_1$ per ogni

$b \in \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \cap {}^\star D$ e $b \neq \rho$, cioè per ogni $b \in (\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D$. Conseguentemente, ${}^\star f[(\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D] \subset \mu(\rho_1) \setminus \{\rho_1\}$, come preannunciato.

Ora, da questa inclusione si trae ${}^\star g[{}^\star f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}]] \subset {}^\star g[\mu(\rho_1) \setminus \{\rho_1\}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda)$, l'ultima inclusione valendo grazie all'ipotesi $\lim\limits_{x \to \rho_1} g(x) = \lambda$.

Assumiamo, ora, $\rho \in \{\pm\infty, \infty\}$. Dalla $\lim\limits_{x \to \rho} f(x) = \rho_1$ segue ${}^\star f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho_1) = \imath^{(\mathrm{ext})}(\rho_1) \setminus \mathbb{R}$, essendo l'ultima uguaglianza ovvia nelle attuali ipotesi su ρ_1. Allora, ${}^\star g[{}^\star f[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}]] \subset {}^\star g[\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho_1) \setminus \mathbb{R}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda)$.

La dimostrazione è così completata. $\square$

9.4 Limiti di successioni di numeri reali

Com'è noto, le successioni di numeri reali sono funzioni (a valori reali) di dominio l'insieme dei numeri naturali. Se a è una successione, adottiamo l'usuale notazione, ponendo $a_n = a(n)$ per ogni n naturale. Osservato, poi, che la sua trasformata ${}^\star a$ è, per il Teorema 2.4.3(v), un'applicazione di ${}^\star\mathbb{N}$ nei numeri $\star$-reali, estendiamo questa convenzione di scrittura anche alla trasformata; scriviamo, cioè, ${}^\star a_\nu = {}^\star a(\nu)$ per ogni ν $\star$-naturale.

Ciò premesso, ricordiamo che, con riferimento ad una successione, l'unico limite che ha senso considerare è quello per n tendente a $+\infty$. Una caratterizzazione infinitesimale si ottiene immediatamente applicando il Teorema 9.1.2 a questo caso particolare, nel quale $\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R} = {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$, ${}^\star D = {}^\star\mathbb{N}$, $(\imath^{(\mathrm{ext})}(\rho) \setminus \mathbb{R}) \cap {}^\star D = {}^\star\mathbb{R}^+_{nf} \cap {}^\star\mathbb{N} = {}^\star\mathbb{N}_{nf}$ e ${}^\star a[{}^\star\mathbb{R}^+_{nf}] = {}^\star a[{}^\star\mathbb{N}_{nf}]$. Pertanto si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lambda \Leftrightarrow {}^\star a[{}^\star\mathbb{N}_{nf}] \subset \imath^{(\mathrm{ext})}(\lambda).$$

Separando allora il caso di $\lambda \in \mathbb{R}$ da quello di $\lambda \in \{\pm\infty, \infty\}$, otteniamo le due caratterizzazioni riportate nel prossimo teorema. La prima assicura che a ha limite finito se e solo se ${}^\star a$ assume valori infinitamente prossimi a quello del limite su ogni $\star$-naturale infinito. La seconda invece che a ha limite $-\infty$ $(+\infty, \infty)$ se e solo se ${}^\star a$ assume valori $\star$ reali infiniti negativi (positivi, infiniti) su ogni $\star$-naturale infinito.

Teorema 9.4.1. *Sia a una successione di numeri reali. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Sia λ reale. Allora $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lambda \Leftrightarrow {}^\star a_\omega \approx \lambda$, per ogni $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$;

(ii) Sia $\lambda = -\infty(+\infty, \infty)$. *Allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda \Leftrightarrow {}^\star a_\omega \in {}^\star\mathbb{R}^-_{nf}({}^\star\mathbb{R}^+_{nf},\ {}^\star\mathbb{R}_{nf})$ *per ogni* $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$.

Esempio Gli esempi che seguono mostrano come si possa usare la caratterizzazione precedente nel calcolo dei limiti di successioni.

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{b^n} = +\infty$ ($b > 1$ reale). Siano ω un naturale infinito e $m > b$ un numero naturale. Allora, indicato, come al solito, ${}^\star\ln$ con $\ln$ e adoperate le usuali proprietà di ${}^\star\ln$, otteniamo, usando anche la proprietà associativa della $\star$-sommatoria (Teorema 7.3.4(iii)),

$$\begin{aligned} \ln\frac{\omega!}{b^\omega} &= \ln\left(\frac{1}{b^\omega}\prod_{i=1}^{\omega} i\right) = \sum_{i=1}^{\omega} \ln i - \omega\,\ln b \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \ln i + \sum_{i=m}^{\omega} \ln i - \omega \ln b \geq \sum_{i=m}^{\omega} \ln i - \omega \ln b \\ &> (\omega - (m-1))\,\ln m - \omega\,\ln b = \omega\,(\ln m - \ln b) - (m-1)\ln m. \end{aligned}$$

Da $m > b$ otteniamo $\ln m - \ln b$ numero apprezzabile positivo e quindi

$$\ln\frac{\omega!}{b^\omega} = \omega' \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}.$$

Ne segue

$$\frac{\omega!}{b^\omega} = e^{\omega'}.$$

Ricordato, infine, che $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, risulta, mediante la proposizione (ii) della caratterizzazione precedente (condizione necessaria), $e^{\omega'} \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Ne segue, sempre per (ii) (condizione sufficiente), che il limite in oggetto è $+\infty$.

2. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n^b} = 0$ ($b > 0$ reale). Considerato un naturale infinito ω, risulta

$$\ln\frac{\ln\omega}{\omega^b} = \ln(\ln\omega) - b\ln\omega = \ln(\ln\omega)\left(1 - b\,\frac{\ln\omega}{\ln(\ln\omega)}\right) = \omega_1(1 - b\,\omega_2).$$

L'ultimo passaggio è giustificato, tramite il Teorema 9.3.3 del limite della funzione composta, osservando che:

– $\ln(\ln\omega)$ è un infinito positivo, notato che $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$;

– $\frac{\ln\omega}{\ln(\ln\omega)}$ è un infinito positivo (Teorema 9.3.2(i)), rammentato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Dunque, $\ln \frac{\ln \omega}{\omega^b} = -\omega'$, con ω' naturale infinito. Ne segue $\frac{\ln \omega}{\omega^b} = e^{-\omega'}$ e quindi $\frac{\ln \omega}{\omega^b} \approx 0$ (Teorema 9.1.2), tenuto conto del limite $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Tramite la proposizione (i) della caratterizzazione precedente ricaviamo, infine, che il limite in oggetto è nullo.

Proviamo ora un teorema importante riguardante l'esistenza del limite per le successioni monotone (ricorrendo alla dimostrazione classica).

Teorema 9.4.2. *Sia a una successione di numeri reali monotona. Esiste, allora, il limite per $n \to +\infty$ della successione e risulta:*

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \begin{cases} \sup_{n \geq 0} a_n & \textit{se } a \textit{ è nondecrescente} \\ \inf_{n \geq 0} a_n & \textit{se } a \textit{ è noncrescente} \end{cases}.$$ [8]

Dimostrazione. Essendo le dimostrazioni nei due casi di monotonia del tutto simili, ci limitiamo a considerare il caso di nondecrescenza. Sia, intanto, $\lambda = \sup\limits_{n \geq 0} a_n$ finito. Allora, dato $\xi > 0$ arbitrario, esiste n' tale che $a_{n'} > \lambda - \xi$. Ne segue $\lambda \geq a_n > \lambda - \xi$ per ogni $n > n'$. Esiste dunque un intorno di $+\infty$ nel quale $|a_n - \lambda| < \xi$, il che significa $a_n \to \lambda$.

Sia infine $\lambda = +\infty$. Allora, per ogni numero reale η esiste n' tale che $a_{n'} > \eta$. Allora, $a_n > \eta$ anche per ogni $n > n'$, donde la tesi. □

In relazione alle successioni, oltre alla nozione di limite interessa, spesso, considerare anche quella di **punto limite**.[9] Tenendo separati il caso di punto limite reale da quello non reale, come del resto già fatto per il limite, si ottengono le seguenti due caratterizzazioni nostandard. È interessante osservare, alla luce di questo risultato, la stretta analogia tra le caratterizzazioni nonstandard della nozione di limite e quella di punto limite. In entrambi i casi sono infatti richieste le medesime condizioni che, però, devono valere per *ogni* naturale infinito, nel caso del limite, mentre in quello del punto limite basta che valgano per *qualche* naturale infinito.

---

[8] Avendo posto $\sup\limits_{n \geq 0} a_n = \sup a[\mathbb{N}]$ e $\inf\limits_{n \geq 0} a_n = \inf a[\mathbb{N}]$.

[9] Il numero reale λ è punto limite della successione reale a, se esiste una sottosuccessione di a convergente a λ.

Il termine "punto limite" usato per λ non deve trarre in inganno e far pensare che λ indichi senz'altro un numero reale. Noi conveniamo infatti di dare, qui, al simbolo λ lo stesso significato che gli abbiamo attribuito nellla caratterizzazione esterna 9.1.2. Pertanto, esso può essere un numero reale oppure uno dei soliti simboli $\pm\infty, \infty$ che intervengono nei limiti.

Teorema 9.4.3. *Sia a una successione di numeri reali. Allora, $\lambda \in \bar{\mathbb{R}}$ è punto limite per a se e solo se:*

(i) $^\star a_\omega \approx \lambda$ *per qualche* $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$, *se* λ *reale;*

(ii) $^\star a_\omega \in {}^\star\mathbb{R}^-_{nf}({}^\star\mathbb{R}^+_{nf}, {}^\star\mathbb{R}_{nf})$ *per qualche* $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$, *se* $\lambda = -\infty(+\infty, \infty)$.

DIMOSTRAZIONE. (i) Sia intanto $\lambda \in \mathbb{R}$ punto limite per a. Sussiste allora la frase:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \, \forall \nu_1 \in \mathbb{N} \, \exists \nu_2 \in \mathbb{N} \, (\nu_2 > \nu_1 \, \mathrm{e} \, |a(\nu_2) - \lambda| < x)$$

e quindi, per PdT e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.4(xv), 3.6.6(v), 3.6.7(ii),(v) e 7.1.1(iv), anche la proposizione:

$$\forall x \in {}^\star\mathbb{R}^+ \, \forall \nu_1 \in {}^\star\mathbb{N} \, \exists \nu_2 \in {}^\star\mathbb{N} \, (\nu_2 > \nu_1 \, \mathrm{e} \, |{}^\star a(\nu_2) - \lambda| < x).$$

Ne segue, posto $x = \epsilon > 0$, la validità della proposizione:

$$\forall \nu_1 \in {}^\star\mathbb{N} \, \exists \nu_2 \in {}^\star\mathbb{N} \, (\nu_2 > \nu_1 \, \mathrm{e} \, |{}^\star a(\nu_2) - \lambda| < \epsilon).$$

Posto $\nu_1 = \omega$, sussiste allora la frase " $\exists x_2 \in {}^\star\mathbb{N}(x_2 > \omega \, \mathrm{e} \, |{}^\star a(x_2) - \lambda| < \epsilon)$" e quindi la tesi.

Viceversa, sia $^\star a_\omega \approx \lambda$ per qualche $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$. Dati $\xi > 0$ reale e $n \in \mathbb{N}$, risulta la validità della proposizione: $\exists \nu \in {}^\star\mathbb{N} \, (\nu > n \, \mathrm{e} \, |{}^\star a(\nu) - \lambda| < \xi)$, che è, come facilmente si vede ricorrendo alla tecnica degli $\star$-concetti, equivalente alla frase: $\exists \nu \in \mathbb{N} \, (\nu > n \, \mathrm{e} \, |a_\nu - \lambda| < \xi)$. Tenuto conto dell'arbitrarietà di ξ, si ha la tesi.

(ii) La dimostrazione, analoga alla precedente, è lasciata come esercizio. □

9.5 Limiti di serie numeriche

Ricordiamo preliminarmente la nozione di serie e i concetti più importanti ad essa collegati. Data una successione $a = (a_n)_{n \geq 0}$ di numeri reali, dicesi **serie** la successione $S = (S_n)_{n \geq 0}$ delle *somme ridotte*, cioè delle $\mathrm{S}_n = \sum_{i=0}^n a_i$. Una serie può essere convergente, divergente o indeterminata. Più in dettaglio, la serie si dice:

− *convergente* (o di *somma finita*) se ammette limite finito; in questo caso il limite viene chiamato *somma* della serie;

− *divergente* (negativamente, positivamente), o anche di *somma infinita* (infinita negativa, infinita positiva), se ammette limite ∞ $(-\infty, +\infty)$;

− *indeterminata* quando non ammette limite.

Precisiamo che, nei casi in cui esiste il limite della serie, lo indichiamo con la notazione $\sum_{n\geq 0} a_n$ al posto dell'usuale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Ricordiamo, infine, che gli elementi della successione a sono detti anche *termini* della serie.

Prima di procedere nello studio della successione delle somme ridotte, è utile riflettere sul significato preciso del suo elemento generico $S_n = S(n)$. Questi viene calcolato sommando i primi $n+1$ termini $a_0, \ldots, a_n$ della serie, che costituiscono la sequenza $a|_{[0,n]}$. Perciò S_n è il valore assunto dalla sommatoria $\mathtt{s}$ sulla sequenza $a|_{[0,n]}$ e quindi $S(n) = S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = \mathtt{s}(a|_{[0,n]})$. Ciò notato, possiamo enunciare il prossimo risultato.

Lemma 9.5.1. *Riesce* $^\star S_\nu = {}^\star S(\nu) = {}^\star\mathtt{s}({}^\star a|_{[0,\nu]}) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i$, *per ogni* $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Tenuto conto delle considerazioni precedenti, sussiste la proposizione finitamente limitabile: $\forall \nu \in \mathbb{N}\, \forall y, z (y = [0,\nu] \, \mathrm{e} \, z = a|_y \Rightarrow S(\nu) = \mathtt{s}(z))$. Ne segue, tramite PdT e i Teoremi 3.6.1(iii),(iv), 3.6.4(xviii),(xx) e 3.6.5(vi), che sussiste anche la frase: $\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall y, z\, (y = [0,\nu]$ e $z = {}^\star a|_y \Rightarrow {}^\star S(\nu) = {}^\star\mathtt{s}(z))$, cioè, per ogni $\star$-naturale ν, risulta ${}^\star S(\nu) = {}^\star\mathtt{s}({}^\star a|_{[0,\nu]}) = \sum_{i=0}^{\nu} a_i$, l'ultima uguaglianza valendo per quanto convenuto prima del Teorema 7.3.4. Ne segue la tesi. □

Siamo finalmente in grado di provare le seguenti due caratterizzazioni non-standard della somma di una serie. Osserviamo che la proposizione (i) assicura che la serie ha somma λ reale se e solo se, qualunque sia ω, "addizionando" alla sommatoria esterna $\sum_{n\geq 0} a_n$ gli infiniti termini di ${}^\star a$ relativi agli $\omega' \leq \omega$, si ottiene un numero infinitamente prossimo a λ. La (ii) invece che la serie ha somma ∞ se e solo se, qualunque sia ω, "addizionando" alla sommatoria esterna $\sum_{n\geq} a_n$ gli infiniti termini di ${}^\star a$ relativi agli $\omega' \leq \omega$, si ottiene un numero infinito. Se la serie diverge a $+\infty\,(-\infty)$, la "somma aumentata" è allora un numero infinito positivo (negativo).

Teorema 9.5.2. *Sussistono le proposizioni:*

(i) Sia λ *reale. Allora,* $\sum_{n\geq 0} a_n = \lambda \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\omega} a_\nu \approx \lambda$, *per ogni* $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$*;*

(ii) Sia $\lambda = -\infty(+\infty, \infty)$*. Allora,* $\sum_{n\geq 0} a_n = \lambda \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\omega} a_\nu \in {}^\star\mathbb{R}^-_{nf}({}^\star\mathbb{R}^+_{nf}, {}^\star\mathbb{R}_{nf})$ *per ogni* $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$.

Dimostrazione. Si ottengono applicando il Teorema 9.4.1 alla serie, ricordando che, per il Lemma 9.5.1, ${}^\star S_\omega = \sum_{\nu=0}^{\omega} a_\nu$. □

Interessante risulta anche prendere in considerazione il criterio di convergenza di Cauchy per le serie numeriche. Tralasciamo di trattare la versione classica che si ottiene, com'è noto, applicando alla successione delle somme ridotte il criterio di convergenza di Cauchy già considerato, più in generale, per le funzioni reali di variabile reale (Teorema 9.2.2). Analogo procedimento può essere seguito per ottenere la versione infinitesimale per le serie.

Teorema 9.5.3. (Criterio generale di convergenza) *La serie S converge se e solo se, per ogni $\omega_1, \omega_2 \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$ con $\omega_1 \leq \omega_2$, risulta infinitesima la $\star$-sommatoria $\sum_{\nu=\omega_1}^{\omega_2} a_\nu$.*

Dimostrazione. Per il Criterio del limite finito 9.2.2, la successione delle ridotte converge se e solo se sono infinitamente prossimi tra loro i valori ${}^\star S_\omega$ per ogni ω naturale infinito. Pertanto, scelti comunque $\omega_1, \omega_2 \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$, con $\omega_1 \leq \omega_2$, riesce che la successione delle ridotte converge se e solo se ${}^\star S_{\omega_2} - {}^\star S_{\omega_1}$ è infinitesimo o, equivalentemente, per il Teorema 4.3.2(i), se e solo se ${}^\star S_{\omega_2} - {}^\star S_{\omega_1 - 1}$ è infinitesimo.

Ciò osservato, per il Lemma 9.5.1, ${}^\star S_{\omega_2} - {}^\star S_{\omega_1 - 1} = \sum_{\nu=0}^{\omega_2} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\omega_1 - 1} a_\nu$. La prima sommatoria si può spezzare in due parti usando la proprietà associativa della $\star$-sommatoria (Teorema 7.3.4(iii)), con $I_1 = [0, \omega_1 - 1]$ e $I_2 = [\omega_1, \omega_2]$. Si ottiene allora ${}^\star S_{\omega_2} - {}^\star S_{\omega_1 - 1} = \sum_{\nu=0}^{\omega_1 - 1} a_\nu + \sum_{\nu=\omega_1}^{\omega_2} a_\nu - \sum_{\nu=0}^{\omega_1 - 1} a_\nu = \sum_{\nu=\omega_1}^{\omega_2} a_\nu$. Ne segue la tesi. □

Corollario 9.5.4. *Se la serie S è convergente, allora a_ω risulta infinitesimo per ogni $\omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}$.*

Dimostrazione. Posto $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ nel teorema precedente, riesce infinitesima la $\star$-sommatoria $\sum_{\nu=\omega}^{\omega} a_\nu = a_\omega$, ove l'uguaglianza deriva dal Lemma 7.3.3(iii). □

È noto che una particolare attenzione viene dedicata allo studio delle serie a termini positivi. In particolare, grazie al Teorema 9.4.2 del limite delle successioni monotone, sussiste l'aut-aut: una serie a termini positivi o converge o diverge. Concludiamo la sezione, con una interessante e utile versione nonstandard del criterio del confronto di Gauss.[10]

Teorema 9.5.5. (Criterio del confronto $\star$-reale) *Con riferimento alle serie a termini positivi $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$, sia $c > 0$ un numero $\star$-reale finito*

[10] Poichè la somma di una serie può, in generale, essere estremamente difficile da ottenere, ci si accontenta a determinare, se possibile, il *carattere* della serie (convergente, divergente o indeterminata). Ed è, proprio, questo lo scopo dei cosiddetti "criteri del confronto", che deducono il carattere di una serie mediante quello di un'altra serie di somma nota.

tale che $a_\omega \leq c\, b_\omega$*, per ogni* ω *naturale infinito. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Se $\sum_{n\geq 0} b_n$ *converge, allora* $\sum_{n\geq 0} a_n$ *converge;*

(ii) Se $\sum_{n\geq 0} a_n$ *diverge, allora* $\sum_{n\geq 0} b_n$ *diverge.*

Dimostrazione. (i) Sia $\sum_{n\geq 0} b_n$ convergente. Dati i numeri naturali infiniti $\omega_1 \leq \omega_2$, esiste, per il Criterio generale di convergenza 9.5.3, $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon = \sum_{\nu=\omega_1}^{\omega_2} b_\nu$. Ne segue, per la linearità e monotonia della $\star$-sommatoria (Teorema 7.3.4(ii),(iv)), $0 \leq \sum_{\nu=\omega_1}^{\omega_2} a_\nu \leq c \sum_{\nu=\omega_1}^{\omega_2} b_\nu = c\,\epsilon \approx 0$ e quindi, per il criterio sopra citato, anche $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

(ii) Segue da (i) assumendo, per assurdo, che $\sum_{n\geq 0} b_n$ sia convergente. □

Esempio Usiamo il criterio del confronto $\star$-reale per provare che risulta:

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^b} = +\infty \quad (b \text{ reale positivo}).$$

Sia ω un naturale infinito. Per l'esempio 2. che segue il Teorema 9.4.1, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{1/b}} = 0.$$

Allora, per il Teorema 9.3.2(i) (tenendo presente che la funzione è positiva), risulta

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/b}}{\ln n} = +\infty$$

da cui, tramite il Teorema 9.4.1(ii), si ha

$$\frac{n^{1/b}}{\ln \omega} \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$$

e quindi $\omega^{1/b} > \ln \omega$. Ne segue $\omega > (\ln \omega)^b$ e quindi

$$\frac{1}{(\ln \omega)^b} > \frac{1}{\omega}.$$

Pertanto, per la proposizione (ii) del Criterio del confronto $\star$-reale, risulta quanto dichiarato, notato che la serie in esame domina il resto unesimo della serie armonica $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, che è, come ben noto, divergente.

9.6 Limiti di successioni di funzioni

Com'è noto, le successioni di funzioni sono funzioni reali di dominio l'insieme prodotto dei numeri naturali e del dominio comune D a tutte le funzioni della successione. Denotata con $\bar{f}$ una qualsiasi di tali funzioni e considerato il termine generico $\bar{f}(n,x)$, poniamo, concordemente con quanto convenuto per le successioni reali, $f_n(x) = \bar{f}(n,x)$ per ogni n naturale e ogni $x \in D$. Osservato poi che le relative trasformate sono, per il Teorema 2.4.3(i),(v), applicazioni di dominio ${}^\star\mathbb{N} \times {}^\star D$ e a valori $\star$-reali, estendiamo questa convenzione di scrittura anche alla trasformata; scriviamo, cioè, ${}^\star f_\nu(x) = {}^\star\bar{f}(\nu,x)$ per ogni ν $\star$-naturale e $x \in {}^\star D$.

Considerate una qualsiasi successione $(f_n)_{n\geq 0}$ di funzioni e una funzione f, tutte di dominio D, diciamo che f_n **converge puntualmente** a f (in simboli $f_n \to f$) se $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$. Conseguenza immediata del Teorema 9.4.1(i) è la seguente caratterizzazione infinitesimale di questo tipo di convergenza.

Teorema 9.6.1. *Siano $(f_n)_{n\geq 0}$ una successione di funzioni di dominio D e f una funzione di dominio D. Allora*

$$f_n \to f \Leftrightarrow {}^\star f_\omega(x) \approx f(x) \textit{ per ogni } x \in D \textit{ e } \omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}.$$

Questa convergenza, però, non assicura che la funzione limite sia continua qualora lo siano tutte le funzioni della successione.[11] Al fine di assicurarne la continuità, bisogna rafforzare la nozione di convergenza puntuale con quella di **convergenza uniforme** (in simboli $f_n \overset{unif}{\to} f$): Per ogni $\xi > 0$ reale esiste un numero naturale m tale che per ogni $n > m$ si ha $|f_n(x) - f(x)| < \xi$, *qualunque* sia $x \in D$. Passando ad una sua semiformalizzazione otteniamo

$$\forall\xi \in \mathbb{R}^+ \exists\nu' \in \mathbb{N}\, \forall x \in D\, \forall\nu \in \mathbb{N}\, (\nu > \nu' \Rightarrow |\bar{f}(\nu,x) - f(x)| < \xi)$$

e quindi, tramire PdT e i Teoremi 3.6.1(iv), 3.6.4(xv), 3.6.6(v), 3.6.7(ii),(v) e 7.1.1(iv) [12], non è difficile constatare che sussiste la caratterizzazione seguente.

[11] Basta considerare la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ definite nell'intervallo $[0,1]$ e osservare che $f_n(x) \to 0$, se $x \in [0,1[$, e $f_n(x) = 1$, se $x = 1$.

[12] Poichè il "pacchetto" di questi teoremi è sempre presente nelle dimostrazioni dei prossimi risultati della sezione (esclusi 9.6.3, 9.6.4 e 9.6.7), lo richiameremo, per brevità, con la frase "soliti teoremi".

Teorema 9.6.2. *Siano* $(f_n)_{n\geq 0}$ *una successione di funzioni di dominio* D *e* f *una funzione di dominio* D. *Allora:*

$$f_n \stackrel{unif}{\to} f \Leftrightarrow {}^\star f_\omega(x) \approx {}^\star f(x) \text{ per ogni } x \in {}^\star D \text{ e } \omega \in {}^\star\mathbb{N}_{nf}.$$

È interessante osservare che il confronto tra le caratterizzazioni infinitesimali della convergenza puntuale e di quella uniforme è del tutto analogo a quello riscontrato tra quelle della continuità e della continuità uniforme.

Prima di provare che, come già dichiarato, la convergenza uniforme assicura la continuità della funzione limite, premettiamo un lemma che risulta utile in molte applicazioni dell'analisi nonstandard.

Lemma 9.6.3. (della successione infinitesima (Robinson)) *Sia* $b : {}^\star\mathbb{N} \mapsto {}^\star\mathbb{R}$ *un'applicazione interna tale che* $b(n)$ *è infinitesimo per ogni naturale* n. *Esiste allora un naturale infinito* ω *tale che* $b(\nu)$ *è infinitesimo per ogni* $\star$*-naturale* $\nu \leq \omega$.

Dimostrazione. Osservato che il metapredicato unario:

$$X(\nu) : |\nu\, b(\nu)| < 1$$

è formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno [13] e che $X(n)$ sussiste per ogni naturale n (essendo $b(n)$ infinitesimo), otteniamo, tramite il Lemma del prolungamento 4.4.3(i), che esiste un naturale infinito ω tale che $X(\nu)$ sussiste per ogni $\star$-naturale $\nu \leq \omega$. Considerato allora $\omega' \leq \omega$, risulta $|b(\omega')| < 1/\omega'$ e quindi $b(\omega')$ infinitesimo. Ne segue la tesi. □

Teorema 9.6.4. (Cauchy-Seidel) *Sia* $(f_n)_{n\geq 0}$ *una successione di funzioni continue convergente uniformemente alla funzione* f. *Allora* f *è continua.*

Dimostrazione. Dato $d \in D$, dominio comune delle funzioni della successione e della funzione limite, dobbiamo provare la continuità di f in d.

`PROVA NONSTANDARD` Dato $x \approx d$ con $x \in {}^\star D$, si ha, tenuto conto della continuità di f_n e del Teorema 8.1.1, ${}^\star f_n(x) \approx f(d)$. Posto allora $g = {}^\star\bar{f}|_{{}^\star\mathbb{N}\times\{x\}}$, risulta, per ogni n naturale, $g(n) \approx f(d)$, cioè $g(n) - f(d)$ infinitesimo. Osservato, poi, che,

[13] Tramite il predicato

$$W(\nu) : \sqcap x, y, z \lessdot {}^\star\mathbb{R}\,(\langle \nu, x\rangle \lessdot b \wedge \langle \nu, x, y\rangle \lessdot \cdot \wedge \langle y, z\rangle \lessdot |\cdot| \to \langle z, 1\rangle \lessdot <).$$

per i Teoremi 2.2.3(iii) e 2.5.2(i),(ix), l'applicazione $g : {}^\star\mathbb{N} \mapsto {}^\star\mathbb{R}$ è interna e che, banalmente, le applicazioni costanti di ${}^\star\mathbb{N}$ in ${}^\star\mathbb{R}$ sono interne, possiamo concludere, per la nota 6 del settimo capitolo, che è anche interna l'applicazione $g - f(d)$. Ne segue, per il Lemma della successione infinitesima, che esiste un naturale infinito ω tale che $g(\omega) - f(d)$ è infinitesimo, cioè ${}^\star f_\omega(x) \approx f(d)$. D'altra parte, per la convergenza uniforme, ${}^\star f(x) \approx {}^\star f_\omega(x)$ (Teorema 9.6.2) e quindi ${}^\star f(x) \approx f(d)$. Ne segue, per il Teorema 8.1.1, la tesi.

`PROVA STANDARD` Dato $\xi > 0$ reale, esiste, per la convergenza uniforme, un naturale m tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \xi$$

per ogni $n \geq m$ e $x \in D$.

Poichè f_m è continua in d, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f_m(x) - f_m(d)| < \xi$$

per ogni x tale che $|x - d| < \delta$.

Sia ora x tale che $|x - d| < \delta$. Considerata allora la prima disuguaglianza per tale x e per d con $n = m$, otteniamo le disuguaglianze

$$|f_m(d) - f(d)| < \xi, \qquad |f_m(x) - f(x)| < \xi.$$

Ricorrendo infine alla disuguaglianza triangolare riesce

$$|f(x) - f(d)| \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(d)| + |f_m(d) - f(d)| < 3\,\xi.$$

Dall'arbitrarietà di ξ risulta allora la continuità di f nel punto d. Per l'arbitrarietà di d si ha infine la tesi. □

Se le funzioni della successione sono non solo continue ma uniformemente continue, il teorema appena provato, non assicura, in generale, che la funzione limite sia anch'essa uniformemente continua. Per assicurare ciò, occorre aggiungere alle ipotesi del teorema una nuova condizione. A tal fine, chiamiamo, una successione $(f_n)_{n\geq 0}$ di funzioni di dominio D, **equicontinua** se:
− Per ogni reale $\xi > 0$ esiste un reale $\eta > 0$ tale che:

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \xi, \text{ per ogni } x, y \in D \text{ e per } \textit{ogni } n \geq 0.$$

Quindi, in particolare, ogni termine della successione è uniformemente continuo.

Passiamo ora ad una caratterizzazione infinitesimale di tale nozione.

Teorema 9.6.5. *Sia $(f_n)_{n\geq 0}$ una successione di funzioni di dominio D. Sono equivalenti le proposizioni:*

(i) La successione è equicontinua;

(ii) $x \approx y \Rightarrow {}^\star f_\nu(x) \approx {}^\star f_\nu(y)$, per ogni $x, y \in {}^\star D$ e $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Scelti i reali $\xi > 0$ e $\eta > 0$, risulta , per l'equicontinuità,

$$\forall x, y \in D\, \forall \nu \in \mathbb{N}\, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f_\nu(x) - f_\nu(y)| < \xi)$$

da cui, usando PdT e i soliti teoremi, otteniamo

$$\forall x, y \in {}^\star D\, \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, (|x - y| < \eta \Rightarrow |{}^\star f_\nu(x) - {}^\star f_\nu(y)| < \xi).$$

Scelti infine $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ e $x, y \in {}^\star D$ tali che $x \approx y$, risulta $|{}^\star f_\nu(x) - {}^\star f_\nu(y)| < \xi$. Ne segue, per l'arbitrarietà di ξ, ${}^\star f_\nu(x) \approx {}^\star f_\nu(y)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sia $\xi > 0$ reale. Preso allora un infinitesimo $\eta > 0$, siano $x, y \in {}^\star D$ tali che $|x - y| < \eta$. Allora $x \approx y$ da cui otteniamo ${}^\star f_\nu(x) \approx {}^\star f_\nu(y)$, e quindi $|{}^\star f_\nu(x) - {}^\star f_\nu(y)| < \xi$, per ogni $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$. Sussiste dunque la frase:

$$\exists \eta \in {}^\star\mathbb{R}^+\, \forall x_1, x_2 \in {}^\star D\, \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, (|x - y| < \eta \Rightarrow |{}^\star f_\nu(x) - {}^\star f_\nu(y)| < \xi)$$

e quindi, ancora per PdT e i soliti teoremi, anche la proposizione:

$$\exists \eta \in \mathbb{R}^+\, \forall x_1, x_2 \in D\, \forall \nu \in \mathbb{N}\, (|x - y| < \eta \Rightarrow |f_\nu(x) - f_\nu(y)| < \xi).$$

Da qui, per l'arbitrarietà di ξ, si ha la tesi. □

Il prossimo risultato mostra che l'equicontinuità è una condizione sufficiente affinchè la funzione limite sia uniformemente continua.

Teorema 9.6.6. *Sia $(f_n)_{n\geq 0}$ una successione equicontinua di funzioni convergente puntualmente alla funzione f. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in {}^\star D$ tali che $x \approx y$. Per la caratterizzazione della continuità uniforme 8.2.1 dobbiamo provare che ${}^\star f(x) \approx {}^\star f(y)$. Per la convergenza puntuale, sussiste la proposizione:

$$\forall x \in D\, \forall \xi \in \mathbb{R}^+\, \exists \nu \in \mathbb{N}\, \forall \nu' \in \mathbb{N}\, (\nu' > \nu \Rightarrow |f_{\nu'}(x) - f(x)| < \xi)$$

e quindi, ricorrendo a PdT e ai soliti teoremi, anche la:

$$\forall x \in {}^\star D\, \forall \xi \in {}^\star\mathbb{R}^+\, \exists \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall \nu' \in {}^\star\mathbb{N}\, (\nu' > \nu \Rightarrow |{}^\star f_{\nu'}(x) - {}^\star f(x)| < \xi).$$

Sia $\epsilon > 0$. Allora, esistono ν_1, ν_2 tali che:
– $|{}^\star f_\nu(x) - {}^\star f(x)| < \epsilon$ per ogni $\nu > \nu_1$;
– $|{}^\star f_\nu(y) - {}^\star f(y)| < \epsilon$ per ogni $\nu > \nu_2$.
Posto $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$, risulta ${}^\star f_\nu(x) \approx {}^\star f(x)$, ${}^\star f_\nu(y) \approx {}^\star f(y)$. Ora, per il Teorema 9.6.5, ${}^\star f_\nu(x) \approx {}^\star f_\nu(y)$ e quindi${}^\star f(x) \approx {}^\star f(y)$. □

Il seguente notevole teorema assicura che, per successioni convergenti di funzioni continue in un compatto, la convergenza uniforme equivale alla equicontinuità.

Teorema 9.6.7. *Sia $(f_n)_{n\geq 0}$ una successione di funzioni continue, di dominio D compatto, convergente puntualmente alla funzione f. Allora, la successione converge uniformemente se e solo se è equicontinua.*

Dimostrazione. Assumiamo intanto la convergenza uniforme. Allora, per il Teorema di Cauchy-Seidel, f è continua. Inoltre, per il Teorema di Heine-Cantor 8.2.2, le funzioni f_n e f sono uniformemente continue. Allora, per ogni naturale n, le funzioni ${}^\star f_n$, di dominio ${}^\star D$, verificano, per il Teorema 8.2.1, la condizione (i) del Teorema 9.6.5.

Ora, dato lo $\star$-naturale ω, siano $x, y \in {}^\star D$ tali che $x \approx y$. Allora, per il Teorema 9.6.5, basta provare che ${}^\star f_\omega(x) \approx {}^\star f_\omega(y)$. Risulta ${}^\star f_\omega(x) \approx {}^\star f(x) \approx {}^\star f(y) \approx {}^\star f_\omega(y)$, ove la prima e l'ultima equivalenza derivano dalla convergenza uniforme (Teorema 9.6.2), mentre quella intermedia dall'uniforme continuità di f (Teorema 8.2.1).

Assumiamo infine l'equicontinuità. Dato lo $\star$-naturale ω, sia $x \in {}^\star D$. Dobbiamo provare, per il Teorema 9.6.2, ${}^\star f_\omega(x) \approx {}^\star f(x)$. Per il Criterio di compattezza 6.3.7, possiamo considerare la parte standard $y = \mathrm{st}(x)$ di x. Tramite il Teorema 9.6.5(ii), risulta ${}^\star f_\omega(x) \approx {}^\star f_\omega(y)$. Inoltre, per il Teorema 9.6.6, ${}^\star f(x) \approx {}^\star f(y)$. Infine, per il Teorema 9.6.1,${}^\star f_\omega(y) \approx {}^\star f(y) = f(y)$. Riassumendo si ha allora ${}^\star f_\omega(x) \approx {}^\star f_\omega(y) \approx f(y) \approx {}^\star f(x)$. □

Concludiamo la sezione con il fondamentale teorema di Ascoli-Arzelà che assicura, dal punto di vista topologico, la sequenziale compattezza dello spazio delle funzioni continue definite su un compatto, dotato della distanza lagrangiana. Per l'usuale confronto ne riportiamo, come fatto per il Teorema di Cauchy-Seidel, sia la prova standard che quella nonstandard.

Teorema 9.6.8. (Ascoli-Arzelà) *Siano $f_n : D \mapsto K$ $(n \geq 0)$ e K compatto. Allora, se la successione $(f_n)_{n\geq 0}$ è equicontinua, esiste una sottosuccessione convergente uniformemente ad una funzione uniformemente continua.*

Dimostrazione. `PROVA NONSTANDARD` Considerata la semiformalizzazione della frase "$f_\nu(x) \in K$ per ogni naturale ν e x appartenente a K":

$$\forall \nu \in \mathbb{N}\, \forall x \in D\, (f(\nu, x) \in K)$$

otteniamo, via PdT e i Teoremi 3.6.1(iv) e 3.6.4(xvi), che sussiste la proposizione:

$$\forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, \forall x \in {}^\star D\, ({}^\star f(\nu, x) \in {}^\star K).$$

Considerato allora ω naturale infinito, risulta ${}^\star f_\omega(x) \in {}^\star K$ per ogni $x \in {}^\star D$. Pertanto, per il Criterio di compattezza 6.3.7, ${}^\star f_\omega(x)$ è infinitamente prossimo a un numero reale, qualunque sia $x \in {}^\star D$. Possiamo dunque considerare la funzione f, di dominio D, tale che $f(x) = \mathrm{st}({}^\star f_\omega(x))$. Allora $|{}^\star f(x) - {}^\star f_\omega(x)| = |f(x) - {}^\star f_\omega(x)|$ è un infinitesimo.

Ciò osservato, dato il reale $\xi > 0$ e il numero naturale n, risulta

$$\exists \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, (\nu > n \,\mathrm{e}\, \forall x \in {}^\star D\, (|{}^\star f(x) - {}^\star f_\nu(x)| < \xi))$$

(ad esempio $\nu = \omega$) e quindi sussiste, tramite PdT e i soliti teoremi, la proposizione:

$$\exists \nu \in \mathbb{N}\, (\nu > n \,\mathrm{e}\, \forall x \in D\, (|f(x) - f_\nu(x)| < \xi)),$$

cioè esiste un naturale $m > n$ tale che $|f(x) - f_m(x)| < \xi$ per ogni $x \in D$.

Per individuare la sottosuccessione convergente a f, procediamo definendola per induzione. A tal fine, sia $\xi_n = 1/(n+1)$ per ogni $n \geq 0$. Per $n = 0$, osservato che esiste un naturale $m > 0$ tale che $|f(x) - f_m(x)| < \xi_0$ per ogni $x \in D$, poniamo n_0 il minimo m che verifica la proprietà in oggetto. Dunque, $|f(x) - f_{n_0}(x)| < 1$ per ogni $x \in D$. Per $n > n_0$, osservato che esiste un naturale $m > n$ tale che $|f(x) - f_m(x)| < \xi_1$ per ogni $x \in D$, poniamo n_1 il minimo m che verifica la proprietà in oggetto. Dunque, $|f(x) - f_{n_1}(x)| < 1/2$ per ogni $x \in D$. Così procedendo, otteniamo una successione equicontinua $(f_{n_k})_{k \geq 0}$ tale che $|f(x) - f_{n_k}(x)| < 1/(k+1)$. Conseguentemente, tale sottosuccesione converge puntualmente a f e quindi, per il Teorema 9.6.6, f è uniformemente continua.

`PROVA STANDARD` Sia $(x_m)_{m \geq 0}$ la successione dei numeri razionali di D. Consideriamo allora la successione $(f_n(x_0))_{n \geq 0}$ in K. Poichè K è compatto, esiste una sua sottosuccessione f_n^0 convergente.[14] In modo analogo, otteniamo un sottosuccesione f_n^1 di $(f_n^0(x_1))_{n \geq 0}$ che è convergente. Così procedendo, troviamo una successione $f_n^0, f_n^1, \ldots$ di sottosuccessioni della successione di partenza tale che

[14] Per il Teorema di Heine-Pincherle-Borel 6.4.1, la successione è limitata. Ora, se possiede un numero finito di termini, la tesi è banale; altrimenti si fa ricorso al Teorema di Bolzano-Weierstrass 6.4.3.

$\pi_2^2(f_n^m) \supset \pi_2^2(f_n^{m+1})$ $(n \geq 0)$ e, inoltre, tale che ogni successione $(f_n^m(x_h))_{n\geq 0}$ è convergente per ogni $h > n$. Adottando il metodo diagonale di Cantor, introduciamo la successione $(f_n^n)_{n\geq 0}$. Allora, per qualunque naturale h, la successione $(f_n^n(x_h))_{n\geq h}$ è una sottosuccessione della successione convergente $(f_n^m(x_h))_{n\geq h}$ e quindi è anch'essa convergente. Ne segue che la successione $(f_n^n(x_h))_{n\geq 0}$ è convergente in quanto differisce dalla $(f_n^n(x_h))_{n\geq h}$ per un numero finito di termini.

Proviamo ora che la successione $(f_n^n(x))_{n\geq 0}$ converge per ogni $x \in D$. A tal fine, sia $\xi > 0$ arbitrario. Poichè la successione $(f_n^n)_{n\geq 0}$ è equicontinua, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|y - z| < \delta \Rightarrow |f_n^n(x) - f_n^n(z)| < \xi, \text{ per ogni } n \geq 0.$$

Per la densità dei numeri razionali in D, esiste $x_h \in D$ tale che $|x - x_n| < \delta$. Dunque

$$\begin{aligned} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| &\leq |f_n^n(x) - f_n^n(x_h)| + |f_n^n(x_h) - f_m^m(x_h)| + |f_m^m(x_h) - f_m^m(x)| \\ &< \xi + |f_n^n(x_h) - f_m^m(x_h)| + \xi. \end{aligned}$$

Essendo la successione $(f_n^n(x_h))_{n\geq 0}$ convergente, esiste $n_0 \geq 0$ tale che, per $n, m > n_0$, risulta $|f_n^n(x_h) - f_m^m(x_h)| < \xi$ e quindi

$$|f_n^n(x) - f_m^m(x)| < 3\,\xi. \tag{9.2}$$

La successione in oggetto è dunque di Cauchy, cioè convergente in K. Posto $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n^n(x)$, otteniamo una funzione di D in K. Inoltre, per ogni $x \in]x_h - \delta, x_h + \delta[$ e per ogni $n > n_0$, si ha

$$|f(x) - f_n^n(x)| < 4\,\xi. \tag{9.3}$$

Infatti, in caso contrario, se esistessero $n > n_0$ e $x \in]x_h - \delta, x_h + \delta[$ tali che $|f(x) - f_n^n(x)| \geq 4\,\xi$, da (9.2) si avrebbe, per ogni $m > n$,

$$|f(x) - f_m^m(x)| \geq |f(x) - f_n^n(x)| - |f_n^n(x) - f_m^m(x)| > 4\,\xi - 3\,\xi = \xi$$

contraddicendo così la convergenza di $f_m^m(x)$ a $f(x)$.

Dunque sussiste (9.3) e quindi la successione $(f_n^n)_{n\geq 0}$ converge uniformemente a f nell'intervallo $I_h =]x_h - \delta, x_h + \delta[$. Considerato allora il ricoprimento aperto del compatto D formato dagli intervalli I_h $(h \geq 0)$, esistono $x_1, \ldots, x_k \in D$ tali che $D = \cup_{i=1}^k I_i$. Pertanto la successione $(f_n^n)_{n\geq 0}$ che converge uniformemente a f in ogni I_n, converge uniformemente a f in D.

Proviamo infine che la funzione f è uniformemente continua. A tal fine, siano $x, y \in D$ tale che $|x - y| < \delta$. Allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_n^n(x)| + |f_n^n(x) - f_n^n(y)| + |f_n^n(y) - f(y)| \\ &< |f(x) - f_n^n(x)| + \xi + |f_n^n(y) - f(y)|. \end{aligned}$$

Poichè la successione $(f_n^n)_{n\geq 0}$ converge uniformemente a f, esiste n_0 tale che per $n > n_0$ risulta $|f(z) - f_n^n(z)| < \xi$ per ogni $z \in D$. Assumendo $n > n_0$ si ha allora $|f(x)-f(y)| < 3\,\xi$, ogniqualvolta si abbia $|x-y| < \delta$. Da qui, l'uniforme continuità della funzione f in D. $\square$

Capitolo 10

Derivata di una funzione

> Et hæc quidem initia funt tantum Geometriæ cujusdam multo sublimioris.
>
> *G.W.Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis*

In questo capitolo passiamo alla trattazione nonstandard della nozione di derivata e di funzione derivata. Nella prima sezione proviamo, in particolare, le usuali regole di derivazione e il teorema di Fermat sugli estremi relativi, come, pure, determiniamo il legame sussistente tra il segno della derivata e la monotonia locale della funzione.

Nella seconda, dedicata alle funzioni derivabili in un intervallo, consideriamo le formulazioni nonstandard dei teoremi di Lagrange e di Cauchy, che sono propedeutiche per provare una caratterizzazione infinitesimale della "derivazione con continuità" (la prima) e il celebre teorema di de L'Hôpital (la seconda). A questo proposito osserviamo che nella dimostrazione di quest'ultimo compaiono, particolare curioso, tutte le tre caratterizzazioni infinitesimali dei limiti, ottenute nella prima sezione del nono capitolo. Infine, affrontando l'approssimazione polinomiale di funzioni sufficientemente regolari, proviamo, tramite il lemma di Peano, l'altro teorema chiave dell'analisi reale: il teorema di Taylor, formulando anche una versione infinitesimale del relativo resto.

Ritenendo che il lettore, giunto a questo punto, abbia raggiunto una buona padronanza della tecnica degli $\star$-concetti, non citiamo più, qui e nel seguito, i teoremi relativi agli $\star$-concetti fondamentali, alleggerendo così notevolmente l'esposizione.

10.1 Regole di derivazione

Iniziamo col ricordare che una funzione f è *derivabile* in un punto x di accumulazione del suo dominio, se esiste finito il limite del *rapporto incrementale*:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

quando Δx tende a zero.

Ora, un'appropriata definizione nonstandard si ottiene a partire da questa mediante una sua naturale "traduzione" in termini infinitesimali. A tal fine, per amore di semplicità e senza togliere nulla all'essenziale, assumiamo, d'ora in poi, che x sia *un punto interno* del dominio D (ottenendo così, per il Teorema 6.3.1(i), $\mu(x) \subset {}^\star D$). Ciò precisato, tenuto conto del Criterio del limite finito 9.2.2 e dei Teoremi 3.7.2(viii), 6.3.1(i) e 7.1.1(i), viene naturale dire che:

– *La funzione f è* **derivabile in** *x interno del suo dominio se, per tutti gli infinitesimi $\epsilon \neq 0$, i numeri $\star$-reali*

$$^\star\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\Bigg|_{\Delta x=\epsilon} = \frac{{}^\star f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}$$

sono tutti finiti e tra di loro infinitamente prossimi[1]*, e chiamare, in questo caso,* **derivata** *di f in x il numero reale*

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{{}^\star f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon}\right) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta^\star f_x(\epsilon)}{\epsilon}\right).$$ [2]

---

[1]Le nozioni di derivata destra e sinistra in un punto, che vengono introdotte nell'analisi classica considerando il rapporto incrementale solo in corrispondenza ad incrementi positivi e, rispettivamente, negativi, possono naturalmente essere definite anche in forma infinitesimale. È sufficiente per questo ripetere la definizione ora data imponendo che sia $\epsilon > 0$, per la derivata destra, e $\epsilon < 0$, per quella sinistra.

Ricordiamo inoltre che talvolta vengono prese in considerazione anche derivate "infinite". Si richiede cioè solo l'esistenza del limite del rapporto incrementale e non che sia anche finito. Ciò può essere fatto in modo del tutto ovvio anche in termini infinitesimali.

Non ci occupiamo però di queste generalizzazioni che vanno al di là dello scopo che ci siamo prefissi.

[2]Concordemente alla notazione classica $\Delta f_x(t) = f(x+t)-f(x)$, relativa all'incremento dei valori della funzione f in corrispondenza dell'aumento t del punto di riferimento x, abbiamo posto $\Delta^\star f_x(\epsilon) = {}^\star f(x+\epsilon) - f(t)$.

Osserviamo inoltre che, per il Teorema 5.5.4(i), i numeri $\star$-reali finiti e infinitamente prossimi hanno tutti la stessa parte standard.

Osserviamo infine che la definizione proposta è equivalente, per la caratterizzazione del limite (Teorema 9.1.1), a quella classica.[3]

Proviamo ora un risultato semplice ma importante, perchè molto utile per gli sviluppi che seguono.

Lemma 10.1.1. (dell'incremento infinitesimo) *Sia f derivabile in x. Allora, per ogni ϵ esiste un infinitesimo ϵ' tale che $\Delta^\star f_x(\epsilon) = \epsilon\, f'(x) + \epsilon\,\epsilon'$.*

Dimostrazione. Se $\epsilon = 0$, la tesi è ovvia. Sia allora $\epsilon \neq 0$. Poichè f è derivabile in x risulta $({}^\star f(x+\epsilon) - f(x))/\epsilon \approx f'(x)$, cioè $({}^\star f(x+\epsilon) - f(x))/\epsilon = f'(x) + \epsilon'$ per qualche infinitesimo ϵ'. Ne segue la tesi. □

Tutti i teoremi che riguardano le derivate in un punto si possono ottenere, naturalmente, con tecniche infinitesimali. I procedimenti dimostrativi sono sostanzialmente analoghi a quelli classici. Vi è tuttavia, qui, il vantaggio di poter operare, come si faceva agli inizi delle ricerche nel campo dell'analisi infinitesimale, eseguendo calcoli con numeri infinitesimi, però al contrario di allora, in modo del tutto rigoroso. Si evita così di adoperare la fastidiosa tecnica *epsilon-delta*, che risulta piuttosto artificiosa e di non facile assimilazione, come tutti forse ricorderanno riandando col pensiero ai loro primi approcci con la nozione di limite.

Aiutandoci con le dimostrazioni classiche, possiamo facilmente ottenere le dimostrazioni dei vari teoremi riguardanti la derivata in un punto nella loro versione infinitesimale. Riteniamo tuttavia utile riportare qui, a titolo esemplificativo, alcuni di tali teoremi completi di dimostrazione. Di altri daremo invece soltanto l'enunciato, lasciando la dimostrazione come esercizio.

Teorema 10.1.2. *Se f è derivabile in x, allora f è continua in x.*

[3] Tra le varie notazioni introdotte nell'analisi classica per denotare la derivata, ricordiamo quella di Leibniz $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x)_{x=r} = f'(r)$, o anche, più semplicemente $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ che sottintende il punto in cui la derivata viene calcolata. Si usava dire allora, con espressione imprecisa ma suggestiva, che le derivate sono gli "ultimi rapporti degli incrementi infinitamente piccoli" (Cauchy), rapporti che prevedono al denominatore l'incremento della variabile indipendente e al numeratore quello della variabile dipendente, cioè della funzione. Ovviamente ora, con la definizione infinitesimale proposta, la questione viene precisata in modo rigoroso; la derivata risulta cioè la parte standard del rapporto di due numeri infinitesimi, o meglio la comune parte standard (il comune numero reale infinitamente prossimo) di tutti i rapporti incrementali che si ottengono prendendo l'infinitesimo ϵ diverso da zero e per il resto arbitrario.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma dell'incremento infinitesimo, ${}^\star f(x+\epsilon) - f(x) = f'(x)\epsilon + \epsilon\,\epsilon'$ per qualche ϵ'. Tenuto allora conto che $f'(x)$ è finito, il secondo membro dell'uguaglianza è infinitesimo. Ne segue ${}^\star f(x+\epsilon) \approx f(x)$ e quindi, per il Teorema 8.1.1, la tesi. □

Nel prossimo teorema vengono riportate le usuali "regole di derivazione".

Teorema 10.1.3. *Sia f derivabile in x. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) *Se g è derivabile in x, allora $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ e $(\alpha f)'(x) = \alpha\, f'(x)$, $(f(x)+\alpha)' = f'(x)$ per ogni reale α;*

(ii) *Se $f(x) \neq 0$, allora $(1/f)'(x) = -\, f'(x)/f^2(x)$;*

(iii) *Se g è derivabile in x e $g(x) \neq 0$, allora $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$;*

(iv) Regola della catena: *Se g, di dominio incluso nell'imagine di f, è derivabile in $f(x)$ e f è derivabile in x, allora $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x)$;*

(v) *Se f monotona in senso stretto in un intorno di x e $f'(x) \neq 0$, allora $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo preliminarmente che la funzione f è, per il Teorema 10.1.2, continua in x.

(i) Ci limitiamo a provare la derivabilità del prodotto, lasciando le altre prove al lettore come esercizio. Per i Teoremi 3.7.2(ix) e 7.1.1(i),

$$\begin{aligned} \Delta^\star(f \cdot g)_x(\epsilon) &= {}^\star f(x+\epsilon)\,{}^\star g(x+\epsilon) - f(x)\,g(x) \\ &= {}^\star f(x+\epsilon)({}^\star g(x+\epsilon) - g(x)) + g(x)({}^\star f(x+\epsilon) - f(x)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{\Delta^\star(f \cdot g)_x(\epsilon)}{\epsilon} = {}^\star f(x+\epsilon)\,\frac{\Delta^\star g_x(\epsilon)}{\epsilon} + g(x)\,\frac{\Delta^\star f_x(\epsilon)}{\epsilon}.$$

Ora, essendo f continua, ${}^\star f(x+\epsilon) \approx f(x)$ (Teorema 8.1.1). Inoltre $(\Delta^\star g_x(\epsilon)/\epsilon) \approx g'(x)$ e $(\Delta^\star f_x(\epsilon)/\epsilon) \approx f'(x)$. Ne segue, per il Lemma 5.5.1, ${}^\star f(x+\epsilon)\,(\Delta^\star g_x(\epsilon)/\epsilon) \approx f(x)g'(x)$ e $g(x)\,(\Delta^\star f_x(\epsilon)/\epsilon) \approx g(x)f'(x)$. Usando ancora il Lemma 5.5.1, si ottiene $(\Delta^\star(f \cdot g)_x(\epsilon)/\epsilon) \approx f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$. Passando infine alla parte standard, si ha la tesi.

(ii) Poichè f è continua, ${}^\star f(x+\epsilon) \approx f(x)$. Inoltre, essendo $f(x) \neq 0$, risulta, per il Teorema 5.4.1, ${}^\star f(x+\epsilon)$ non infinitesimo e quindi ${}^\star f(x+\epsilon) \neq 0$. Allora

$$\Delta^\star(1/f)_x(\epsilon) = \frac{1}{{}^\star f(x+\epsilon)} - \frac{1}{f(x)} = \frac{f(x) - {}^\star f(x+\epsilon)}{f(x)\,{}^\star f(x+\epsilon)}$$

e quindi
$$\frac{\Delta^\star(1/f)_x(\epsilon)}{\epsilon} = -\frac{1}{f(x)\ {}^\star f(x+\epsilon)}\,\frac{\Delta^\star f_x(\epsilon)}{\epsilon}.$$
Osservato che il prodotto $f(x)\ {}^\star f(x+\epsilon)$ non è infinitesimo in quanto prodotto di due numeri apprezzabili, passando alle parti standard si ottiene, per il Teorema 5.5.4(iv),(vi),(vii), la tesi.

(iv) Per il Teorema 3.7.2(vii), $\Delta^\star(g\circ f)_x(\epsilon) = {}^\star g({}^\star f(x+\epsilon)) - g(f(x)) = {}^\star g(f(x)+\epsilon') - g(f(x))$, ove nell'ultimo membro si è posto ${}^\star f(x+\epsilon) = f(x)+\epsilon'$, tenuto conto che f è continua in x. Inoltre, essendo g derivabile in $f(x)$, per il Lemma dell'incremento infinitesimo 10.1.1, $\Delta^\star(g\circ f)_x(\epsilon') = g'(f(x))\epsilon' + \epsilon'\epsilon'' = g'(f(x))({}^\star f(x+\epsilon) - f(x)) + ({}^\star f(x+\epsilon) - f(x))\epsilon''$, per qualche ϵ''. Si ottiene allora
$$\frac{\Delta^\star(g\circ f)_x(\epsilon)}{\epsilon} = g'(f(x))\,\frac{\Delta^\star f_x(\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\Delta^\star f_x(\epsilon)}{\epsilon}\,\epsilon''.$$
Infine, tenuto conto che $\mathrm{st}(\Delta^\star f_x(\epsilon)/\epsilon) = f'(x)$ e il Teorema 5.5.4(i),(iii),(vi), risulta
$$(g\circ f)'(x) = \mathrm{st}(\frac{\Delta^\star(g\circ f)_x(\epsilon)}{\epsilon}) = g'(f(x))\,f'(x) + f'(x)\,\mathrm{st}(\epsilon'') = g'(f(x))\,f'(x).$$

(v) La monotonia in senso stretto in un intorno di x, assicura, anzitutto, l'esistenza dell'inversa in un intorno di $y = f(x)$; inoltre, l'inversa risulta continua in y (Teorema 8.1.2(iv)).

Ciò premesso, per il Teorema 3.7.2(ii), $\Delta^\star(f^{-1})_y(\epsilon) = {}^\star f^{-1}(y+\epsilon) - f^{-1}(y) = x_1 - x$, avendo posto $x_1 = {}^\star f^{-1}(y+\epsilon)$. Ne segue ${}^\star f(x_1) = y+\epsilon$ e quindi $\epsilon = {}^\star f(x_1) - y$. Allora
$$\frac{\Delta^\star(f^{-1})_y(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{x_1 - x}{{}^\star f(x_1) - y} = \frac{1}{\dfrac{{}^\star f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}},$$
ove l'ultimo passaggio essendo consentito perchè $x_1 - x \neq 0$, in quanto $\epsilon \neq 0$ e ${}^\star f^{-1}$ strettamente monotona (quale inversa di ${}^\star f$ monotona in senso stretto (Teorema 3.6.6(iv) e PdT).

Posto allora $\alpha = x_1 - x = {}^\star f^{-1}(y+\epsilon) - f^{-1}(y)$, risulta $\alpha \neq 0$; inoltre, α è un infinitesimo, in quanto f^{-1}, come notato all'inizio della dimostrazione, è continua in y. Ciò osservato, riesce
$$\frac{\Delta^\star(f^{-1})_y(\epsilon)}{\epsilon} = \frac{1}{\dfrac{{}^\star f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{\Delta^\star f_x(\alpha)}{\alpha}}.$$
Poichè $f'(x) \neq 0$, lo $\star$-reale $\Delta^\star f_x(\alpha)/\alpha$ risulta finito e non nullo (Teorema 5.4.1). Ne segue, tramite il Teorema 5.5.4(vii), la tesi. $\square$

Concludiamo la sezione con due teoremi riguardanti alcune proprietà locali del prim'ordine.

Teorema 10.1.4. *Sia f derivabile in x e $f'(x) > 0$ (< 0). Allora f è crescente (decrescente) in x.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon, \epsilon' > 0$. Allora, $\mathrm{st}(\frac{{}^\star f(x-\epsilon)-f(x)}{-\epsilon}) > 0$ e $\mathrm{st}(\frac{{}^\star f(x+\epsilon')-f(x)}{\epsilon'}) > 0$. Ne segue, per il Teorema 5.4.1, $\frac{{}^\star f(x-\epsilon)-f(x)}{-\epsilon} > 0$ e $\frac{{}^\star f(x+\epsilon')-f(x)}{\epsilon'} > 0$. Dalla prima disuguaglianza otteniamo ${}^\star f(x-\epsilon) < f(x)$ e dalla seconda $f(x) < {}^\star f(x+\epsilon')$. Ne segue, tramite il Teorema 7.1.3(ii), la tesi.

Nel caso decrescente, la dimostrazione è analoga, salvo ricorrere al Teorema 7.1.3(iii). □

Teorema 10.1.5. (Fermat) *Sia f derivabile nell'estremo relativo x. Allora $f'(x) = 0$.*

Dimostrazione. Limitiamo la dimostrazione al caso di x massimo relativo, lasciando l'altro come esercizio. Sia $\epsilon > 0$. Allora, tramite il Teorema 7.1.3(iv), ${}^\star f(x-\epsilon) - f(x) \leq 0$ e ${}^\star f(x+\epsilon) - f(x) \leq 0$. Ne segue $\frac{{}^\star f(x-\epsilon)-f(x)}{-\epsilon} \geq 0$ e $\frac{{}^\star f(x+\epsilon)-f(x))}{\epsilon} \leq 0$. Passando alla parte standard e usando il Teorema 5.5.4(ix), si ottiene $0 \leq f'(x) \leq 0$, cioè $f'(x) = 0$. □

10.2 Funzioni derivabili in un intervallo

Consideriamo una funzione reale f derivabile in tutti i punti dell'insieme D. Possiamo allora introdurre, com'è noto, la **funzione derivata**, quella funzione, cioè, che ad ogni punto $x \in D$ associa la derivata di f in x, che denotiamo, in accordo con la notazione introdotta in precedenza, con f'.

Come già per i teoremi riguardanti la derivata in un punto, anche per quelli relativi alla funzione derivata le dimostrazioni nonstandard sono spesse volte analoghe a quelle classiche. Per taluni addirittura non abbiamo una dimostrazione nonstandard differente da quella standard; ciò accade, ad esempio, per i classici teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Contrariamente a ciò, tuttavia, nei casi in cui si hanno prove standard e nonstandard, emerge in modo evidente, come già visto in precedenza per alcuni teoremi fondamentali, la maggiore efficacia della tecnica nonstandard rispetto a quella standard. Lo si può apprezzare, in particolare, confrontando, anche qui, le due tecniche in relazione al Teorema di de L'Hôpital che riportiamo verso la fine della presente sezione.

La trattazione con tecniche infinitesimali di questioni riguardanti la funzione derivata f', chiama in causa, ovviamente, la sua trasformata ${}^\star f'$. Sulla base dei risultati sin qui ottenuti, circa i legami tra proprietà delle funzioni e loro trasformate, appare del tutto naturale attendersi che ${}^\star f'$ si possa introdurre, oltre che come trasformata di f', anche operando con il rapporti incrementali di ${}^\star f$. Classicamente, $f'(r)$, con $r \in D$, è il limite del rapporto incrementale di f con punto iniziale r. Questa proprietà si trasferisce a ${}^\star(f') = {}^\star f'$. Risulta infatti che ${}^\star f'(b)$ con $b \in {}^\star D$, è il limite del rapporto incrementale di ${}^\star f$ con punto iniziale b, *limite nel senso della tecnica epsilon-delta*, estesa però a ${}^\star\mathbb{R}$. Ciò è quanto è espresso in modo equivalente dal prossimo risultato, più adatto in questo contesto, che estende agli $\star$-reali il Lemma dell'incremento infinitesimo. L'affermazione, nella forma detta poc'anzi, appare invece in modo esplicito nel corso della dimostrazione.

Lemma 10.2.1. (dell'incremento infinitesimo $\star$-reale) *Sia f derivabile nell'aperto $D \subset \mathbb{R}$ e $x \in {}^\star D$. Esiste allora $\epsilon' > 0$ tale che, per ogni $\epsilon \in]-\epsilon', \epsilon'[$, esiste un infinitesimo ϵ_1 tale che ${}^\star f(x+\epsilon) - {}^\star f(x) = \epsilon\, {}^\star f'(x) + \epsilon\, \epsilon_1$.*[4]

Dimostrazione. Per ogni $u \in D$ sussiste l'enunciato $\lim_{v\to 0}(f(u+v) - f(u))/v = f'(u)$ che si semiformalizza, in prima battuta, con la frase:

$$\forall u \in D\, \forall v_1 \in \mathbb{R}^+\, \exists v_2 \in \mathbb{R}^+\, \forall v \in \mathbb{R} \left(0 < |v| < v_2 \Rightarrow \left|\frac{f(u+v) - f(u)}{v} - f'(u)\right| < v_1\right).$$

Al fine di rendere possibile l'utilizzazione delle tecnica degli $\star$concetti, passiamo alla semiformalizzazione più dettagliata:

$$\begin{aligned} &\forall u \in D\, \forall v_1 \in \mathbb{R}^+\, \exists v_2 \in \mathbb{R}^+\, \forall v, u_1, \ldots, u_7 \in \mathbb{R}\, (u_1 = |v| \,\mathrm{e}\, u_2 = u + v \\ &\quad \mathrm{e}\, u_3 = f(u_2) - f(u) \,\mathrm{e}\, u_4 = 1/v \,\mathrm{e}\, u_5 = u_3\, u_4 \,\mathrm{e}\, u_6 = u_5 - f'(u) \,\mathrm{e}\, u_7 = |u_6| \\ &\qquad\qquad \mathrm{e}\ 0 < u_1 < v_2 \Rightarrow u_7 < v_1). \end{aligned}$$

Per PdT e il Teorema 7.1.1(iv), sussiste lo $\star$-enunciato:

$$\begin{aligned} &\forall u \in {}^\star D\, \forall v_1 \in {}^\star\mathbb{R}^+\, \exists v_2 \in {}^\star\mathbb{R}^+\, \forall v \in {}^\star\mathbb{R}\, (0 < |v| < v_2 \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \left|\frac{{}^\star f(u+v) - {}^\star f(u)}{v} - {}^\star f'(u)\right| < v_1), \end{aligned}$$

[4]Il Lemma dell'incremento infinitesimo, valido per gli x reali, può essere enunciato nella forma attuale scegliendo $\epsilon_1 > 0$ infinitesimo arbitrario. Il presente lemma appare allora, lo avevamo già preannunciato, come un'estensione agli $\star$-reali del Lemma dell'incremento infinitesimo. Come si vede, questa estensione è ottenuta a scapito della libertà di scelta dell'infinitesimo ϵ_1. Quando x è reale, infatti, ϵ può essere scelto in modo del tutto arbitrario nella monade $\mu(0)$, mentre quando x è $\star$-reale, ma non reale, la sua scelta è confinata in un $\star$-intorno di ampiezza infinitesima, incluso nella monade $\mu(0)$.

da cui, scelto $u = x \in {}^\star D$ e $v_1 = \epsilon' > 0$, risulta che sussiste anche la frase:

$$\exists v_2 \in {}^\star\mathbb{R}^+ \, \forall v \in {}^\star\mathbb{R} \left(0 < |v| < v_2 \Rightarrow \left| \frac{{}^\star f(x+v) - {}^\star f(x)}{v} - {}^\star f'(x) \right| < \epsilon' \right).$$

Esiste dunque uno $\star$-reale $b > 0$ tale che, per ogni $0 < |\epsilon| < b$ risulta

$$\left| \frac{{}^\star f(x+\epsilon) - {}^\star f(x)}{\epsilon} - {}^\star f'(x) \right| < \epsilon'$$

e quindi $({}^\star f(x+\epsilon) - {}^\star f(x))/\epsilon = {}^\star f'(x) + \epsilon_1$, con ϵ_1 infinitesimo. Risulta pertanto ${}^\star f(x+\epsilon) - {}^\star f(x) = \epsilon \, {}^\star f'(x) + \epsilon \, \epsilon_1$.

A questo punto la prova si conclude, ponendo $\epsilon' = b$, se b infinitesimo, e scegliendo ϵ' infinitesimo positivo arbitrario, se b non è infinitesimo. □

Richiamiamo ora, come detto in premessa, i teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy, riportandone le dimostrazioni (che sono quelle classiche), per amore di completezza.

Teorema 10.2.2. *Sia f una funzione continua definita nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Rolle: *Se $f(a) = f(b)$, esiste allora $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$;*

(ii) Cauchy: *Sia g una funzione continua e definita nell'intervallo $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$ tale che $g' \neq 0$ in $]a, b[$. Esiste allora $\xi \in]a, b[$ tale che:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a))} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};$$

(iii) Lagrange: *Esiste $\xi \in]a, b[$ tale che:*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dimostrazione. (i) Per il Teorema di Weierstrass 8.1.7, f ammette minimo e massimo. Ora, se f è costante, la tesi è banale. Altrimenti, essendo i valori di f agli estremi uguali, uno dei due estremi deve essere interno all'intervallo. Ne segue, per il Teorema di Fermat 10.1.5, la tesi.

(ii) Basta osservare che la funzione:

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

verifica, per il Teorema 10.1.3(i), le ipotesi di (i).

(iii) Si ottiene dal Teorema di Cauchy con g la funzione identica. □

Appare naturale, a questo punto, chiedersi se questi teoremi si possano estendere all'ambiente nonstandard, ovvero se sussistano anche in relazione a intervalli di ${}^\star\mathbb{R}$ di estremi $\star$-reali e con riferimento, ovviamente, alle estensioni in ${}^\star\mathbb{R}$ delle funzioni f e f'. La risposta è positiva ed è fornita dai due teoremi seguenti.

Teorema 10.2.3. (Cauchy $\star$-reale) *Siano ρ_1 reale o il simbolo $-\infty$ e ρ_2 reale o il simbolo $+\infty$. Inoltre, siano f, g funzioni derivabili nell'intervallo $]\rho_1, \rho_2[$ e g' ivi non nulla. Allora, per ogni $b_1, b_2 \in {}^\star]\rho_1, \rho_2[$ con $b_1 < b_2$, esiste $\xi \in {}^\star]b_1, b_2[$ tale che*

$$\frac{{}^\star f(b_2) - {}^\star f(b_1)}{{}^\star g(b_2) - {}^\star g(b_1)} = \frac{{}^\star f'(\xi)}{{}^\star g'(\xi)}.$$

Dimostrazione. Tenuto conto delle ipotesi, sussiste il Teorema di Cauchy 10.2.2 (ii) in relazione ad ogni coppia u_1, u_2 tale che $u_1, u_2 \in]\rho_1, \rho_2[$ e $u_1 < u_2$. Risulta cioè:

$$\forall u_1, u_2 \in]\rho_1, \rho_2[\left(u_1 < u_2 \Rightarrow \exists u \left(u \in]u_1, u_2[\text{ e } \frac{f(u_2) - f(u_1)}{g(u_2) - g(u_1)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} \right) \right).$$

Passando ad una semiformalizzazione più dettagliata:

$$\begin{aligned} &\forall u_1, u_2 \in]\rho_1, \rho_2[(u_1 < u_2 \Rightarrow \exists u\, (u_1 < u < u_2 \,\text{e}\, \forall v_1, v_2, v_3, v_4 (v_1 = f(u_2) - f(u_1) \\ &\qquad \text{e}\, v_2 = g(u_2) - g(u_1) \,\text{e}\, v_3 = 1/v_2 \,\text{e}\, v_4 = v_1\, v_3 \Rightarrow v_4 = (f'/g')(u)))). \end{aligned}$$

si perviene, tramite PdT e il Teorema 7.1.1(iii), alla tesi. □

Teorema 10.2.4. (Lagrange $\star$-reale) *Siano ρ_1 reale o il simbolo $-\infty$ e ρ_2 reale o il simbolo $+\infty$. Inoltre, sia f funzione derivabile nell'intervallo $]\rho_1, \rho_2[$. Allora, per ogni $b_1, b_2 \in {}^\star]\rho_1, \rho_2[$ con $b_1 < b_2$, esiste $\xi \in {}^\star]b_1, b_2[$ tale che*

$${}^\star f'(\xi) = \frac{{}^\star f(b_2) - {}^\star f(b_1)}{b_2 - b_1}.$$

Dimostrazione. Utilizzando il Teorema 3.7.2(v) e ponendo nel teorema precedente $g = \mathrm{i}_{\mathbb{R}}$, si ottiene la tesi. □

Il prossimo risultato fornisce un ben noto criterio del secondo ordine per la ricerca degli estremi di una funzione tramite il segno della sua derivata seconda, invertendo, in un certo senso, il Teorema di Fermat 10.1.5.

Teorema 10.2.5. *Sia f due volte derivabile in un intorno di x e $f'(x) = 0$ e $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$). Allora x è un punto di massimo (minimo) relativo di f.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, essendo f' definita in un intorno di x, la sua trasformata ${}^\star f'$ risulta definita, per i Teoremi 2.4.3(v) e 6.1.4, in tutta la monade $\mu(x)$.

È allora, per il Teorema 7.1.3(iv), sufficiente provare che ${}^\star f(x+\epsilon) \leq f(x)$ per ogni ϵ. Procedendo per riduzione all'assurdo, supponiamo che esista ϵ tale che ${}^\star f(x+\epsilon) > f(x)$. Allora $\epsilon \neq 0$.

Sia intanto $\epsilon > 0$. Per il Teorema di Lagrange $\star$-reale, esiste allora $\xi \in]x, x+\epsilon[$ tale che ${}^\star f'(\xi) = ({}^\star f(x+\epsilon) - f(x))/\epsilon$ e quindi ${}^\star f'(\xi) > 0$. Poichè $f'(x) = 0$, risulta ${}^\star f'(\xi)/(\xi - x) = ({}^\star f'(\xi) - f'(x))/(\xi - x) > 0$ con $\xi - x$ infinitesimo. Pertanto, poichè f' è derivabile in x, si ha $f''(x) \approx ({}^\star f'(\xi) - f'(x))/(\xi - x) > 0$. Tramite il Teorema 5.4.1 si ha allora la contraddizione $f''(x) > 0$.

Con ragionamento analogo si prova poi $f(x+\epsilon) \leq f(x)$ anche con $\epsilon < 0$.

La dimostrazione nel caso $f''(x) > 0$ è del tutto analoga, salvo usare la proposizione (v) al posto della (iv) del Teorema 7.1.3. $\square$

Come il risultato appena provato, anche la seguente caratterizzazione infinitesimale delle funzioni derivabili con continuità (derivabili con derivata continua) può essere provata ricorrendo al Teorema di Lagrange $\star$-reale.

Teorema 10.2.6. *Sia f derivabile in un intorno di x. Sono equivalenti le proposizioni:*

(i) f' continua in x;

(ii) Qualunque siano $b_1, b_2 \in \mu(x)$ e $b_1 \neq b_2$, risulta:

$$f'(x) \approx \frac{{}^\star f(b_2) - {}^\star f(b_1)}{b_2 - b_1}.$$ [5]

[5] In accordo con la definizione infinitesimale di derivata, f è derivabile in x reale se sono infinitamente prossimi i rapporti incrementali che si ottengono calcolando ${}^\star f$ in x e in un altro arbitrario numero a questi infinitamente prossimo. Il presente teorema prende invece in esame i rapporti incrementali che si ottengono scegliendo nella monade $\mu(x)$ in modo arbitrario *entrambi* i numeri. Pertanto, per la derivabilità di f in x è sufficiente che *parte* di questi rapporti, quelli di punto iniziale x, siano infinitamente prossimi; perchè la derivata sia anche continua in x occorre invece che tali rapporti siano infinitamente prossimi nella loro *totalità*. Questo confronto tra derivabilità e derivabilità con continuità di una funzione in un punto presenta una qualche analogia con quello a suo tempo fatto tra continuità e continuità uniforme di una funzione in un insieme. Come ora anche allora era sufficiente che una proprietà (la ${}^\star f[\mu(x)] \subset \mu({}^\star f(x))$) fosse verificata in parte (per x reale), per avere semplice continuità, e lo fosse invece in toto (per x $\star$-reale), per avere continuità uniforme. A prima vista, questa analogia può destare una qualche sorpresa, atteso che

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, essendo f' definita in un intorno di x, la sua trasformata ${}^\star f'$ risulta definita, per i Teoremi 2.4.3(v) e 6.1.4, in tutta la monade $\mu(x)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dati $b_1, b_2 \in \mu(x)$ con $b_1 < b_2$, esiste, per il Teorema di Lagrange $\star$-reale 10.2.4, un numero $\star$-reale $\xi \in]b_1, b_2[$ tale che ${}^\star f'(\xi) = \frac{{}^\star f(b_2) - {}^\star f(b_1)}{b_2 - b_1}$. Poichè $]b_1, b_2[\subset \mu(x)$, risulta $\xi \in \mu(x)$. Per la continuità di f' si ha allora (Teorema 8.1.1) ${}^\star f'(\xi) \approx f'(x)$ e quindi la tesi.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Prendiamo $b \in \mu(x)$. Per il Lemma dell'incremento infinitesimo $\star$-reale 10.2.1, esiste $\epsilon \neq 0$ tale che $\frac{{}^\star f(b+\epsilon) - {}^\star f(b)}{\epsilon} = {}^\star f'(b) + \epsilon_1$, con ϵ_1 infinitesimo. Quindi $\frac{{}^\star f(b+\epsilon) - {}^\star f(b)}{\epsilon} \approx {}^\star f'(b)$. D'altra parte, poichè $b, b+\epsilon \in \mu(x)$, si ha pure $\frac{{}^\star f(b+\epsilon) - {}^\star f(b)}{\epsilon} \approx {}^\star f'(x)$. Pertanto ${}^\star f'(b) \approx f'(x)$. Essendo b arbitrario in $\mu(x)$, dal Teorema 8.1.1 segue la tesi. $\square$

Il prossimo risultato affronta la dimostrazione nonstandard del celebre teorema di de L'Hôpital sulle forme indeterminate. Particolare curioso, che merita menzionare, è che la dimostrazione utilizza tutte e tre le caratterizzazioni infinitesimali di limite: l'esterna, l'interna e quella mista.

Teorema 10.2.7. (de L'Hôpital) *Sia $\rho \in \bar{\mathbb{R}}$ di accumulazione per $D \subset \mathbb{R}$. Siano poi f, g due funzioni di dominio D tali che:*

(i) f, g derivabili in $D \setminus \{\rho\}$;

(ii) g' non nulla in $D \setminus \{\rho\}$;

(iii) $\lim_{x \to \rho} f'(x)/g'(x) = \lambda \in \bar{\mathbb{R}}$.

Sussista infine una delle due condizioni[6]:

(a) f, g infinitesime in ρ (forma indeterminata $0/0$);

---

la derivabilità con continuità ha carattere locale (riguarda il comportamento di f' in un punto), mentre la continuità uniforme ha carattere globale (riguarda il comportamento di f in un insieme). In proposito si rifletta però sul fatto che la nozione di derivabilità con continuità richiede l'esistenza della derivata non solo nel punto x, ma anche nei punti di un suo intorno. In altri termini, deve esistere il limite del rapporto incrementale di f con riferimento a tutti i punti di un intorno di x. In ultima analisi, nei riguardi della funzione f, da cui in effetti la questione dipende (è f che "genera" f'), anche la presente nozione assume, come quella di continuità uniforme, carattere globale, poichè è coinvolto il comportamento della funzione f sui punti di un intero insieme.

[6]Ricordiamo che una funzione si dice **infinitesima** (**infinita**) in x_0 se il limite in x_0 è nullo (è uno dei simboli $\pm\infty, \infty$).

(b) f, g infinite in ρ (forma indeterminata (∞/∞).

Risulta allora

$$\lim_{x\to\rho} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\rho} \frac{f'(x)}{g'(x)}.^{7}$$

Dimostrazione. `PROVA NONSTANDARD` Forniamo la prova nel caso ρ numero reale interno a D. Il caso ρ punto di frontiera è incluso nella dimostrazione che proponiamo; basta prendere in considerazione il semintorno che interessa, destro o sinistro, in tutti i passaggi in cui intervengono entrambi separatamente.

I casi ρ non reale si riconducono poi facilmente ai precedenti operando, come nella dimostrazione classica, la trasformazione $y = 1/x$ che "sposta x dall'infinito all'infinitesimo".

Assumiamo intanto la condizione (a). Avendo supposto ρ interno ed essendo, nell'attuale ipotesi, finiti (zero) i limiti di f e g in ρ, possiamo prolungare, se necessario per continuità, entrambe le funzioni in ρ ponendo $f(\rho) = g(\rho) = 0$. Scegliamo ora $b \neq \rho$ e $b \in \mu(\rho) \cap {}^\star D = \mu(\rho)$ (Teorema 6.3.1(i)). Per il Teorema di Cauchy $\star$-reale 10.2.3, esiste ξ nell'intervallo aperto di estremi ρ e b tale che

$$\frac{{}^\star f'(\xi)}{{}^\star g'(\xi)} = \frac{{}^\star f(b) - f(\rho)}{{}^\star g(b) - g(\rho)} = \frac{{}^\star f(b)}{{}^\star g(b)}.$$

Essendo ξ compreso tra ρ e b, numeri infinitamente prossimi, risulta $\xi \approx \rho$. Ne segue, per l'ipotesi (iii), il Teorema 7.1.1(iii) e la caratterizzazione esterna del limite (Teorema 9.1.2), ${}^\star(f'/g')(\xi) = {}^\star f'(\xi)/{}^\star g'(\xi) \in \imath^{\text{ext}}(\lambda)$ e quindi ${}^\star(f/g)(b) = {}^\star f(b)/{}^\star g(b) \in \imath^{\text{ext}}(\lambda)$. Dall'arbitrarietà di b, usando ancora la caratterizzazione esterna, si ha la tesi.

Assumiamo ora la condizione (b). Poichè i limiti di f e g in ρ, sono ora infiniti, è lecito supporre la funzione g non nulla ovunque in $D \setminus \{\rho\}$. Allora, per il Teorema 7.1.1(ii),(iii), ${}^\star(1/g) = 1/{}^\star g$ è definita ovunque in ${}^\star D \setminus \{\rho\}$.

Ciò premesso, siano $b, b_1 \in \mu(\rho)$ e $\rho < b < b_1$. Mediante il Teorema di Cauchy $\star$-reale, esiste allora $\xi \in]b, b_1[$ tale che

$$\frac{{}^\star f'(\xi)}{{}^\star g'(\xi)} = \frac{{}^\star f(b) - {}^\star f(b_1)}{{}^\star g(b) - {}^\star g(b_1)} = \frac{\dfrac{{}^\star f(b)}{{}^\star g(b)} - \dfrac{{}^\star f(b_1)}{{}^\star g(b)}}{1 - \dfrac{{}^\star g(b_1)}{{}^\star g(b)}}. \tag{10.1}$$

Proviamo ora che, scegliendo b in un opportuno intorno infinitesimo di ρ, risultano ${}^\star f(b_1)/{}^\star g(b)$ e ${}^\star g(b_1)/{}^\star g(b)$ infinitesimi. Infatti, poichè f e g hanno limite infinito in

[7] Quando ρ è reale, può essere un punto interno di D oppure un suo punto di frontiera. In quest'ultimo caso, i limiti si possono precisare meglio, enunciando, cioè, un teorema in termini di limiti destri ed uno in termini di limiti sinistri.

ρ e $b_1 \in \mu(\rho)\setminus\{\rho\}$, per la caratterizzazione esterna del limite, ${}^\star f(b_1), {}^\star g(b_1) \in {}^\star\mathbb{R}_{nf}$ e quindi $|{}^\star f(b_1)\cdot{}^\star g(b_1)| = \omega \in {}^\star\mathbb{R}^+_{nf}$. Fissato questo ω (e con ciò un intorno del limite infinito di g), per la caratterizzazione interna del limite (Teorema 9.1.4), esiste $\epsilon_1 > 0$ tale che $|{}^\star g(b)| > \omega$, per ogni $b \in]\rho - \epsilon_1, \rho + \epsilon_1[$. Riducendo eventualmente ϵ_1 si può sempre fare in modo che $\rho + \epsilon_1 \leq b_1$. Pertanto, per ogni $b \in]\rho, \rho + \epsilon_1[$ risulta

$$\left|\frac{{}^\star f(b_1)}{{}^\star g(b)}\right| < \left|\frac{{}^\star f(b_1)}{\omega}\right| = \left|\frac{{}^\star f(b_1)}{{}^\star f(b_1)\,{}^\star g(b_1)}\right| = \left|\frac{1}{{}^\star g(b_1)}\right| \in \mu^+(0)$$

e, con passaggi analoghi $|{}^\star g(b_1)/{}^\star g(b)| < |1/{}^\star f(b_1)| \in \mu^+(0)$. Conseguentemente, i rapporti ${}^\star f(b_1)/{}^\star g(b)$ e ${}^\star g(b_1)/{}^\star g(b)$ sono infinitesimi.

A questo punto, tenuto conto di (10.1), si ha, per ogni $b \in]\rho, \rho + \epsilon_1[$,

$$\frac{{}^\star f(b)}{{}^\star g(b)} \approx \frac{{}^\star f'(\xi)}{{}^\star g'(\xi)} \in \imath^{\text{ext}}(\lambda),$$

l'ultima appartenenza sussistendo, per la caratterizzazione esterna del limite, perchè $\xi \in \mu(\rho) = \mu(\rho) \cap {}^\star D$.

Con ragionamento analogo, si prova che esiste anche un intorno sinistro di ρ di semiampiezza infinitesima $\epsilon_2 > 0$ tale che, per ogni suo elemento b, riesce ancora ${}^\star f(b)/{}^\star g(b) \in \imath^{\text{ext}}(\lambda)$.

Posto $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$, riesce allora $\epsilon > 0$ e ${}^\star f(b)/{}^\star g(b) \in \imath^{\text{ext}}(\lambda)$, per ogni $b \in]\rho - \epsilon, \rho + \epsilon[$. Per la caratterizzazione mista del limite (Teorema 9.1.5), otteniamo finalmente la tesi.

`PROVA STANDARD` Ci limitiamo a fornire la prova nel caso ∞/∞ e $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$. Considerato un intorno U di ρ, possiamo assumere, senza perdere in generalità, che entrambe le funzioni siano ivi non nulle.

Ciò osservato, siano h, k due incrementi distinti e dello stesso segno (diciamo positivo) abbastanza "piccoli" per non uscire dall'intorno e con $h < k$. passiamo, ora, alla funzione quoziente:

$$\frac{f(\rho + h)}{g(\rho + h)} = \frac{f(\rho + k) - f(\rho + h)}{g(\rho + k) - f(\rho + h)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(\rho + k)}{g(\rho + h)}}{1 - \dfrac{f(\rho + k)}{f(\rho + h)}}. \tag{10.2}$$

Ora, che sia $g(\rho + k) - g(\rho + h) \neq 0$ segue dall'ipotesi $g'(x) \neq 0$. Non è, invece, altrettanto sicuro che sia non nullo anche il denominatore $1 - \frac{f(\rho+k)}{f(\rho+h)}$. Ma, per il seguito della dimostrazione, basta osservare che per ogni $k > 0$ esiste $h' > 0$ tale che per ogni $0 < h < h'$ risulta non nullo il denominatore in questione (come segue subito dall'ipotesi f infinita in ρ). Indicati allora, per semplicità di esposizione, con

$X(h,k)$ e $Y(h,k)$, rispettivamente, i due fattori al secondo membro dell'uguaglianza (10.2), otteniamo, tramite il Teorema di Cauchy 10.2.2(ii), che esiste ξ tale che $\rho + h < \xi < \rho + k$ e

$$X(h,k) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dunque, tenendo presente che $f'/g' \to \lambda$, per h, k sufficientemente "piccoli", il fattore $X(h,k)$ risulta arbitrariamente prossimo a λ. Per quanto riguarda, invece, il fattore $Y(h,k)$, osserviamo che, per ogni k', riesce $\lim\limits_{h \to 0} Y(h,k') = 1$, essendo f, g entrambe infinite per $x \to \rho$.

Proviamo, finalmente, che $f/g \to \lambda$. Dato $\xi > 0$, esiste un intorno destro V di ρ tale che

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \lambda \right| < \frac{\xi}{2}$$

per ogni $x \in V$. Quindi, per $\rho + k' \in V$ $(k' > 0)$, riesce $\xi \in V$, qualunque sia $0 < h < k'$. Ne segue

$$|X(h,k') - \lambda| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Fissiamo ora $k' > 0$. Posto $\gamma = \sup\limits_{x \in V} |f'(x)/g'(x)|$, esiste un intorno T di ρ tale che

$$|Y(h,k') - 1| < \frac{\xi}{2\gamma}.$$

Per $x + h \in T$ con $h > 0$, risulta allora

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(\rho+h)}{g(\rho+h)} - \lambda \right| &= |X(h,k') \cdot Y(h,k') - \lambda| \\
&= |(X(h,k') \cdot Y(h,k') - X(h,k')) + (X(h,k') - \lambda)| \\
&= |(X(h,k')(Y(h,k') - 1) + (X(h,k') - \lambda)| \\
&\leq |X(h,k')| \cdot |Y(h,k') - 1| + |X(h,k') - \lambda| < \gamma \frac{\xi}{2\gamma} + \frac{\xi}{2} = \xi,
\end{aligned}$$

cioè la tesi. La dimostrazione, nel caso h, k entrambi negativi, è analoga. □

Concludiamo la sezione considerando il problema dell'approssimazione delle funzioni mediante polinomi. In questo ordine di idee, svolge, com'è noto, un ruolo centrale il teorema di Taylor. Premettiamo alla sua dimostrazione il lemma seguente, nel quale abbiamo indicato con $f^{(h)}$ la derivata h-sima della funzione f (con la convenzione $f^{(0)} = f$).

Lemma 10.2.8. (Peano) *Sia f una funzione $n-1$ volte derivabile in un intorno di x_0 ed esista finita la derivata $f^{(n)}(x_0)$. Sia inoltre*

$$f^{(h)}(x_0) = 0 \quad (h = 0, \dots, n-1).$$

Risulta allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che ${}^\star f$ è definita per ogni x di $\mu(x_0)$, in quanto x_0 è per ipotesi interno al dominio di f (Teorema 6.3.1(i)).

Dato $x \approx x_0$, sia intanto $x_0 < x$. Osservato che alle due funzioni f e $(\cdot - x_0)^n$, ambedue nulle in x_0, è applicabile il Teorema di Cauchy $\star$-reale 10.2.3 nell'intervallo $]x_0, x[$, otteniamo, ricorrendo alle regole di derivazione (Teorema 10.1.3(i)),

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{{}^\star f^{(1)}(\xi_1)}{n\,(\xi_1 - x_0)^{n-1}}$$

con ξ_1 appartenente all'intorno infinitesimo $]x_0, x[$. Lo stesso teorema è applicabile anche alle due funzioni $f^{(1)}$ e $(\cdot - x_0)^{n-1}$ nell'intervallo infinitesimo $]x_0, \xi_1[$. Risulta allora

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{{}^\star f^{(1)}(\xi_1)}{n(\xi_1 - x_0)^{n-1}} = \frac{{}^\star f^{(2)}(\xi_2)}{n(n-1)\,(\xi_2 - x_0)^{n-2}}$$

con $\xi_2 \in]x_0, \xi_1[$. Così procedendo fino alla derivata $(n-1)$-esima, otteniamo che esiste $\xi_{n-1} \approx x_0$ tale che

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \frac{{}^\star f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n\,!\,(\xi_{n-1} - x_0)} = \frac{1}{n\,!}\,\frac{{}^\star f^{(n-1))}(\xi_{n-1}) - f^{(n-1)}(x_0)}{\xi_{n-1} - x_0}.$$

Ricordato infine che la funzione $f^{(n-1)}$ è derivabile in x_0, risulta

$$\frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \approx \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

e quindi, per il Teorema 9.1.2, la tesi. Nel caso $x < x_0$ si procede in modo analogo. □

Teorema 10.2.9. (Taylor) *Sia f una funzione $n-1$ volte derivabile in un intorno di x_0 ed esista in x_0 anche la derivata n-sima. Allora, il polinomio:*

$$\mathrm{P}_n(x) = f(x_0) + \sum_{h=1}^{n} \frac{f^{(h)}(x_0)}{h!}(x-x_0)^h$$

è *l'unico di grado non maggiore di* n *tale che:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{10.3}$$

Dimostrazione. Osservato che, per le regole di derivazione (Teorema 10.1.3(i)),

$$(f - \mathrm{P}_n)(x_0) = (f - \mathrm{P}_n)^{(h)}(x_0) = 0 \quad (h = 1, \dots, n),$$

tramite il Lemma di Peano otteniamo (10.3). Per quanto riguarda l'unicità, dato il polinomio

$$\mathrm{P(x)} = a_0 + \sum_{h=1}^{n} a_h (x - x_0)^h,$$

risulta, $\mathrm{P}(x_0) = a_0$ e, per le regole di derivazione, $\mathrm{P}^{(h)}(x_0) = h!\, a_h$ e quindi $a_h = \mathrm{P}^{(h)}(x_0)/h!$ $(h = 1, \dots, n)$. Dunque $\mathrm{P} = \mathrm{P}_n$. □

Per poter eseguire calcoli, usando l'approssimazione di Taylor di una funzione f in prossimità di un punto x_0, sono state fornite, classicamente, due espressioni particolarmente utili del *resto* $\mathrm{T}_n(x) = f(x) - \mathrm{P}_n(x)$; quelle di Taylor-Lagrange e di Taylor-Peano. Dal punto di vista infinitesimale, una formulazione del resto è data dal teorema seguente.

Teorema 10.2.10. (Forma infinitesimale del resto) *Nelle medesime ipotesi del Teorema di Taylor risulta:*

$${}^{\star}f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \epsilon(x)\,(x - x_0)^n,$$

con $\epsilon(x)$ *infinitesimo per ogni* $x \in \mu(x_0) \setminus \{x_0\}$.[8]

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che ${}^{\star}f$ è definita per ogni x di $\mu(x_0)$, in quanto x_0 è per ipotesi interno al dominio di f (Teorema 6.3.1(i)).

[8]Per gli stessi motivi che ci inducono a dare una formulazione infinitesimale, nell'analisi classica è stato introdotto da Edmund Landau il simbolo o ("o piccolo" di Landau) mediante la convenzione: Date due funzioni f, g definite in D, g ovunque non nulla e x_0 di accumulazione per D, la frase "$f(x) = \mathrm{o}(x(x))$ per $x \to x_0$" significa $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)/g(x) = 0$. Definito così il simbolo o, si conviene poi che la frase "$f(x) = h(x) + \mathrm{o}(g(x))$ per $x \to x_0$" abbia il significato di "$f(x) - h(x) = \mathrm{o}(g(x))$ per $x \to x_0$".

A questo punto è facile verificare che la formulazione infinitesimale della *formula di Taylor*: $f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \mathrm{T}_n(x)$ equivale alla formula classica: $f(x) = \mathrm{P}_n(x) + \mathrm{o}((x - x_0)^n)$.

Per (10.3), si ha

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f - \mathrm{P}_n}{(\cdot - x_0)^n} \right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

da cui, tramite il Teorema 9.1.2, otteniamo

$$^\star \left(\frac{f - \mathrm{P}_n}{(\cdot - x_0)^n} \right) [\mu(x_0) \setminus \{x_0\}] \subset \mu(0).$$

Ora, usando il Teorema 7.1.1(i),(iii) e ricordando che $^\star\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_n$ e $^\star(\cdot - x_0)^n = (\cdot - x_0)^n$, risulta

$$\left(\frac{^\star f - \mathrm{P}_n}{(\cdot - x_0)^n} \right) [\mu(x_0) \setminus \{x_0\}] \subset \mu(0).$$

Posto allora

$$\epsilon(x) = \frac{^\star f(x) - \mathrm{P}_n(x)}{(x - x_0)^n},$$

risulta $\alpha(x)$ infinitesimo per ogni $x \in \mu(x_0) \setminus \{x_0\}$. Ne segue la tesi. □

Capitolo 11

Integrale di Riemann

> On ne diffère du style d'Archimède que dans le expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer.
>
> *G.W.Leibniz, Théorie des infinitésimaux*

In quest'ultimo capitolo ci occupiamo della caratterizzazione infinitesimale della nozione di integrale di Riemann, che consente, poi, di fornire delle dimostrazioni nonstandard di alcuni fondamentali risultati della teoria classica dell'integrazione.

È noto che per introdurre l'integrale di Riemann, di una funzione definita in un intervallo reale $[a, b]$ $(a < b)$, si inizia col suddividere l'intervallo in un numero *finito* di parti. Lo si fa inserendo in $[a, b]$ un numero finito n di punti assegnandoli mediante una sequenza s di dominio $[0, n]$ a valori in $[a, b]$, crescente e tale che $s_0 = a$ e $s_n = b$, chiamata *suddivisione di* $[a, b]$ *in* n *parti.* In corrispondenza ad ogni suddivisione $\mathbf{x}$ di valori $x_0, \ldots, x_n$, si introduce poi la nozione di *ampiezza della suddivisione*:

$$\delta(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq i \leq n}(x_i - x_{i-1}). \tag{11.1}$$

Sia ora f una funzione di dominio $[a, b]$. Fissata una suddivisione $\mathbf{x}$ di $[a, b]$ in n parti, sia $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si chiama, allora, *somma integrale di Riemann* il numero reale

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(\Delta\mathbf{x})_i$$

ove, $\Delta\mathbf{x}$ è la sequenza *delle differenze prime* di $\mathbf{x}$, di dominio $[1, n] \subset \mathbb{N}^+$ e a valori $(\Delta\mathbf{x})_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Osserviamo, in proposito, che il valore di questa sommatoria dipende dalla suddivisione $\mathbf{x}$ e dalla sequenza ζ (detta *di scelta in* $\mathbf{x}$) di dominio $[1, n]$ e a valori $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, con $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$. In conclusione, una somma integrale dipende da due sequenze, dalla suddivisione $\mathbf{x}$ e dalla scelta ζ, la seconda legata alla prima nel modo sopra descritto. Per rendere tutto ciò esplicito, poniamo, qui e nel seguito,

$$S(\mathbf{x}, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(\Delta\mathbf{x})_i.$$

Ciò premesso, la funzione f si dice *integrabile* (secondo Riemann) nell'intervallo reale $[a, b]$, se esiste un numero reale λ che è il limite di $S(\mathbf{x}, \zeta)$ al tendere dell'ampiezza di $\mathbf{x}$ a zero. Precisamente, dato $\xi > 0$ arbitrario, esiste $\delta_\xi > 0$ tale che, per ogni suddivisione $\mathbf{x}$ verificante la condizione $\delta(\mathbf{x}) < \delta_\xi$ e per ogni scelta ζ in $\mathbf{x}$, risulta $|S(\mathbf{x}, \zeta) - \lambda| < \xi$. Quando ciò accade, λ viene chiamato l'*integrale di f su* $[a, b]$ e si scrive

$$\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Sulla base di questa definizione, affrontiamo, nelle sezioni seguenti, la trattazione nonstandard dell'integrale di Riemann e delle sue principali proprietà.

Più in dettaglio, dopo aver fornito nelle prime due sezioni sia una sua caratterizzazione che un criterio di integrabilità in termini infinitesimali, affrontiamo nella terza la problematica delle funzioni integrabili, con particolare riguardo a quelle continue, monotone; inoltre, con riferimento ai sottointervalli di un dato intervallo, mettiamo in relazione l'integrabilità di una funzione nell'intervallo considerato con quella relativa ai sottointervalli.

Nella quarta invece proviamo, sempre facendo uso delle suddivisioni infinitesime, le usuali proprietà algebriche dell'integrale.

Dopo aver elencato nella quinta alcune proprietà della *funzione integrale*, si prova nella sesta il teorema della somma infinita che la collega alle funzioni additive; teorema che è, senza alcun dubbio, una pietra miliare della teoria infinitesimale dell'integrale di Riemann.

Mediante questo teorema proviamo poi nella settima sia il teorema fondamentale del calcolo (integrale e differenziale) che la formula di Torricelli-Barrow.

Infine, nella sezione che chiude il capitolo, forniamo una dimostrazione nonstandard dell'esistenza del limite della successione che definisce il numero di Nepero, basata sulla caratterizzazione infinitesimale del limite di successioni reali e sull'integrale di Riemann (tra 0 e 1) della funzione esponenziale di base un qualsiasi numero reale maggiore di uno.

11.1 Caratterizzazione infinitesimale

Sulla scorta di quanto richiamato, è abbastanza facile intuire, almeno a grandi linee, qual'è la via che si deve percorrere per giungere ad una definizione infinitesimale dell'integrale di Riemann.

Al posto dell'intervallo reale $[a, b]$ s'inizia col considerare l'intervallo $\star$-reale ${}^{\star}[a, b]$, che viene, poi, suddiviso in un numero $\star$-finito ν di intervalli tramite una $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ (di ${}^{\star}[a, b]$ in ν parti): $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b$. In collegamento con tale $\star$-suddivisione vengono, poi, scelti gli $\star$-reali $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ mediante una $\star$-sequenza di scelta ζ con $\zeta_i \in [x_{i-1} - x_i]$ $(i = 1, \ldots, \nu)$. Si calcola quindi la $\star$-sommatoria di Riemann $\sum_{i=1}^{\nu} {}^{\star}f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$. A questo punto, poichè operiamo in ambiente nonstandard, possiamo fare a meno del passaggio al limite in senso classico per rendere "piccola" l'ampiezza della $\star$-suddivisione. È sufficiente qui prendere in considerazione solo le somme integrali, relative a $\star$-suddivisioni di ampiezza infinitesima. Ciò fatto, viene naturale pensare, e lo proviamo, che la funzione f risulta integrabile se e solo se i valori di tutte le $\star$-sommatorie associate a quest'ultime $\star$-suddivisioni sono numeri $\star$-reali finiti e tra loro infinitamente prossimi, la cui comune parte standard è nient'altro che l'integrale della funzione f su $[a, b]$.[1]

Tracciata così a grandi linee la via che ci accingiamo a percorrere, passiamo ora a trattare l'argomento in modo dettagliato. Procediamo considerando le nozioni nell'ordine in cui sono apparse nella presentazione dell'integrale di Riemann, fornendone per ciascuna la corrispondente nozione nonstandard con le relative proprietà.

1. Suddivisioni finite Come visto, la sequenza $\mathbf{x}$ è una suddivisione di $[a, b]$ in n parti, se è crescente, di dominio $[0, n]$, a valori in $[a, b]$, con $\mathbf{x}_0 = a$ e $\mathbf{x}_n = b$. Al fine di determinare lo $\star$-concetto corrispondente, consideriamo

[1] Procedimento, per molti aspetti, analogo a quello seguito per introdurre la formulazione infinitesimale della nozione di derivata di una funzione in un punto.

il metapredicato:

$$X(u,\nu) : u\,\text{sequenza in } [a,b] \text{ crescente di dominio } [0,\nu] \subset \mathbb{N} \\ \text{e}\, u(0) = a \,\text{e}\, u(\nu) = b). \quad (11.2)$$

Tramite una semiformalizzazione più dettagliata e usando PdS, risulta [2]:

$$\star\text{-}X(u,\nu) : u\,\star\text{-sequenza in } {}^\star[a,b] \text{ crescente di dominio } [0,\nu] \subset {}^\star\mathbb{N} \\ \text{e}\, u(0) = a \,\text{e}\, u(\nu) = b).$$

Chiamata allora la $\star$-sequenza $\mathbf{x}$ una **$\star$-suddivisione di ${}^\star[a,b]$ in $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ parti** se sussiste $\star$-$X(\mathbf{x},\nu)$, otteniamo che:
- *la $\star$-sequenza* $\mathbf{x}$ è *una $\star$-suddivisione di* ${}^\star[a,b]$ *in* $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ *parti se e solo se* $\mathbf{x}$ è *una $\star$-sequenza crescente di dominio* $[0,\nu] \subset {}^\star\mathbb{N}$*, a valori in* ${}^\star[a,b]$*, con* $x_0 = \mathbf{x}(0) = a$ *e* $x_\nu = \mathbf{x}(\nu) = b$.

Passando a considerare la nozione più generale "u suddivisione finita dell'intervallo $[a,b]$", una sua espressione equivalente si può ottenere introducendo, all'inizio della semiformalizzazione (11.2), la condizione $\exists\nu \in \mathbb{N}$. È, allora, facile rendersi conto che il corrispondente $\star$-concetto è "u $\star$-sequenza crescente in ${}^\star[a,b]$ con valore minimo a e valore massimo b". Quindi:
- *la $\star$-sequenza* $\mathbf{x}$ è *una* **$\star$-suddivisione di** ${}^\star[a,b]$ *se e solo se* $\mathbf{x}$ è *una $\star$-sequenza crescente in* ${}^\star[a,b]$ *con valore minimo a e valore massimo b.*

Indicato con $\mathcal{D} \subset \Sigma$ l'insieme delle suddivisioni dell'intervallo $[a,b]$, non è difficile provare, ricorrendo al Teorema 3.3.4, il risultato seguente che fornisce gli elementi dell'insieme trasformato ${}^\star\mathcal{D} \subset {}^\star\Sigma$.

Lemma 11.1.1. *L'insieme ${}^\star\mathcal{D}$ è l'insieme delle $\star$-suddivisioni di ${}^\star[a,b]$.*

2. Operatore delle differenze prime Nel calcolo della somma integrale interviene la sequenza $\Delta\mathbf{x}$ delle differenze prime della sequenza $\mathbf{x}$. Viene allora naturale considerare l'**operatore Δ delle differenze prime** che associa, ad ogni sequenza reale s, la sequenza Δs formata dalle differenze successive dei valori di s, cioè tale che $(\Delta s)_i = s_i - s_{i-1}$ per ogni $i \geq 1$ del dominio di s.

Notiamo che l'operatore delle differenze, nel caso qui considerato, può essere visto come un'applicazione di $\mathcal{D}$ nell'insieme delle sequenze reali di dominio un segmento iniziale di $\mathbb{N}^+$.

[2]Per la nozione di $\star$-sequenza si veda la Sezione 7.3.

Indicato con Σ_1 tale insieme, tramite il Teorema 3.3.4, non è difficile provare il risultato seguente che fornisce gli elementi dell'insieme trasformato ${}^\star\Sigma_1 \subset {}^\star\Sigma$.

Lemma 11.1.2. *L'insieme ${}^\star\Sigma_1$ è l'insieme delle $\star$-sequenze in ${}^\star\mathbb{R}$ di dominio un segmento inferiore chiuso di ${}^\star\mathbb{N}^+$.*

Dopo aver descritto l'insieme ${}^\star\Sigma_1$, appare naturale analizzare anche il trasformato ${}^\star\Delta$ dell'operatore Δ delle differenze prime.

Lemma 11.1.3. *L'applicazione ${}^\star\Delta$ è l'operatore delle differenze prime relativo alle $\star$-suddivisioni di ${}^\star\mathcal{D}$. Cioè, è l'applicazione di ${}^\star\mathcal{D}$ in ${}^\star\Sigma_1$ tale che, ad ogni $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a,b]$ in $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ parti, associa la $\star$-sequenza $({}^\star\Delta)\mathbf{x} = {}^\star\Delta\mathbf{x}$, di dominio $[1,\nu]$, definita dalla ${}^\star\Delta\mathbf{x}_i = x_i - x_{i-1}$, per ogni $1 \leq i \leq \nu$.*

Dimostrazione. Osservato che

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathcal{D} \times \Sigma_1 \,|\, \forall\nu \in \mathbb{N}\,(\nu \in \pi_1^2(u)\,\mathrm{e}\,\nu \neq 0 \Rightarrow v(\nu) = u(\nu) - u(\nu-1))\},$$

tramite il Teorema 3.3.4, otteniamo

$${}^\star\Delta = \{(u,v) \in {}^\star\mathcal{D} \times {}^\star\Sigma_1 \,|\, \forall\nu \in {}^\star\mathbb{N}\,(\nu \in \pi_1^2(u)\,\mathrm{e}\,\nu \neq 0 \Rightarrow v(\nu) = u(\nu) - u(\nu-1))\}.$$

Scelta allora una $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a,b]$ in $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ parti, risulta $\mathbf{x} \in {}^\star\mathcal{D}$ e ${}^\star\Delta(\mathbf{x}) \in {}^\star\Sigma_1$ (Teorema 2.4.3(v)). Ne segue la tesi. □

3. Ampiezza della suddivisione finita Nella costruzione dell'integrale abbiamo considerato anche l'ampiezza di una suddivisione $\mathbf{x}$ di $[a,b]$:

$$\delta(\mathbf{x}) = \max \pi_2^2(\Delta\mathbf{x}).$$

Come peraltro si intuisce, il prossimo risultato assicura che l'ampiezza di una $\star$-suddivisione è esprimibile tramite l'applicazione ${}^\star\delta$, trasformata dell'applicazione δ di $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$.

Lemma 11.1.4. *L'applicazione ${}^\star\delta$ è l'applicazione di ${}^\star\mathcal{D}$ in ${}^\star\mathbb{R}$ tale che, ad ogni $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a,b]$, associa il numero $\star$-reale:*

$${}^\star\delta(\mathbf{x}) = \max \pi_2^2({}^\star\Delta\mathbf{x}).$$

Dimostrazione. Per la definizione di δ, sussiste la proposizione:

$$\forall u \in \mathcal{D}\, \forall u_1 \in \Sigma_1\, \forall v, v_1 (u \,\text{suddivisione e }\, u_1 = \Delta(u) \,\text{e}\, v_1 = \pi_2^2(u_1) \,\text{e}\, v = \max v_1 \\ \Rightarrow v = \delta(u)),$$

da cui, tramite PdT, otteniamo che sussiste lo $\star$-enunciato:

$$\forall u \in {}^\star\mathcal{D}\, \forall u_1 \in {}^\star\Sigma_1\, \forall v, v_1 (u \,\star\text{-suddivisione e }\, u_1 = ({}^\star\Delta)(u) \,\text{e}\, v_1 = \pi_2^2(u_1) \\ \text{e}\, v = \max v_1 \,\Rightarrow v = {}^\star\delta(u)).$$

Posto $u = \mathbf{x}$, $\star$-suddivisione di ${}^\star[a, b]$, si ottiene allora

$$\forall u_1 \in {}^\star\mathcal{D}\, \forall v, v_1 (u_1 = ({}^\star\Delta)(\mathbf{x}) \,\text{e}\, v_1 = \pi_2^2(u_1) \,\text{e}\, v = \max v_1 \,\Rightarrow v = {}^\star\delta(\mathbf{x})).$$

Poichè, per il Lemma 11.1.3, $({}^\star\Delta)(\mathbf{x}) \in {}^\star\Sigma_1$, è lecito scegliere $u_1 = ({}^\star\Delta)(\mathbf{x}) = {}^\star\Delta\mathbf{x}$. Posto, poi, $v_1 = \pi_2^2({}^\star\Delta\mathbf{x})$ si ha che sussiste la frase:

$$\forall v (v = \max \pi_2^2({}^\star\Delta\mathbf{x}) \Rightarrow v = {}^\star\delta(\mathbf{x})).$$

Ora, poichè ${}^\star\Delta\mathbf{x}$ è, in quanto $\star$-sequenza, un'applicazione interna di dominio $\star$-finito, per il Teorema 4.6.2(vi), risulta che la sua imagine $\pi_2^2({}^\star\Delta\mathbf{x})$ è $\star$-finita e quindi, per il Teorema 4.6.2(v), ammette massimo. Ne segue la tesi. □

4. Sequenza di scelta Per costruire le somme di Riemann, dobbiamo considerare, accanto alle suddivisioni finite, le sequenze di scelta. Ricordiamo, in proposito, che considerata una suddivisione $\mathbf{x}$ di $[a, b]$ in n parti, la sequenza ζ di dominio $[1, n]$ è una scelta in $\mathbf{x}$ se $x_{i-1} \leq \zeta_i \leq x_i$ per ogni $i \in [1, n]$.

Al fine di determinare lo $\star$-concetto relativo, consideriamo la proposizione:

$$X(u, u_1, \nu) : u \,\text{suddivisione di}\, [a, b] \,\text{in}\, \nu \in \mathbb{N} \,\text{parti e}\, \pi_1^2(u_1) = [1, \nu] \\ \text{e}\, \forall \nu_1 \in \mathbb{N}\, (\nu_1 \in [1, \nu] \Rightarrow u(\nu - 1) \leq u_1(\nu_1) \leq u(\nu_1)).$$

Tramite una semiformalizzazione più dettagliata e usando PdS, otteniamo

$$\star\text{-}X(u, u_1, \nu) : u \,\star\text{-suddivisione di}\, {}^\star[a, b] \,\text{in}\, \nu \in {}^\star\mathbb{N} \,\text{parti e}\, \pi_1^2(u_1) = [1, \nu] \\ \text{e}\, \forall \nu_1 \in {}^\star\mathbb{N}\, (\nu_1 \in [1, \nu] \Rightarrow u(\nu - 1) \leq u_1(\nu_1) \leq u(\nu_1)) \,\text{e}\, u_1 \,\text{interna}.$$

Dunque, data una $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a, b]$ in ν parti e chiamata **$\star$-scelta in $\mathbf{x}$** una qualsiasi $\star$-sequenza ζ tale che sussiste $\star$-$X(\mathbf{x}, \zeta, \nu)$, risulta:

– *La $\star$-sequenza ζ è una $\star$-scelta nella $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a, b]$ in ν parti se e solo se ha dominio $[1, \nu]$ e $\mathbf{x}_{\tau-1} \leq \zeta_\tau \leq \mathbf{x}_\tau$ per ogni $\tau \leq \nu$.*

Osserviamo che, in particolare, è una $\star$-scelta la sequenza che associa ad ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ il valore x_i $(i = 1, \ldots, \nu)$, poichè coincide con la restrizione $\mathbf{x}|_{[1,\nu]}$ che è interna (Teorema 2.5.2(ix)).

Tutto ciò premesso, siamo finalmente in grado di fornire, tramite il seguente teorema di caratterizzazione, la versione infinitesimale dell'integrale di Riemann. A tal fine, data una funzione f definita in $[a, b]$, introduciamo le **$\star$-somme di Riemann**:

$$S(\mathbf{x}, \zeta) = \sum_{i=1}^{\nu} {}^\star f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = {}^\star\mathbf{s}(({}^\star f \circ \zeta) \cdot {}^\star\Delta(\mathbf{x})),$$

per ogni $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a, b]$ in ν parti e per ogni $\star$-scelta ζ in $\mathbf{x}$.

È bene sottolineare che la definizione ora data è consistente. Dobbiamo provare che l'applicazione a valori ${}^\star f(\zeta_1)(x_1 - x_0), \ldots, {}^\star f(\zeta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})$, di dominio $[1, \nu]$ è una $\star$-sequenza. Essa si presenta come prodotto di due applicazioni di comune dominio $[1, \nu]$, la prima a valori ${}^\star f(\zeta_1), \ldots, {}^\star f(\zeta_\nu)$ e la seconda a valori $x_1 - x_0, \ldots, x_\nu - x_{\nu-1}$. Quest'ultima è la $\star$-sequenza ${}^\star\Delta(\mathbf{x})$, mentre la prima è l'applicazione composta ${}^\star f \circ \zeta$, quindi una $\star$-sequenza (Lemma 7.3.2(i)). Dunque, l'applicazione prodotto $({}^\star f \circ \zeta) \cdot {}^\star\Delta(\mathbf{x})$ è una $\star$-sequenza in quanto prodotto di due $\star$-sequenze (Lemma 7.3.1).

Teorema 11.1.5. *Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$. Allora sono equivalenti le proposizioni:*

(i) f è integrabile;

(ii) Qualunque siano le $\star$-suddivisioni infinitesime[3] *$\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ di ${}^\star[a, b]$ in, rispettivamente, ν, ν' parti, e per ogni ζ, ζ' $\star$-scelte, rispettivamente, in $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$, gli $\star$-reali $S(\mathbf{x}, \zeta)$ e $S(\mathbf{x}', \zeta')$ sono finiti e infinitamente prossimi.*

Nel caso di integrabilità risulta inoltre:

$$\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}\left(\sum_{i=1}^{\nu} {}^\star f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})\right),$$ [4]

per ogni $\star$-suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a, b]$ in ν parti e per ogni ζ $\star$-scelta in $\mathbf{x}$.

[3] Una $\star$-suddivisione è **infinitesima** se è infinitesima la sua ampiezza. La sua esistenza è assicurata dalla $\star$-suddivisione di ampiezza infinitesima introdotta nel Lemma 8.1.3.

[4] Ricordiamo che, per il Teorema 5.5.4(i), i numeri $\star$-reali finiti e infinitamente prossimi hanno tutti la stessa parte standard.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Indicato con λ l'integrale (supposto esistente) e fissato $\xi > 0$ reale, esiste $\delta_\xi > 0$ reale tale che sussiste la proposizione:

$$\forall u\,(u\,\text{suddivisione di}\,[a,b]\,\text{e}\,\delta(u) < \delta_\xi \Rightarrow \forall u_1\,(u_1\,\text{scelta in}\,u \\ \Rightarrow |\mathbf{s}((f \circ u_1)\,\Delta(u)) - \lambda| < \xi).$$

Tramite PdT e la nota 4 del quinto capitolo, risulta valida anche la frase:

$$\forall u\,(u\,\star\text{-suddivisione di}\,{}^\star[a,b]\,\text{e}\,{}^\star\delta(u) < \delta_\xi \Rightarrow \forall u_1\,(u_1\,\star\text{-scelta in}\,u \\ \Rightarrow |{}^\star\mathbf{s}(({}^\star f \circ u_1)\,{}^\star\Delta(u)) - \lambda| < \xi). \tag{11.3}$$

Sia ora $u = \mathbf{x}$ un'arbitraria suddivisione infinitesima di ${}^\star[a,b]$. Ne segue ${}^\star\delta(\mathbf{x}) < \delta_\xi$ e quindi sussiste il metaenunciato:

$$\forall u_1\,(u_1\,\star\text{-scelta in}\,\sigma_x \Rightarrow |{}^\star\mathbf{s}(({}^\star f \circ u_1)\,{}^\star\Delta(\mathbf{x})) - \lambda| < \xi),$$

cioè, per ogni $u_1 = \zeta$, $\star$-scelta in $\mathbf{x}$, risulta $|{}^\star\mathbf{s}(({}^\star f \circ \zeta)\,{}^\star\Delta(\mathbf{x})) - \lambda| < \xi$. Indicato con $[0,\nu]$ il dominio di $\mathbf{x}$ e tenuto conto che, per l'arbitrarietà di ξ, lo $\star$-reale (di cui si considera il valore assoluto) è infinitesimo, si ha $S(\mathbf{x},\zeta) \approx \lambda$, cioè $\mathrm{st}(\sum_{i=1}^{\nu} {}^\star f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})) = \lambda$.

Dunque, tutti gli $\star$-reali $S(\mathbf{x}',\zeta')$ sono finiti e tra loro infinitamente prossimi, al variare della suddivisione infinitesima $\mathbf{x}'$ e $\star$-scelta ζ'; inoltre, hanno tutti come parte standard λ, cioè l'integrale.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Indichiamo con λ la parte standard comune a tutti gli $\star$-reali $S(\mathbf{x},\zeta)$ corrispondenti a suddivisioni infinitesime $\mathbf{x}$ e $\star$-scelte ζ. Fissiamo un numero reale $\xi > 0$ e consideriamo lo $\star$-predicato $\star$-$X(v)$ che si ottiene sostituendo δ_ξ con v in (11.3), cioè poniamo:

$$\star\text{-}X(v) : \forall u\,(u\,\star\text{-suddivisione di}\,{}^\star[a,b]\,\text{e}\,{}^\star\delta(u) < v \Rightarrow \forall u_1\,(u_1\,\star\text{-scelta in}\,u \\ \Rightarrow |{}^\star\mathbf{s}(({}^\star f \circ u_1)\,{}^\star\Delta(u)) - \lambda| < \xi)\,\text{e}\,v\,\text{interna}.$$

Ora, per (ii), sussiste $\star$-$X(\xi)$ e quindi anche lo $\star$-enunciato $\exists v \in {}^\star\mathbb{R}^+\,\star$-$X(v)$. Allora, tramite PdT, sussiste pure il metaenunciato $\exists v \in \mathbb{R}^+\,X(v)$. Ne segue, dall'arbitrarietà di ξ, la tesi. $\square$

È classicamente noto che una funzione integrabile su $[a,b]$ è ivi limitata. Non riportiamo qui la dimostrazione nonstandard perchè analoga a quella classica. Notiamo, invece, che questo fatto assicura, per il Teorema 7.1.2(i), che ${}^\star f$ assume solo valori finiti e quindi, se $\mathbf{x}$ è infinitesimo, risulta infinitesimo l'addendo generico ${}^\star f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ della $\star$-sommatoria $S(\mathbf{x},\zeta)$. Ricordando la caratterizzazione infinitesimale 11.1.5(ii), possiamo allora concludere che *l'integrale di una funzione si ottiene come parte standard della somma di infiniti infinitesimi.* Viene così recuperata, correggendola, la concezione di Leibniz dell'integrale $\int_a^b y\,dx$ come somma di infiniti addendi: le aree di tutti i "rettangolini" $y \times dx$, di base infinitesima dx (inclusa in $[a,b]$) e altezza y.[5]

Com'è noto, viceversa, non ogni funzione limitata riesce integrabile. È interessante però, in proposito, segnalare il risultato seguente.

Teorema 11.1.6. *Se f è limitata nell'intervallo $[a,b]$, allora ogni sua $\star$-somma di Riemann è finita.*

Dimostrazione. Sia f limitata. Allora, per quanto appena visto, ${}^\star f(x)$ è uno $\star$-reale finito per ogni $x \in {}^\star[a,b]$. Sia ora $\omega > 0$ un arbitrario infinito. Allora, anche $\omega/(b-a)$ risulta un infinito positivo e quindi $|{}^\star f(x)| < \omega/(b-a)$ per ogni $x \in {}^\star[a,b]$. Siano infine $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a,b]$ in ν parti e ζ una $\star$-scelta in $\mathbf{x}$. Usando le proprietà di linearità, monotonia, triangolare, e telescopica della $\star$-sommatoria (Teorema 7.3.4[6]), otteniamo

$$\begin{aligned}|S(\mathbf{x},\zeta)| &= \left|\sum_{i=1}^{\nu} {}^\star f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{\nu} |{}^\star f(\zeta_i)|(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\omega}{b-a}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\omega}{b-a}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x_{i-1}) = \frac{\omega}{b-a}\,(b-a) = \omega.\end{aligned}$$

Riesce, cioè, $|S(\mathbf{x},\zeta)| < \omega$ per ogni $\omega > 0$. Conseguentemente, $S(\mathbf{x},\zeta)$ è finito. □

11.2 Criterio di Riemann infinitesimale

In questa sezione forniamo la versione infinitesimale della celebre caratterizzazione dell'integrabilità di funzioni *limitate*, data da Riemann tramite le nozioni di somma integrale inferiore e superiore. Precisamente, sia f una funzione limitata. Per ogni $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a,b]$ in ν parti, poniamo

$$e_i' = \inf\{{}^\star f(x) \mid x \in {}^\star[x_{i-1}, x_i]\}, e_i'' = \sup\{{}^\star f(x) \mid x \in {}^\star[x_{i-1}, x_i]\}\ (i = 1, \ldots, \nu)$$

e consideriamo le $\star$-somme di Riemann **inferiore** e **superiore**:

$$S'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} e_i'(x_i - x_{i-1}), \quad S''(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} e_i''(x_i - x_{i-1}).$$

[5]Ricordiamo, a proposito, che il simbolo $\int$ deriva dalla deformazione della lettera S esprimente di solito la sommatoria finita; simbolo che è stato introdotto proprio da Leibniz.

[6]Nel seguito, per evitare di citarlo ad ogni pié sospinto, ci limitiamo a richiamare solo le proprietà della $\star$-sommatoria coinvolte.

È bene sottolineare che le definizioni ora date sono consistenti. Dobbiamo provare innanzitutto che esistono gli estremi inferiore e superiore di ${}^\star f$ nell'intervallo $I = {}^\star[x_{i-1}, x_i] \subset {}^\star[a, b]$. Ora, per il Teorema 7.1.2, l'insieme ${}^\star f[I] \neq \emptyset$ è limitato in ${}^\star\mathbb{R}$ e, per il Teorema 2.5.2(iv), interno; dunque, per la $\star$-completezza di ${}^\star\mathbb{R}$, ammette entrambi gli estremi.

Passiamo ora a considerare la consistenza delle sommatorie $S'(\mathbf{x})$ e $S''(\mathbf{x})$. Le sequenze $\mathbf{e}' : e'_1, \ldots, e'_\nu$ e $\mathbf{e}'' : e''_1, \ldots, e''_\nu$ sono delle $\star$-sequenze. Infatti, $\mathbf{e}' = \{(u, v) \in [1, \nu] \times {}^\star\mathbb{R} \,|\, v = \inf {}^\star f[[x_{u-1}, x_u]]\}$ è un insieme interno perchè il predicato binario che lo definisce è, come facilmente si vede, formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno (Theorema 2.5.2(ii)). Osservato poi che il dominio $[1, \nu]$ di $\mathbf{e}'$, è $\star$-finito, possiamo concludere che $\mathbf{e}'$ è una $\star$-sequenza. Conseguentemente, per il Lemma 7.3.1, anche l'applicazione a valori $e'_1(x_1 - x_0), \ldots, e'_\nu(x_\nu - x_{\nu-1})$, di dominio $[1, \nu]$, è una $\star$-sequenza, in quanto prodotto delle due $\star$-sequenze $\mathbf{e}'$ e ${}^\star\Delta(\mathbf{x})$. Analogamente, si prova la consistenza della seconda sommatoria $S''(\mathbf{x})$.

Constatata la correttezza delle due definizioni, proviamo preliminarmente, un lemma che interviene nella dimostrazione della caratterizzazione nonstandard, oggetto della presente sezione. Ricordiamo che, data una suddivisione $\mathbf{x}$ dell'intervallo $[a, b]$, la suddivisione $\mathbf{x}'$ del medesimo intervallo **segue** (è **più fine** di $\mathbf{x}$) se ogni valore di $\mathbf{x}$ è anche un valore di $\mathbf{x}'$, cioè se $\pi^2_2(\mathbf{x}) \subset \pi^2_2(\mathbf{x}')$.

Lemma 11.2.1. *Sussistono le proposizioni:*

(i) $\star$-*(u, v suddivisioni di $[a, b]$, e v segue u) $\Leftrightarrow$ u, v $\star$-suddivisioni di ${}^\star[a, b]$ e v segue u;*

(ii) Siano $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a, b]$ in ν parti e $\mathbf{x}'$ una $\star$-suddivisione in ν' parti ad essa seguente. Allora $\nu \leq \nu'$ e ${}^\star\delta(\mathbf{x}') \leq {}^\star\delta(\mathbf{x})$;

(iii) Per ogni due $\star$-suddivisioni di ${}^\star[a, b]$, esiste una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a, b]$ seguente entrambe.

Dimostrazione. (i) La dimostrazione viene lasciata al lettore come utile esercizio di formalizzazione.

(ii) Anche se la dimostrazione nonstandard ricalca sostanzialmente quella classica, la riportiamo come un utile esempio di applicazione della dimostrazione per $\star$-induzione (Teorema 4.2.4(ii)).

Procediamo considerando, preliminarmente, i due passi seguenti.

1. Per ogni $i \in [0, \nu]$ e $j \in [0, \nu']$ risulta $x'_j < x_i \Rightarrow x'_{j+1} \leq x_i$. Infatti, sia $x'_j < x_i$. Poichè x_i è anche un valore assunto da $\mathbf{x}'$, esiste $h \in [0, \nu']$ tale che $x'_h = x_i$.

Allora $x'_j < x'_h$ e quindi $j < h$. Ne segue, essendo $\mathbf{x}'$ crescente, $j + 1 \leq h$ e quindi $x'_{j+1} \leq x'_h = x_i$, ancora per la crescenza di $\mathbf{x}'$.
2. Per ogni $i \in [0, \nu] \cap [0, \nu']$ risulta $x'_i \leq x_i$. È lecito procedere per $\star$-induzione sull'indice i, poichè la disuguaglianza $x'_i \leq x_i$ è formalizzabile in modo limitato nel linguaggio interno; basta per questo osservare che $x'_i \leq x_i$ significa $\mathbf{x}'(i) \leq \mathbf{x}(i)$ e che $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}$ e $\leq$ sono entità interne. Osservato che la disuguaglianza $x'_0 \leq x_0$ segue dalla $x'_0 = a = x_0$, assumiamo (ipotesi induttiva) $x'_i \leq x_i$ per $i \in [0, \nu-1] \cap [0, \nu'-1]$. Per la crescenza di $\mathbf{x}$ risulta allora $x'_i \leq x_i < x_{i+1}$ e quindi $x'_i < x_{i+1}$. Ne segue, per 1., $y_{i+1} \leq x_{i+1}$.

Proviamo ora la prima parte della tesi, cioè $\nu \leq \nu'$. Sia per assurdo $\nu' < \nu$. Allora $\nu' + 1 \in [0, \nu]$ e ha quindi senso $x_{\nu'+1}$. Poichè ogni x_i è anche un valore di $\mathbf{x}'$, esiste $j \in [0, \nu']$ tale che $x_{\nu'+1} = x'_j \leq x_j$, la disuguaglianza valendo per 2.. Essendo $\mathbf{x}$ crescente, otteniamo la contraddizione $\nu' + 1 \leq j \in [0, \nu']$.

Proviamo infine la seconda parte della tesi, cioè ${}^\star\delta(\mathbf{x}') \leq {}^\star\delta(\mathbf{x})$. Fissato $j \in [1, \nu']$, consideriamo l'insieme $I_j = \{i \in [0, \nu] \,|\, x_i \leq x'_{j-1}\}$. Risulta $I_j \neq \emptyset$, perchè $0 \in I_j$, e I_j interno, perchè "$x_i \leq x'_{j-1}$" si può formalizzare in modo limitato nel linguaggio interno (Teorema d'isolamento interno 2.2.2). Inoltre, $I_j \subset [0, \nu]$, con $[0, \nu]$ $\star$-finito. Allora, per il Teorema 4.6.2(i), I_j è $\star$-finito e quindi, essendo non vuoto, ammette, per il teorema 4.6.2(v), valore massimo h. Riesce allora $x_h \leq x'_{j-1} < x'_j \leq b$, cioè $x_h < b = x_\nu$ e quindi $h < \nu$. È lecito allora considerare x_{h+1}. Per il significato di h, risulta $x'_{j-1} < x_{h+1}$ e quindi, per 1., $x'_j \leq x_{h+1}$. Tenuto conto anche di $-x'_{j-1} \leq -x_h$, si ottiene $0 < x'_j - x'_{j-1} \leq x_{h+1} - x_h \leq {}^\star\delta(\mathbf{x})$, l'ultima disugugliaza valendo per il Lemma 11.1.4. A questo punto, tenuto conto di ${}^\star\delta(\mathbf{x}') = \max(x'_j - x'_{j-1})$ (ancora il Lemma 11.1.4) e di $x'_j - x'_{j-1} \leq {}^\star\delta(\mathbf{x})$ appena stabilita, valida per ogni $j \in [1, \nu']$, concludiamo che ${}^\star\delta(\mathbf{x}') \leq {}^\star\delta(\mathbf{x})$.

(iii) A differenza della dimostrazione precedente, procediamo via trasferimento dell'omonima proprietà relativa alle suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$, che ora ci accingiamo a provare. Date dunque due suddivisioni s, s' di $[a, b]$, consideriamo l'applicazione di $\mathbb{N}$ in $D = \pi_2^2(s) \cup \pi_2^2(s') \subset [a, b]$ così definita:

$$\begin{aligned} s''(0) &= a \\ s''(n+1) &= \begin{cases} \min(D \setminus \{s''(0), \ldots, s''(n)\}) & \text{se } D \setminus \{s''(0), \ldots, s''(n)\} \neq \emptyset \\ b & \text{altrimenti} \end{cases}. \end{aligned}$$

Posto $D_{n+1} = \min(D \setminus \{s''(0), \ldots, s''(n)\})$ $(n \geq 0)$, procediamo per passi.
3. $D_{n+1} \neq \emptyset \Rightarrow b \in D_{n+1}$. Infatti, sia per assurdo $D_{n+1} \neq \emptyset$ e $b \notin D_{n+1}$. Esiste allora $i \leq n$ tale che $s''(i) = b$. Ne segue $i > 0$ e $D_i \supset D_{n+1} \neq \emptyset$. Allora $b = s''(i) = \min D_i$, da cui otteniamo $D_i = \{b\}$ e quindi $D_{i+1} = \emptyset$. Risulta pertanto, tramite $i \leq n$, la contraddizione $\emptyset \neq D_{n+1} \subset D_{i+1} = \emptyset$.
4. $s''(i) \neq s''(i+1) \Rightarrow s''(i) < s''(i+1)$. Sia intanto $i = 0$. Allora $D_1 = D \setminus \{a\} \neq \emptyset$,

in quanto $b \in D$, e quindi $s''(i+1) = s''(1) = \min D_1$. Ne segue $s''(0) < s''(1)$ notato che $s''(1) \in D$.

Sia ora $i > 0$ e $s''(i) \neq s''(i+1)$. Allora $D_i \neq \emptyset$. Infatti, in caso contrario, risulterebbe $D_{i+1} \subset D_i = \emptyset$ e quindi la contraddizione $s''(i+1) = b = s''(i)$.

Dunque $D_i \neq \emptyset$ e quindi $s''(i) = \min D_i$ e, per 3., $b \in D_i$. Inoltre $D_{i+1} \neq \emptyset$. Infatti, in caso contrario si avrebbe $D_{i+1} = \emptyset$. Risulterebbe allora $D_i = \{b\}$ da cui $s''(i) = b$ e quindi la contraddizione $s''(i+1) = b = s''(i)$.

Poichè $D_{i+1} \neq \emptyset$, risulta $s''(i+1) = \min D_{i+1}$ da cui otteniamo $s''(i+1) \in D_{i+1}$ e $s''(i+1) \neq s''(i)$. Allora $s''(i+1) \in D_i \supset D_{i+1}$ e quindi, essendo $s''(i) = \min D_i$, la disuguaglianza $s''(i) < s''(i+1)$.
5. $s''(k) = b$ per qualche naturale k. Sia, per assurdo, $s''(k) \neq b$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora $D_k \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ne segue $s''(k) \neq s''(k+1)$ per ogni k e quindi s'' è un'applicazione iniettiva dei naturali in D, assurdo essendo D finito.
6. Posto:

$$h = \min k\,(s''(k) = b),$$

la restrizione $\bar{s} = s''|_{[0,h]}$ è una suddivisione di $[a,b]$ in h parti. Difatti si ha:
$-\bar{s}(0) = a$ e $\bar{s}(h) = b$.
$-\bar{s}(i) < \bar{s}(i+1)$ per ogni $i+1 \leq h$. Infatti, sia $i < i+1 \leq h$. Allora, $\bar{s}(i) \neq \bar{s}(i+1)$. Supposto il contrario, si avrebbe $D_i = \emptyset$ da cui $\bar{s}(i+1) = b$ e quindi $\bar{s}(i) = \bar{s}(i+1) = b$. Ne seguirebbe allora, per la definizione di h, la contraddizione $h \leq i < h$. Dunque $\bar{s}(i) \neq \bar{s}(i+1)$ da cui, per 4., $\bar{s}(i) < \bar{s}(i+1)$.
7. $\pi_2^2(s), \pi_2^2(s') \subset \pi_2^2(\bar{s})$, cioè $\bar{s}$ segue s e s'. Infatti, sia, per assurdo, $x_j \in \pi_2^2(s') \setminus \pi_2^2(\bar{s})$. Allora $x_j \in D$ e $x_j \notin \pi_2^2(\bar{s})$. Ne segue $D_{h+1} \neq \emptyset$ da cui otteniamo $s''(h+1) = \min D_{h+1}$ e quindi $s''(h) \neq s''(h+1)$. Allora, per 4., otteniamo la contraddizione $b = s''(h) < s''(h+1)$.

Passiamo ora alla dimostrazione di (iii). Considerata la semiformalizzazione del risultato appena provato:

$$\forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}\,(u_1, u_2 \,\text{suddivisioni di}\, [a,b] \Rightarrow \exists u \in \mathcal{D}\,(u\,\text{suddivisione di } [a,b] \\ \text{seguente sia } u_1 \text{ che } u_2)),$$

otteniamo, tramite (i) e la tecnica degli $\star$-concetti, la proposizione in oggetto. □

Teorema 11.2.2. (Criterio di Riemann infinitesimale) *Sia f una funzione limitata nell'intervallo $[a,b]$. Allora, sono equivalenti le proposizioni:*

(i) f è integrabile;

(ii) Risulta, per ogni $\star$-suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a,b]$ in ν parti,

$$S''(\mathbf{x}) - S'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\nu} (e''_i - e'_i)(x_i - x_{i-1}) \approx 0.$$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che l'uguaglianza in (ii) sussiste per la proprietà di linearità (della $\star$-sommatoria).

(i) $\Rightarrow$ (ii). La dimostrazione si articola in due passi.

1. Sia $\mathbf{x}$ una $\star$-sequenza di dominio I e imagine costituita da insiemi non vuoti. Esiste allora una $\star$-sequenza $\mathbf{x}'$ di dominio I tale che $\mathbf{x}'_i \in \mathbf{x}_i$ per ogni $i \in I$. Infatti, per i Teoremi 2.1.1(i) e 4.6.2(vii), l'imagine di $\mathbf{x}$ è un insieme $\star$-finito di elementi non vuoti e quindi, per il Teorema 4.6.2(viii), esiste un'applicazione di scelta interna g tale che $g(\mathbf{x}_i) \in \mathbf{x}_i$ per ogni $i \in I$. Allora, l'applicazione composta $\mathbf{x}' = g \circ \mathbf{x}$ è, per il Lemma 7.3.2(i), una $\star$-sequenza di dominio I tale che $\mathbf{x}'_i \in \mathbf{x}_i$.

2. Sia $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a,b]$ in ν parti e $\alpha > 0$ $\star$-reale. Esistono allora ζ', ζ'' $\star$-scelte in $\mathbf{x}$ tali che

$$S(\mathbf{x}, \zeta') - \alpha < S'(\mathbf{x}) \leq S''(\mathbf{x}) < S(\mathbf{x}, \zeta'') + \alpha. \tag{11.4}$$

Infatti, dato $\alpha_1 > 0$ $\star$-reale, consideriamo l'insieme

$$J_i = \{x \in [x_{i-1}, x_i] \,|\, {}^\star f(x) < e_i + \alpha_1\}, \quad (i = 1, \dots, \nu)$$

che è interno, come si vede facilmente ricorrendo al Teorema d'isolamento interno 2.2.2 e ricordando che, per il Lemma 4.2.3(ii), gli intervalli di ${}^\star\mathbb{N}$ sono interni. Viene così definita un'applicazione σ di dominio $[1,\nu]$ a valori $J_1, \dots, L_\nu$ che risulta, per il Teorema 2.5.2(ii), interna.[7] Per 1., esiste allora una $\star$-sequenza ζ', di dominio $[1,\nu]$, tale che $\zeta'_i \in \sigma_i = J_i$ e quindi ${}^\star f(\zeta'_i) < e'_i + \alpha_1$.

In modo analogo si prova che esiste una $\star$-sequenza ζ'' tale che $e''_i < {}^\star f(\zeta'_i) + \alpha_1$, per ogni $i = 1, \dots, \nu$.

Dunque, per ogni $i = 1, \dots, \nu$, risulta:

$${}^\star f(\zeta'_i) - \alpha_1 < e'_i \leq e''_i < {}^\star f(\zeta''_i) + \alpha_1.$$

Usando la proprietà di monotonia della $\star$-sommatoria, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{\nu} ({}^\star f(\zeta'_i) - \alpha_1)(x_i - x_{i-1}) < S'(\mathbf{x}) \leq S''(\mathbf{x}) < \sum_{i=1}^{\nu} ({}^\star f(\zeta''_i) + \alpha_1)(x_i - x_{i-1})$$

---

[7] Basta osservare che $\sigma = \{(u_1, u_2) \in [1,\nu] \times {}^\star\mathbb{P}([a,b]) \,|\, u_2 = J_{u_1}\}$ e che

$$u_2 = J_{u_1} \Leftrightarrow \forall v \, (v \in u_2 \Leftrightarrow v \in [\mathbf{x}(u_1 - 1), \mathbf{x}(u_1)] \, \mathrm{e} \, {}^\star f(v) < \inf {}^\star f[[\mathbf{x}(u_1 - 1), \mathbf{x}(u_1)]] + \alpha_1),$$

ove il secondo membro è, con un po' di pazienza, formalizzabile nel linguaggio interno tramite un predicato binario limitato.

da cui, tramite la proprietà di linearità, si ha

$$\sum_{i=1}^{\nu} {}^\star f(\zeta_i')(x_i - x_{i-1}) - \alpha_1 \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x_{i-1}) < S'(\mathbf{x}) \le S''(\mathbf{x})$$
$$< \sum_{i=1}^{\nu} {}^\star f(\zeta_i'')(x_i - x_{i-1}) + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x_{i-1})$$

e quindi, per la proprietà telescopica,

$$S(\mathbf{x}, \zeta') - \alpha_1(b-a) < S'(\mathbf{x}) \le S''(\mathbf{x}) < S(\mathbf{x}, \zeta'') + \alpha_1(b-a).$$

Scelto infine $\alpha_1 = \alpha/(b-a)$ si ottiene (11.4).

Siamo finalmente in grado di provare (ii). Infatti, per ogni $\alpha > 0$ $\star$-reale, per (11.4) e la proprietà di positività, si ha

$$0 \le S''(\mathbf{x}) - S'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}(e_i'' - e_i')(x_i - x_{i-1}) < S(\mathbf{x}, \zeta'') - S(\mathbf{x}, \zeta') + 2\alpha.$$

Posto allora $\alpha' = S(\mathbf{x}, \zeta'') - S(\mathbf{x}, \zeta')$, si ha

$$0 \le \sum_{i=1}^{\nu}(e_i'' - e_i')(x_i - x_{i-1}) < \alpha' + 2\alpha.$$

Sia infine $\mathbf{x}$ una suddivisione infinitesima. Poichè, per ipotesi, f è integrabile, riesce α' infinitesimo e quindi lo è pure $\alpha' + 2\alpha$, per ogni α infinitesimo positivo.

(ii)$\Rightarrow$(i). Essendo la dimostrazione piuttosto complessa, è utile premettere una descrizione dei passi più significativi a grandi linee. Al primo passo, proviamo che le $\star$-somme di Riemann relative ad una medesima $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a, b]$ sono finite e appartengono tutte ad uno stesso intervallo di ${}^\star\mathbb{R}$. Al secondo, mostriamo che al medesimo intervallo appartengono anche le $\star$-somme di Riemann relative ad ogni $\star$-suddivisione $\mathbf{x}'$ seguente $\mathbf{x}$. Constatiamo quindi, nel terzo, che le $\star$-somme medesime sono, infinitamente prossime, se $\mathbf{x}$ è infinitesima. Infine, sfruttando quest'ultimo passo, arriviamo agevolmente alla proposizione (i).

3. Sia $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a, b]$ in ν parti e ζ una $\star$-scelta in $\mathbf{x}$. Allora, per il Teorema 11.1.6, è finita la $\star$-somma di Riemann $S(\mathbf{x}, \zeta)$. Risulta inoltre

$$S'(\mathbf{x}) \le S(\mathbf{x}, \zeta) \le S''(\mathbf{x}).$$

Infatti, dalla $e_i' \le {}^\star f(x_i) \le e_i''$ otteniamo $e_i'(x_i - x_{i-1}) \le {}^\star f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \le e_i''(x_i - x_{i-1})$, qualunque sia $i = 1, \dots, \nu$. Ne segue, tramite la proprietà di

monotonia della $\star$-sommatoria, quanto dichiarato.
4. Siano $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a,b]$ in ν parti, $\mathbf{x}'$ una $\star$-suddivisione seguente $\mathbf{x}$ e ζ' una $\star$-scelta in $\mathbf{x}'$. Allora

$$S'(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}',\zeta') \leq S''(\mathbf{x}).$$

Infatti, sia $[0,\nu']$ il dominio di $\mathbf{x}'$. Poichè $\mathbf{x}'$ segue $\mathbf{x}$, esiste, per ogni $i \in [0,\nu]$, un unico $t(i) \in [0,\nu']$ ($\mathbf{x}'$ è crescente) tale che $x'_{t(i)} = x_i$. Resta così definita un'applicazione t di $[0,\nu]$ in $[0,\nu']$, crescente, tale che $x'_{t(i)} = x_i$, e interna in quanto $t = \{(u,v) \in [0,\nu] \times [0,\nu'] \,|\, x'_v = x_u\}$(Teorema 2.5.2(ii)); risulta inoltre $t(0) = 0$ e $t(\nu) = \nu'$. Trattasi quindi di una $\star$.-sequenza.

Ciò premesso, sia ora $i \in [1,\nu]$. Tenuto ancora conto della crescenza di $\mathbf{x}'$, risulta che, per ogni $t_{i-1} < h \leq t_i$, si ha $x_{i-1} \leq x'_{h-1} < x'_h \leq x_i$ e quindi $[x'_{h-1}, x'_h] \subset [x_{i-1}, x_i]$. Sia $\zeta'_h \in [x'_{h-1}, x'_h]$. Allora, $\zeta'_h \in [x_{h-1}, x_h]$ da cui otteniamo $e'_i \leq {}^\star f(\zeta'_h) \leq e''_i$ e quindi, per la proprietà di monotonia della $\star$-sommatoria,

$$\sum_{h=t_{i-1}+1}^{t_i} e'_i(x'_h - x'_{h-1}) \leq \sum_{h=t_{i-1}+1}^{t_i} {}^\star f(\zeta'_h)(x'_h - x'_{h-1}) \leq \sum_{h=t_{i-1}+1}^{t_i} e''_i(x'_h - x'_{h-1}).$$

Ne segue, per le proprietà di linearità e telescopica,

$$e'_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{h=t_{i-1}+1}^{t_i} {}^\star f(\zeta'_h)(x'_h - x'_{h-1}) \leq e''_i(x_i - x_{i-1}),$$

e quindi, per la proprietà associativa,

$$\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{h=t_{i-1}+1}^{t_i} {}^\star f(\zeta'_h)(x'_h - x'_{h-1}) = \sum_{j=1}^{\nu'} {}^\star f(\zeta'_j)(x'_j - x'_{j-1}) = S(\mathbf{x}',\zeta').$$

Ne segue, per la proprieta di monotonia, quanto dichiarato.
5. Siano $\mathbf{x}$ una suddivisione infinitesima di ${}^\star[a,b]$ in ν parti, ζ una $\star$-scelta in $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ una $\star$-suddivisione seguente $\mathbf{x}$ e ζ' una $\star$-scelta in $\mathbf{x}'$. Allora, le $\star$-somme di Riemann $S(\mathbf{x},\zeta)$, $S(\mathbf{x}',\zeta')$ sono infinitamente prossime. Infatti, per 3. e 4., $S(\mathbf{x},\zeta)$ e $S(\mathbf{x}',\zeta')$ sono entrambe comprese tra gli $\star$-reali $S'(\mathbf{x})$ e $S''(\mathbf{x})$. È sufficiente allora provare che questi due numeri sono infinitamente prossimi. Usando il Lemma 7.3.1 e la proprietà commutativa, otteniamo

$$S''(\mathbf{x}) - S'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}(e''_i(x_i - x_{i-1}) - e'_i(x_i - x_{i-1})) = \sum_{i=1}^{\nu}(e''_i - e'_i)(x_i - x_{i-1}),$$

ove l'ultima $\star$-sommatoria è infinitesima per ipotesi.

A questo punto, proviamo infine che tutte le $\star$-sommatorie di Riemann, relative a suddivisioni infinitesime, sono tra loro infinitamente prossime, cioè che f è integrabile. Siano dunque $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ due suddivisioni infinitesime e $\mathbf{x}''$ una $\star$-suddivisione seguente entrambe, esistente per il Lemma 11.2.1(iii). Qualunque siano le $\star$-scelte ζ, ζ' e ζ'' in $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$, rispettivamente, per 5., risulta $S(\mathbf{x}, \zeta) \approx S(\mathbf{x}'', \zeta'') \approx S(\mathbf{x}', \zeta')$. Ne segue (i), essendo, per il Teorema 11.1.6, ogni $\star$-somma di Riemann finita. □

11.3 Esempi di funzioni integrabili

Iniziamo col provare l'integrabilità delle funzioni continue e di quelle monotone e limitate definite in un intervallo chiuso.

Teorema 11.3.1. *Sia f definita nell'intervallo $[a, b]$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) Se f è continua, allora è integrabile;

(ii) Se f è monotona e limitata, allora è integrabile.

Dimostrazione. (i) Ricorriamo al Criterio di Riemann infinitesimale 11.2.2 che può essere applicato in quanto, per il Teorema di Weierstrass 8.1.7, f è limitata, essendo definita in un intervallo chiuso e limitato.

A tal fine, sia $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione infinitesima di ${}^\star[a, b]$ in ν parti e $\epsilon > 0$ la sua ampiezza. Allora, dalla continuità in f in $[a, b]$ (insieme chiuso e limitato e quindi, per il Teorema di Heine-Pincherle-Borel 6.4.1, compatto), otteniamo, tramite il Teorema di Heine-Cantor 8.2.2, che f è uniformemente continua in $[a, b]$. Conseguentemente, per il Teorema 8.2.1, ${}^\star f(x') \approx {}^\star f(x'')$ per ogni $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$.

Ora, la successione $e_1'' - e_1', \dots, e_\nu'' - e_\nu'$ è una $\star$-sequenza, perchè differenza di due $\star$-sequenze (Lemma 7.3.1) e quindi, per il Teorema 4.6.2(v),(vi), esiste $k = \max\limits_{1 \le i \le \nu} (e_i'' - e_i')$. Ne segue, per le proprietà di linearità, monotonia e telescopica,

$$\sum_{i=1}^{\nu} (e_i'' - e_i')(x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{\nu} k\,(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{\nu} (x_i - x_{i-1}) = k(b - a).$$

A questo punto la tesi sarà raggiunta se k è infinitesimo. Per definizione di k, esiste $h \in [1, \nu]$ tale che $k = e_h'' - e_h'$. Considerati gli $\star$-reali $e_h' + \epsilon$, e $e_h'' - \epsilon$, esistono, per la definizione di estremo inferiore e superiore, $y_h', y_h'' \in [x_{h-1}, x_h]$ tali che $e'_h \leq {}^\star f(y'_h) < e'_h + \epsilon$ e $e''_h - \epsilon < {}^\star f(y''_h) \leq e''_h$. Risulta allora $0 \leq {}^\star f(y'_h) - e'_h < \epsilon$, $0 \leq e''_h - {}^\star f(y''_h) < \epsilon$, $|{}^\star f(y''_h) - {}^\star f(y'_h)| \leq \epsilon$ e quindi

$$\begin{aligned} 0 \leq k &= (e''_h - {}^\star f(y''_h)) + ({}^\star f(y''_h) - {}^\star f(y'_h)) + ({}^\star f(y'_h) - e'_h) \\ &\leq (e''_h - {}^\star f(y''_h)) + |{}^\star f(y''_h) - {}^\star f(y'_h)| + ({}^\star f(y'_h) - e'_h) < 3\,\epsilon. \end{aligned}$$

(ii) Utilizziamo ancora il Criterio di Riemann infinitesimale e quindi facciamo riferimento alla $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ introdotta prima. Supponiamo, per fissare le idee, f non decrescente. Allora, per il Teorema 7.1.2(ii), ${}^\star f$ è non decrescente in ${}^\star[a,b]$ e quindi $e'_i = {}^\star f(x_{i-1})$ e $e''_i = {}^\star f(x_i)$ $(i = 1, \dots, \nu)$. Ricordando il significato di ${}^\star\delta(\mathbf{x})$ e usando le proprietà di linearità, monotonia e telescopica, otteniamo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\nu}(e''_i - e'_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{\nu}(e''_i - e'_i)\,{}^\star\delta(\mathbf{x}) = {}^\star\delta(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{\nu}({}^\star f(x_i) - {}^\star f(x_{i-1})) \\ &= {}^\star\delta(\mathbf{x})\,({}^\star f(x_\nu) - {}^\star f(x_{\nu-1})) = {}^\star\delta(\mathbf{x})\,({}^\star f(b) - {}^\star f(a)) = {}^\star\delta(\mathbf{x})\,(f(b) - f(a)). \end{aligned}$$

Osservato infine che ${}^\star\delta(\mathbf{x})$ è infinitesimo e che $f(b) - f(a)$ reale (quindi finito), risulta ${}^\star\delta(\mathbf{x})\,(f(b) - f(a))$ infinitesimo. □

Proviamo ora che, se la funzione è integrabile, allora lo è anche il suo valore assoluto e la sua restrizione su un qualsiasi sottointervallo chiuso.

Teorema 11.3.2. *Sia f integrabile su $[a,b]$. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) La funzione $|f|$ è integrabile;

(ii) La funzione f è integrabile su ogni sottointervallo chiuso di $[a,b]$.

Dimostrazione. (i) La funzione f è limitata, in quanto integrabile, e quindi lo è pure il suo valore assoluto. Possiamo pertanto utilizzare il Criterio di Riemann infinitesimale per entrambe le funzioni. Sia allora $\mathbf{x}$ una suddivisione infinitesima di ${}^\star[a,b]$ in ν parti. Per ogni $i \in [1,\nu]$, indichiamo, rispettivamente, con $\bar{e}'_i, \bar{e}''_i$ gli estremi inferiore e superiore di ${}^\star|f| = |{}^\star f|$ (Teorema 7.1.1(iv)). Allora $\bar{e}''_i - \bar{e}'_i \leq e''_i - e'_i$ $(i = 1, \dots, \nu)$ [8] e quindi, per le proprietà di positività e monotonia della

[8] Infatti, sia $b > 0$ uno $\star$-reale arbitrario. Esistono allora $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$ tali che $e'_i \leq {}^\star f(x') < e'_i + b$ e $e''_i \geq {}^\star f(x'') > e''_i - b$. Ne segue ${}^\star f(x'') - {}^\star f(x') > (e''_i - b) - (e'_i + b) = (e''_i - e'_i) - 2b$ e quindi $(e''_i - e'_i) - 2b < {}^\star f(x'') - {}^\star f(x') \leq |{}^\star f(x'') - {}^\star f(x')| \leq e''_i - e'_i$. Allora, per l'arbitrarietà di b, risulta $e''_i - e'_i = \sup\{|{}^\star f(x'') - {}^\star f(x')|\, x', x'' \in [x_{i-1}.x_i]\}$ da cui, tramite (5.2), $|{}^\star|f|(x'') - {}^\star|f|(x')| = ||{}^\star f(x'')| - |{}^\star f(x')|| \leq |{}^\star f(x'') - {}^\star f(x')| \leq e''_i - e'_i$ per ogni $x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]$. Ora, in modo analogo, si prova $\bar{e}''_i - \bar{e}'_i = \sup\{|{}^\star|f|(x'') - {}^\star|f|(x')|\,|\, x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e quindi $\bar{e}''_i - \bar{e}'_i \leq e''_i - e'_i$.

$\star$-sommatoria,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{e}''_i - \bar{e}'_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{\nu} (e''_i - e'_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Ora, essendo f integrabile, per la condizione necessaria del Criterio di Riemann infinitesimale, la seconda $\star$-sommatoria è infinitesima e quindi lo è anche la prima. Per la condizione sufficiente del medesimo criterio, è allora integrabile anche $|f|$.

(ii) Sia $\emptyset \neq [a_1, b_1] \subset [a, b]$. Essendo f limitata in $[a, b]$ in quanto integrabile, risulta limitata in $[a_1, b_2]$ anche la sua restrizione $f|_{[a_1,b_1]}$. A quest'ultima è pertanto applicabile il solito Criterio di Riemann infinitesimale. Sia a tal fine, $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione infinitesima di ${}^\star[a_1, b_1]$ in ν parti. Fissato ω $\star$-naturale infinito, consideriamo le sequenze $\mathbf{y}, \mathbf{y}'$ e $\mathbf{y}''$ così definite:

$$\begin{aligned} y_i &= a + i\,\frac{a_1 - a}{\omega} && (i = 0, \ldots, \omega) \\ y'_j &= x_{j-\omega} && (j = \omega, \ldots, \omega + \nu) \\ y''_h &= b_1 + (h - \omega - \nu)\,\frac{b - b_1}{\omega} && (h = \omega + \nu, \ldots, 2\omega + \nu) \end{aligned}$$

e poniamo $\mathbf{z} = \mathbf{y} \cup \mathbf{y}' \cup \mathbf{y}''$. Allora, $\mathbf{z}$ è un'applicazione interna, in quanto unione di entità interne (Teorema 2.2.3(vii)), di dominio $[0, 2\omega + \nu]$ e codominio ${}^\star[a, b]$. Dunque $\mathbf{z}$ è una $\star$-sequenza, per giunta crescente, in quanto le tre $\star$-sequenze che la compongono sono crescenti e si raccordano (infatti, $y_\omega = a_1 = x_0 = y'_\omega$ e $y'_{\omega+\nu} = x_\nu = b_1 = y''_{\omega+\nu}$). Riesce inoltre $z_0 = y_0 = a$, $z_{2\omega+\nu} = y''_{2\omega+\nu} = b$ e quindi $\mathbf{z}$ è una $\star$-suddivisione di ${}^\star[a, b]$ in $2\omega + \nu$ parti. Risulta anche che la sua ampiezza ${}^\star\delta(\mathbf{z}) = \max\{{}^\star\delta(\mathbf{y}), {}^\star\delta(\mathbf{y}'), {}^\star\delta(\mathbf{y}'')\}$ è infinitesima, perchè ${}^\star\delta(\mathbf{y}) = (a_1 - a)/\omega$, ${}^\star\delta(\mathbf{y}') = (b - b_1)/\omega$ e ${}^\star\delta(\mathbf{y}'') = {}^\star\delta(\mathbf{x})$, che è infinitesima.

In conclusione, $\mathbf{z}$ è una $\star$-suddivisione infinitesima di ${}^\star[a, b]$. Poichè f è integrabile, applicando il Criterio di Riemann infinitesimale, (condizione necessaria), si ottiene che riesce infinitesima la $\star$-sommatoria $\sum_{t=1}^{2\omega+\nu} (\bar{e}''_t - \bar{e}'_t)(z_t - z_{t-1})$, ove $\bar{e}'_t, \bar{e}''_t$ sono gli estremi inferiore e superiore di ${}^\star f$ in $[z_{t-1}, z_t]$, rispettivamente. Tramite le proprietà associativa e di positività della $\star$-sommatoria risulta

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{j=\omega+1}^{\omega+\nu} (\bar{e}''_j - \bar{e}'_j)(y'_j - y'_{j-1}) &\leq \sum_{i=1}^{\omega} (\bar{e}''_i - \bar{e}'_i)\,(y_i - y_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{j=\omega+1}^{\omega+\nu} (\bar{e}''_j - \bar{e}'_j)(y'_j - y'_{j-1}) + \sum_{h=\omega+\nu+1}^{2\omega+\nu} (\bar{e}''_h - \bar{e}'_h)(y''_h - y''_{h-1}) \\ &= \sum_{t=1}^{2\omega+\nu} (\bar{e}''_t - \bar{e}'_t)(z_t - z_{t-1}) \approx 0. \end{aligned}$$

Allora, per la proprietà di traslazione degli indici, si ha

$$
\begin{aligned}
0 \approx \sum_{j=\omega+1}^{\omega+\nu} (\bar{e}''_j - \bar{e}'_j)(y'_j - y'_{j-1}) &= \sum_{i=1}^{\nu} (\bar{e}''_{\omega+i} - \bar{e}'_{\omega+i})\,(y'_{\omega+i} - y'_{\omega+i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu} (e''_i - e'_i)\,(x_i - x_{i-1}),
\end{aligned}
$$

l'ultima uguaglianza valendo per la definizione di $\mathbf{y}'$. Ne segue, data l'arbitrarietà della $\star$-suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$ in $[a_1, b_1]$, che la restrizione $f_{[a_1,b_1]}$ è, per la condizione sufficiente del Criterio di Riemann infinitesimale, integrabile. □

Il prossimo risultato, che completa, in un certo senso, la proposizione (ii) del teorema precedente, assicura che una funzione integrabile su due intervalli chiusi consecutivi è pure integrabile sulla loro unione. Conseguentemente, dato un numero *finito* di intervalli chiusi consecutivi, se la funzione è integrabile su ognuno di tali intervalli, allora è pure integrabile sulla loro unione.

Teorema 11.3.3. (di estensione dell'integrabilità) *Sia f di dominio $[a, b]$ e integrabile su $[a, c]$ e $[c, b]$ $(a < c < b)$. Allora f è integrabile su $[a, b]$.*

Dimostrazione. Osserviamo, innanzitutto, che la funzione f è limitata in $[a, b]$, in quanto limitata in entrambi i sottointervalli essendo ivi integrabile. È pertanto applicabile il Criterio di Riemann infinitesimale.

Consideriamo, dunque, una $\star$-suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$ di ${}^\star[a, b]$ in ν parti. Poichè $c \in {}^\star[a, b]$, esiste $h \in [1, \nu]$ tale che $c \in [x_{h-1}, x_h]$.[9] In relazione a tale h consideriamo allora le $\star$-sequenze $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ così definite:

$$
y_i = \begin{cases} x_i & \text{se } 0 \le i \le h-1 \\ c & \text{se } i = h \end{cases}, \quad z_i = \begin{cases} c & \text{se } i = 0 \\ x_{h+i-1} & \text{se } 1 \le i \le \nu - h + 1 \end{cases}
$$

e indichiamo con e'_i, e''_i gli estremi inferiori e superiori di ${}^\star f$ in $[y_{i-1}, y_i]$ e con $\bar{e}'_i, \bar{e}''_i$ gli omonimi estremi di ${}^\star f$ in $[z_{i-1}, z_i]$. Risulta allora, per la proprietà associativa

[9] Lo si prova, dopo una opportuna semiformalizzazione, ricorrendo alla tecnica degli $\star$-concetti e a PdT, tenendo presente che nell'ambiente standard sussiste la proposizione: Per ogni $c \in [a, b]$ e per ogni suddivisione di $[a, b]$ in n parti, esiste $h \in [1, n]$ tale che $c \in [x_{h-1}, x_h]$.

della $\star$-sommatoria,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\nu}(e_i''-e_i')(x_i-x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{h-1}(e_i''-e_i')\,(x_i-x_{i-1})+(e_h''-e_h')\,(x_h-x_{h-1}) \\
&\qquad + \sum_{i=h+1}^{\nu}(e_i''-e_i')(x_i-x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{h}(\bar e_i''-\bar e_i')(y_i-y_{i-1})-(\bar e_h''-\bar e_h')\,(c-x_{h-1}) \\
&\qquad +(e_h''-e_h')(x_h-x_{h-1})-(\bar e_1''-\bar e_h')\,(x_h-c) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{\nu-h+1}(\bar e_i''-\bar e_i')(z_i-z_{i-1}).
\end{aligned}$$

Poichè si verifica facilmente che $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ sono due $\star$-suddivisioni infinitesime di ${}^\star[a,c]$ e ${}^\star[c,b]$, rispettivamente [10], e, poichè f è integrabile su $[a,c]$ e $[c,b]$, le due $\star$-sommatorie dell'ultimo membro scritto sono infinitesime in forza del criterio di Riemann infinitesimale (condizione necessaria). Sono inoltre infinitesimi anche gli altri tre addendi perchè prodotto di un numero finito per un infinitesimo. È infatti infinitesimo, in forza dell'ipotesi su $\mathbf{x}$, l'ampiezza degli intervalli, mentre è finita la differenza degli estremi, perchè ${}^\star f$ è limitata in ${}^\star[a,b]$ (Teorema 7.1.2(i)), e quindi tale differenza è inferiore a $\sup{}^\star f-\inf{}^\star f$.

Dunque, riesce infinitesima la $\star$-sommatoria $\sum_{i=1}^{\nu}(e_i''-e_i')(x_i-x_{i-1})$ qualunque sia la $\star$-suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$ scelta. Conseguentemente, dalla caratterizzazione di Riemann infinitesimale (condizione sufficiente), si ha la tesi. □

Il prossimo risultato riguarda l'integrabilità delle funzioni che sono uguali, a meno di un numero *finito* di punti, a una funzione integrabile.

Teorema 11.3.4. *Siano f integrabile su $[a,b]$ e g una funzione definita su $[a,b]$ che differisce da f in un numero finito di punti. Allora g è integrabile su $[a,b]$.*

Dimostrazione. Basta evidentemente limitarsi a dimostrare il teorema per una funzione g che differisce da f in un solo punto x_0 e poi procedere per induzione.

[10] La parte più impegnativa riguarda la prova dell'internalità delle due applicazioni che si può raggiungere, tramite il Teorema 2.5.2(ii) (dopo una opportuna formalizzazione limitata nel linguaggio interno), notato che $\mathbf{y}=\{(u,v)\in[0,h]\times{}^\star[a,b]\,|\,(u<h\Rightarrow v=\mathbf{x}(u)\,\mathrm{e}\,(u=h\Rightarrow v=c)\}$ e $\mathbf{z}=\{(u,v)\in[0,\nu]\times{}^\star[a,b]\,|\,(u=0\Rightarrow v=c)\,\mathrm{e}\,(0<u\le\nu\Rightarrow v=\mathbf{x}(h+u-1)\}$.

Poichè f è limitata, in quanto integrabile, tale risulta evidentemente anche g e possiamo quindi applicare a quest'ultima il Criterio di Riemann infinitesimale. Sia dunque $\mathbf{x}$ una $\star$-suddivisione infinitesimale di ${}^\star[a,b]$ in ν parti e sia $h \in [1,\nu]$, certamente esistente, tale che $x_0 \in [x_{h-1}, x_h]$. In forza dell'ipotesi, gli estremi di ${}^\star g$ e di ${}^\star f$ sono i medesimi in ogni intervallo di $\mathbf{x}$, fatta eccezione per $[x_{h-1}, x_h]$; in questo intervallo manteniamo i simboli e'_h, e''_h per designare gli estremi di ${}^\star f$ e indichiamo con $\bar{e}'_h, \bar{e}''_h$ quelli di ${}^\star g$. Considerando la $\star$-sommatoria del Criterio di Riemann infinitesimale relativa a ${}^\star g$, otteniamo, usando le proprietà commutativa e associativa della $\star$-sommatoria,

$$\sum_{i=1}^{h-1}(e''_i - e'_i)(x_i - x_{i-1}) + (\bar{e}''_i - \bar{e}'_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=h+1}^{\nu}(e''_i - e'_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \sum_{i=1}^{\nu}(e''_i - e'_i)\,(x_i - x_{i-1}) + (\bar{e}''_h - \bar{e}'_h - e''_h + e'_h)\,(x_h - x_{h-1}).$$

L'ultima sommatoria è infinitesima, perchè è la $\star$-sommatoria di Riemann di f che è integrabile, ed è infinitesimo anche l'altro addendo, essendo prodotto di un numero finito per un infinitesimo. Ne segue la tesi. □

Grazie a questo teorema, si può evidentemente affermare che sono integrabili tutte le funzioni che sono continue a meno di un numero finito di punti di discontinuità eliminabile.[11] Usando ancora questo risultato ed il Teorema di estensione dell'integrabilità 11.3.3, otteniamo che sono integrabili anche le funzioni che presentano un numero finito di discontinuità di 1ª specie. In questo caso, l'intervallo $[a,b]$ viene infatti suddiviso in un numero finito di intervalli di continuità per la funzione in esame. Supponiamo intanto in due e sia c il punto di discontinuità. Indicata con g la funzione, la sua restrizione $g_{[a,c]}$ o è continua in $[a,c]$, oppure è continua in $[a,c[$ e c è un punto di discontinuità eliminabile. Allora $g_{[a,c]}$ è integrabile su $[a,c]$. Analogamente si vede che $g_{[c,b]}$ è integrabile su $[c,b]$. Per il Teorema di estensione dell'integrabilità, g è integrabile su $[a,b]$. Per $n > 2$ la tesi si consegue per induzione.

[11] Ricordiamo che un punto x_0 si dice di *discontinuità eliminabile* per la funzione g se esiste finito il limite $\lambda = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ed è $\lambda \neq g(x_0)$, oppure g non definita in x_0. La discontinuità si elimina introducendo, a partire da g, una funzione f tale che $f(x) = g(x)$ per $x \neq x_0$ e $f(x_0) = \lambda$. Si dice invece che x_0 è un punto di *discontinuità di* 1ª *specie* per g quando esistono finiti i limiti destro e sinistro di g in x_0, ma non sono uguali.

11.4 Proprietà algebriche dell'integrale

In questo paragrafo forniamo le dimostrazioni nonstandard delle usuali proprietà algebriche dell'integrale di Riemann. Premettiamo un risultato che fornisce una comoda procedura per il calcolo degli integrali, e quindi di fondamentale importanza pratica, ma anche teorica.

Lemma 11.4.1. *Sia f integrabile in $[a,b]$. Scelto un arbitrario numero $\star$-naturale infinito ω e considerata la $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$:*

$$x_i = a + i\,\frac{b-a}{\omega} \quad (i = 0, \dots, \omega)$$

ad esso associata, risulta

$$\int_a^b f(x)dx = \operatorname{st}\left(\frac{b-a}{\omega}\sum_{i=1}^{\omega}{}^\star f(x_i)\right).$$

Dimostrazione. Iniziamo col provare che la sommatoria ha senso, cioè che l'applicazione a valori ${}^\star f(x_1), \dots {}^\star f(x_\omega)$ è una $\star$-sequenza. A tal fine, per il Lemma 7.3.2(i), è sufficiente notare che l'applicazione a valori $x_1, \dots, x_\omega$ è, per il Lemma 8.1.3, una $\star$-sequenza. Osserviamo inoltre, come banalmente si vede, che la $\mathbf{x}|_{[1,\omega]}$ è anche una $\star$-scelta in $\mathbf{x}$ e quindi che $\sum_{i=1}^{\omega} {}^\star f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ è una $\star$-somma di Riemann. Ora, poichè $\mathbf{x}$ è infinitesima $x_i - x_{i-1} = (b-a)/\omega$ e f integrabile, per il Teorema 11.1.5, risulta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{\omega}{}^\star f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\omega}{}^\star f(x_i)\,\frac{b-a}{\omega} = \frac{b-a}{\omega}\,\sum_{i=1}^{\omega}{}^\star f(x_i),$$

l'ultima uguaglianza valendo per la proprietà di linearità della $\star$-sommatoria. □

Teorema 11.4.2. *Siano f, g integrabili su $[a,b]$ e r_1, r_2 numeri reali. Sussistono allora le proposizioni:*

(i) $\int_a^b \mathrm{i}_{\mathbb{R}}(x)dx = b - a$ *e* $\int_a^b (0 \cdot \mathrm{i}_{\mathbb{R}})(x)dx = 0$*;*

(ii) Proprietà di linearità: $\int_a^b (r_1 f + r_2 g)(x)dx = r_1 \int_a^b f(x)dx + r_2 \int_a^b g(x)dx$*;*

(iii) Proprietà di monotonia: $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$*;*

(iv) Teorema della media integrale: *Siano e', e'', rispettivamente, gli estremi inferiori e superiori di f in $[a,b]$. Risulta allora*

$$e' \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq e'';^{12} \tag{11.5}$$

(v) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$

(vi) Proprietà additiva: *Sia c interno ad $[a,b]$. Allora*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

(vii) Se f, g sono identiche a meno di un numero finito di punti, allora $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Dimostrazione. Ci limitiamo a provare, a titolo d'esempio, le proprietà (ii), (iii), (vi) e (vii), lasciando le altre al lettore come esercizio.

(ii) Sia $\mathbf{x}$ una suddivisione infinitesima di $^\star[a,b]$ in ν parti e ζ una $\star$-scelta in $\mathbf{x}$. Allora, usando i Lemmi 5.5.1, 7.3.1, 7.3.2(i) e il Teorema 7.1.1(i), la proprietà di linearità della $\star$-sommatoria e la condizione necessaria del Teorema 11.1.5, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\nu}{}^\star(r_1 f(\zeta_i) + r_2 g(\zeta_i))(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{\nu}(r_1{}^\star f(\zeta_i) + r_2{}^\star g(\zeta_i))(x_i - x_{i-1})\\ &= r_1 \sum_{i=1}^{\nu}{}^\star f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) + r_2 \sum_{i=1}^{\nu}{}^\star g(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})\\ &\approx r_1 \int_a^b f(x)dx + r_2 \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

[12] Il lemma precedente comporta una interessante interpretazione della disuguaglianza (11.5). Infatti, la si può anche esprimere dicendo che esiste un numero reale Λ, detto *valor medio integrale*, compreso tra gli estremi di f in $[a,b]$, tale che $\Lambda = \int_a^b f(x)dx/(b-a)$. Considerato ora ω naturale infinito, risulta

$$\Lambda = \frac{1}{b-a}\,\mathrm{st}\left[\frac{b-a}{\omega}\sum_{i=1}^{\omega}{}^\star f(x_i)\right] = \mathrm{st}\left[\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{\omega}{}^\star f(x_i)\right].$$

Pertanto, il valor medio integrale Λ è un numero infinitamente prossimo alla "media aritmetica" dei numeri $\star$-reali $^\star f(x_i)$, valori che $^\star f$ assume nei "punti" di un'arbitraria $\star$-suddivisione infinitesima di $^\star[a,b]$ in parti uguali. Trova così suggestiva giustificazione infinitesimale la terminologia che viene usata per questo celebre teorema.

da cui, per la condizione sufficiente del Teorema 11.1.5, otteniamo la tesi.

(iii) Siano $\mathbf{x}$, ζ come nella prova precedente. Per la proprietà di monotonia della $\star$-sommatoria, $\sum_{i=1}^{\nu} {}^{\star} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{\nu} {}^{\star} g(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$. La tesi si consegue utilizzando il Teorema 5.5.4(ix) e la condizione necessaria del Teorema 11.1.5.

(vi) Per il Teorema 11.3.2(ii), f è integrabile su $[a, c]$ e $[c, b]$. Ciò osservato, dato ω naturale infinito, consideriamo la suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$:

$$x_i = \begin{cases} a + i\,\dfrac{c-a}{\omega} & \text{se } 0 \leq i \leq \omega \\[2ex] c + (i-\omega)\,\dfrac{b-c}{\omega} & \text{se } \omega \leq i \leq 2\omega \end{cases}.$$

Allora, per la proprietà associativa, risulta

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=\omega+1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{c-a}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} {}^{\star} f(x_i) + \frac{b-c}{\omega} \sum_{i=\omega+1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i) \end{aligned}$$

e quindi, per la proprietà di traslazione degli indici e il Lemma 11.4.1,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) &= \frac{c-a}{\omega} \sum_{i=1}^{\omega} {}^{\star} f(x_i) + \frac{b-c}{\omega} \sum_{j=1}^{\omega} {}^{\star} f(x_{\omega+j}) \\ &\approx \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx. \end{aligned}$$

Ne segue, per il Teorema 11.1.5,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \approx \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx,$$

e quindi la tesi, osservato che la sommatoria $\sum_{i=1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ è una $\star$-sommatoria di Riemann (vedi la dimostrazione del lemma precedente).

(vii) È ovviamente sufficiente provare la proposizione nel caso in cui f e g differiscono in un solo punto, che indichiamo con c. Sia ora $\mathbf{x}$ la suddivisione infinitesima introdotta per dimostrare la proposizione (vi) e, in sua corrispondenza, consideriamo le $\star$-somme di Riemann relative alle funzioni f e g. Si ha

$$S_f = \sum_{i=1}^{2\omega} {}^{\star} f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \qquad S_g = \sum_{i=1}^{2\omega} {}^{\star} g(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Tenuto conto che f, g differiscono solo in c, anche ${}^\star f$, ${}^\star g$ differiscono solo in $c = x_\omega$. Pertanto

$$\begin{aligned}S_f &= \sum_{i=1}^{\omega} {}^\star f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(c)(c - x_{\omega-1}) + \sum_{i=\omega+1}^{2\omega} {}^\star f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{\omega-1} {}^\star g(x_i)(x_i - x_{i-1}) + (f(c) - g(c))(c - x_{\omega-1}) + g(c)(c - x_{\omega-1}) \\ &\quad + \sum_{i=\omega+1}^{2\omega} {}^\star g(x_i)(x_i - x_{i-1}) = S_g + (f(c) - g(c))(c - x_{\omega-1}).\end{aligned}$$

Poichè l'ultimo addendo è infinitesimo, dal Teorema 11.1.5 segue $\int_a^b f(x)dx = \mathrm{st}(S_f) = \mathrm{st}(S_g) = \int_a^b g(x)dx$. $\square$

11.5 La funzione integrale

Sia f una funzione definita in un intervallo reale D, limitato o no, ed integrabile su *ogni* suo sottointervallo non vuoto chiuso e limitato. Ciò convenuto, consideriamo la funzione di due variabili:

$$(x, y) \mapsto \int_x^y f(t)dt$$

che, per come è stato definito l'integrale di Riemann, ha dominio l'insieme $\{(x, y) \in D^2 \mid x < y\}$. D'altra parte, questa funzione viene usualmente estesa a tutto D^2 introducendo la *funzione integrale* I_f così definita:

$$\int_x^y f = \begin{cases} \int_x^y f(t)dt & \text{se } x < y \\ 0 & \text{se } x = y \\ -\int_y^x f(t)dt & \text{se } x > y \end{cases},$$

ove abbiamo usato, al posto di $I_f(x, y)$, la notazione più suggestiva $\int_x^y f$ che richiama il sottostante integrale di Riemann.

È importante tenere presente che, per il Teorema 11.3.1(i), la funzione integrale esiste sempre se la funzione f è continua. Sussistono inoltre le ben note proprietà elencate nel teorema seguente.

Teorema 11.5.1. *Per ogni $x, y \in D$, sussistono le proposizioni:*

(i) $\int_x^x f = 0$;

(ii) Proprietà alternante: $\int_x^y f = -\int_y^x f$;

(iii) Teorema della media integrale: *Se $x < y$, esiste allora un numero reale Λ tale che:*

$$\inf_{x \le t \le y} f(t) \le \Lambda \le \sup_{x \le t \le y} f(t) \quad e \quad \int_x^y f = \Lambda(y - x);$$

(iv) Proprietà additiva: $\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$, *qualunque sia la posizione dei tre punti x, y, z.*

DIMOSTRAZIONE. La proprietà (iii) è la proprietà (iv) del Teorema 11.4.2. L'ultima si trova pure in quell'elenco (Proprietà (vi)), ma è considerata solo in un caso particolare. Usando questo caso particolare e (i), (ii), si ottiene facilmente la (iv). □

Com'è naturale in questo contesto, andiamo ora a studiare la trasformata della funzione integrale, cioè la funzione ${}^\star I_f$. Sussiste in proposito il risultato seguente che si ottiene trasferendo, tramite l'usuale tecnica degli $\star$-concetti, le quattro proprietà elencate nel teorema precedente.

Teorema 11.5.2. *Per ogni $x, y, z \in {}^\star D$, sussistono le proposizioni*[13]*:*

(i) ${}^\star\int_x^x f = 0$;

(ii) Proprietà alternante $\star$-reale: ${}^\star\int_x^y f = -{}^\star\int_y^x f$;

(iii) Teorema della media integrale $\star$-reale: *Se $x < y$, esiste allora un numero $\star$-reale Λ tale che:*

$$\inf_{x \le t \le y} {}^\star f(t) \le \Lambda \le \sup_{x \le t \le y} {}^\star f(t) \quad e \quad {}^\star\!\!\int_x^y f = \Lambda(y - x);$$

(iv) Proprietà additiva $\star$-reale: ${}^\star\int_x^y f = {}^\star\int_x^z f + {}^\star\int_z^y f$, *qualunque sia la posizione di x, y, z.*

[13]Ove, analogamente a quanto convenuto per $I_f(x, y)$, poniamo ${}^\star I_f(x, y) = {}^\star\int_x^y f$.

Dimostrazione. Tutte le proprietà si provano via PdT. A titolo d'esempio, forniamo la dimostrazione della proposizione (iii) lasciando le altre al lettore come esercizio. Essendo f integrabile in $[x, y]$, risulta ivi limitata e quindi, per il Teorema 7.1.2(i), ${}^\star f$ ha come estremi in ${}^\star[x, y]$ due numeri $\star$-reali finiti. Ciò notato, basta considerare la semiformalizzazione del teorema della media integrale:

$$\forall u_1, u_2 \in D(u_1 < u_2 \Rightarrow \exists v(\inf f[[u_1, u_2]] \leq v \leq \sup f[[u_1, u_2]] \\ \text{ e } I_f(u_1, u_2) = v(u_2 - u_1))$$

e ricorrere ai teoremi relativi agli $\star$-concetti fondamentali. □

Nell'osservazione che segue il Teorema 11.1.5 è stato messo in luce come l'integrale di una funzione poteva essere inquadrato quale parte standard di somme di infiniti infinitesimi. In altri termini, eseguendo una di quelle somme si ottiene il valore dell'integrale a meno di un errore infinitesimo.

Sfruttando la proprietà additiva $\star$-reale e il Teorema della media integrale $\star$-reale, siamo ora in grado di mostrare che si possono scegliere degli addendi infinitesimi in modo così accurato che la loro somma risulti *esattamente* il valore dell'integrale.

Considerato, per questo, l'intervallo $[a, b]$, sia $\mathbf{x}$ un'arbitraria suddivisione infinitesima di ${}^\star[a, b]$ in ν parti. Sfruttando la proprietà additiva $\star$-reale e la proprietà telescopica della $\star$-sommatoria, risulta

$$\sum_{i=1}^{\nu} {}^\star\!\!\int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{\nu} {}^\star I_f(x_{i-1}, x_i) = {}^\star I_f(a, b) = \int_a^b f(t)dt.$$

L'affermazione fatta poc'anzi sarà allora giustificata se proviamo che il generico addendo ${}^\star \int_{x_{i-1}}^{x_i} f$ riesce infinitesimo. Per il Teorema della media integrale $\star$-reale, esiste uno $\star$-reale Λ tale che ${}^\star \int_{x_{i-1}}^{x_i} f = \Lambda(x_i - x_{i-1})$, ove quest'ultimo termine è infinitesimo perchè prodotto del numero infinitesimo $x_i - x_{i-1}$ e di Λ numero finito, essendo, per il Teorema 7.1.2(i), ${}^\star f$ limitata e

$$\inf_{a \leq x \leq b} {}^\star f(t) \leq e_i' \leq \Lambda \leq e_i'' \leq \sup_{a \leq f(x) \leq b} {}^\star f(x).$$

Riprendiamo ora in esame la funzione integrale cominciando con l'osservare che non tutte le proprietà elencate nel Teorema 11.5.1 risultano tra loro indipendenti. Abbiamo visto nella dimostrazione del teorema che le proprietà (i), (ii) assieme alla proprietà additiva *parziale*, valida cioè per terne x, y, z di numeri reali crescenti, permettono di provare la proprietà additiva *generale,* valida cioè per terne di numeri comunque disposti. È vero però anche il viceversa. La proprietà additiva (generale) (iv) implica sia (i) che (ii), oltre, naturalmente, l'additività parziale.[14]

Le proposizioni (i), (ii) si deducono dunque partendo da (iv) e sfruttando semplici proprietà algebriche dell'addizione tra numeri reali. Poichè l'addizione tra numeri $\star$-reali gode delle medesime proprietà algebriche, lo stesso procedimento può essere applicato, senza alcuna modifica, con riferimento al Teorema 11.5.2 che riguarda la funzione $\star$-reale ${}^\star I_f$ di due variabili $\star$-reali.

Arriviamo allora alla conclusione che se una funzione Φ di due variabili è additiva, allora verifica necessariamente anche le proprietà (i) e (ii), e ciò vale sia nell'ambiente standard che in quello, più ampio, nonstandard. Viceversa, se Φ gode delle proprietà (i), (ii), ed è parzialmente additiva, nel senso sopra precisato, allora, com'è facile provare, verifica anche l'additività. Sussiste dunque il risultato seguente.

Teorema 11.5.3. *Sia Φ una funzione (reale o $\star$-reale) di dominio C^2. Allora Φ è additiva, cioè*

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, z) + \Phi(z, y), \text{ per ogni } x, y, z \in C,$$

se e solo se, per ogni $x, y, z \in C$, risulta

(i) $\Phi(x, x) = 0$;

(ii) $\Phi(x, y) = -\Phi(y, x)$;

(iii) $\Phi(x, y) = \Phi(x, z) + \Phi(z, y)$, *se* $x < z < y$.[15]

[14]Ponendo in (iv) $x = y = z$ otteniamo $I_f(x, x) = 2I_f(x, x)$ e quindi $I_f(x, x) = 0$. La proprietà (ii) si ottiene, invece, ponendo in (iv) $x = y$; in questo caso infatti risulta $I_f(x, z) + I_f(z, x) = I_f(x, x) = 0$, da cui segue (ii).

[15]Per verificare che Φ è additiva, spesso, è più pratico seguire l'ultima via indicata; conviene cioè provare che sussistono le proposizioni (i), (ii) e (iii). Per dare la più generale nozione di applicazione additiva, occorre che Φ sia un'applicazione a valori in un gruppo abeliano. Nessuna proprietà è richiesta, invece, per l'insieme C che può essere qualsiasi. Tuttavia, se vogliamo che sussista un teorema analogo al Teorema 11.5.3, per poter enunciare la proprietà (iii), bisogna che C sia totalmente ordinato.

11.6 Teorema della somma infinita

Passiamo ora ad occuparci di un notevole teorema di natura infinitesimale, che risulta molto utile per sviluppare la teoria dell'integrazione con tecniche nonstandard; lo si usa, ad esempio, per provare il teorema di Torricelli-Barrow e il teorema fondamentale del calcolo integrale. La ragione che lo rende, senza dubbio uno dei fondamentali risultati della teoria infinitesimale dell'integrale di Riemann, però, è che dà fondamento e rigore a quei procedimenti infinitesimali che hanno segnato l'inizio dell'analisi e che, in fisica, ma anche in geometria, sono stati sempre adoperati, almeno come primo intuitivo approccio a taluni problemi.

Il teorema fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione additiva sia esprimibile come funzione integrale di una funzione continua. Al fine di darne una significativa interpretazione, conviene considerare il risultato seguente.

Teorema 11.6.1. *Dato l'intervallo* $[a,b]$*, sia* $\mathbf{x}$ *una* $\star$*-suddivisione di* ${}^\star[a,b]$ *in* $\nu \in {}^\star\mathbb{N}$ *parti. Considerata allora una funzione reale* Φ *additiva, riesce*

$$\Phi(a,b) = \sum_{i=0}^{\nu-1} {}^\star\Phi(x_i, x_{i+1}).$$

Dimostrazione. Sussiste la proposizione finitamente limitabile:

$$\forall u_1, u_2\, \forall \nu \in \mathbb{N}\, (u_1 \text{ suddivisione di } [a,b] \text{ in } \nu \text{ parti e } u_2 \text{ sequenza in } \mathbb{R}^2$$
$$\text{e } i \in [0, \nu-1] \subset \mathbb{N} \text{ e } u_2(i) = (u_1(i), u_1(i+1)) \;\Rightarrow \Phi(a,b) = \sum_{i=0}^{\nu-1} (\Phi \circ u_2)(i))$$

da cui, ricorrendo alla tecnica degli $\star$-concetti, otteniano che sussiste lo $\star$-enunciato:

$$\forall u_1, u_2\, \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}\, (u_1\ \star\text{-suddivisione di } {}^\star[a,b] \text{ in } \nu \text{ parti e } u_2\ \star\text{-sequenza in } {}^\star\mathbb{R}^2$$
$$\text{e } i \in [0, \nu-1] \subset {}^\star\mathbb{N} \text{ e } u_2(i) = (u_1(i), u_1(i+1)) \Rightarrow {}^\star\Phi(a,b) = \sum_{i=0}^{\nu-1} ({}^\star\Phi \circ u_2)(i)).$$

Notato che, posto $u_1 = s$ e $u_2(i) = (s_i, s_{i+1})$ per ogni $i = 0 \ldots, \nu - 1$, la sequenza u_2 è una $\star$-sequenza [16], si ha

$${}^\star\Phi(a,b) = \sum_{i=0}^{\nu-1} ({}^\star\Phi \circ u_2)(i)) = \sum_{i=0}^{\nu-1} {}^\star\Phi(s_i, s_{i+1}),$$

[16] Risulta $u_2 = \{(i,(u,v)) \in [0,\nu-1] \times {}^\star\mathbb{R}^2 \,|\, \mathcal{I} \Vdash (\langle i,u\rangle \lessdot s) \wedge (\langle i+1, v\rangle \lessdot s)\}$ e quindi, tramite il Teorema 2.5.2(ii) e il Lemma 4.2.3(ii), l'internalità.

ossia la tesi. □

Possiamo ora interpretare il prossimo teorema nel seguente modo alquanto suggestivo: con riferimento ad un'arbitraria $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ dell'intervallo $^\star[a,b]$ in ω parti, posto $\epsilon = 1/\omega$, la somma infinita degli "incrementi infinitesimi" $^\star\Phi(x_i, x_i+\epsilon)$ coincide con l'integrale della funzione f, qualora ogni incremento sia infinitamente prossimo al valore $^\star f(x_i)\,\epsilon$.

Teorema 11.6.2 (Teorema della somma infinita). *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e Φ una funzione additiva di dominio $[a,b]^2$. Sono allora equivalenti le proposizioni:*

(i) $\Phi = I_f$;

(ii) Per ogni $\star$-reale x e per ogni $\epsilon \neq 0$ tali che $(x, x+\epsilon) \in {}^\star[a,b]^2$, risulta:

$$\frac{^\star\Phi(x, x+\epsilon)}{\epsilon} \approx {}^\star f(x). \tag{11.6}$$

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Siano x e $\epsilon \neq 0$ tali che $(x, x+\epsilon) \in {}^\star[a,b]^2$. Supponiamo intanto $\epsilon > 0$. Per il Teorema della media integrale $\star$-reale 11.5.2(iii), esiste allora uno $\star$-reale Λ, compreso tra gli estremi di $^\star f$ nell'intervallo $[x, x+\epsilon]$, tale che $^\star\Phi(x, x+\epsilon) = {}^\star\int_x^{x+\epsilon} f = \Lambda\epsilon$. Poichè f è continua in $[a,b]$ e $[x, x+\epsilon] \subset {}^\star[a,b]$, esiste $\tau \in [x, x+\epsilon]$ tale che $\Lambda = {}^\star f(\tau)$.[17] Riesce quindi

$$\frac{^\star\Phi(x, x+\epsilon)}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}\ {}^\star\!\!\int_x^{x+\epsilon} f = {}^\star f(\tau).$$

Sempre per la continuità nell'intervallo compatto $[a,b]$, la funzione f è ivi uniformemente continua (Teorema di Heine-Cantor 8.2.2). Essendo $\tau \approx x$, si conclude allora, per il teorema 8.2.1, $^\star f(\tau) \approx {}^\star f(x)$ e quindi $^\star\Phi(x, x+\epsilon)/\epsilon \approx {}^\star f(x)$.

[17] Per il Teorema di connessione 8.1.5 sussiste la proposizione:

$$\forall x_1, x_2, y\,(x_1 \in \pi_1^2(f)\,\mathrm{e}\,x_2 \in \pi_1^2(f)\,\mathrm{e}\,f(x_1) < y < f(x_2) \Rightarrow \exists x\,(x \in \pi_1^2(f)\,\mathrm{e}\,y = f(x))).$$

Allora, dopo un'opportuna semiformalizzazione finitamente limitabile e il ricorso alla tecnica degli $\star$-concetti, otteniamo che sussiste lo $\star$-enunciato:

$$\forall x_1, x_2, y(x_1 \in \pi_1^2({}^\star f)\,\mathrm{e}\,x_2 \in \pi_1^2({}^\star f)\,\mathrm{e}\,{}^\star f(x_1) < y < {}^\star f(x_2) \Rightarrow \exists x(x \in \pi_1^2({}^\star f)\,\mathrm{e}\,y = {}^\star f(x))).$$

Ne segue quanto dichiarato.

Con qualche modesta modifica al procedimento seguito, si ottiene lo stesso risultato anche per $\epsilon < 0$. Per l'arbitrarietà di x e ϵ segue allora (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). La funzione f, essendo continua in $[a,b]$, risulta, per i Teoremi 11.3.1 e 11.3.2(ii), integrabile su ogni sottointervallo chiuso di $[a,b]$. Per ogni $(x,y) \in [a,b]^2$ ha senso allora considerare il valore della funzione integrale $I_f(x,y)$.

Andiamo ora a confrontare I_f con Φ. Poichè queste due funzioni sono entrambe additive di dominio $[a,b]^2$, la prima per il Teorema 11.5.1(iv), e la seconda per ipotesi, mediante il Teorema 11.5.3(i),(ii), tutte due sono alternanti e risulta $I_f(x,x) = \Phi(x,x) = 0$. Pertanto, per provare $\Phi = I_f$ sarà sufficiente confrontare i loro valori limitatamente al triangolo di $[a,b]^2$ in cui si ha $x < y$, oppure in quello in cui risulta $y < x$ (non tutti e due vuoti).

Supposto, ad esempio, il primo non vuoto, sia $(c,d) \in [a,b]^2$ con $c < d$ e per il resto arbitrario. Poichè $\Phi(c,d)$ e $I_f(c,d)$ sono numeri reali, per provare che sono uguali, basta mostrare che sono infinitamente prossimi. A tal fine, data una $\star$-suddivisione infinitesima $\mathbf{x}$ di ${}^\star[c,d]$ in ν parti, consideriamo la $\star$-somma di Riemann:

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\nu}{}^\star f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Per definizione di integrale, si ha intanto $I_f(c,d) = \int_c^d f(t)dt \approx S(\mathbf{x})$. Ma risulta anche $\Phi(c,d) \approx S(\mathbf{x})$. Lo proviamo facendo vedere che, per ogni reale $r > 0$, $|S(\mathbf{x}) - \Phi(c,d)| < r$, cioè

$$S(\mathbf{x}) - r < \Phi(c,d) < S(\mathbf{x}) + r.$$

Iniziamo col mostrare che vale la prima disuguaglianza. Con riferimento alla suddivisione $\mathbf{x}$, per ogni $i \in [1,\nu]$, per (11.6), si ha

$$\frac{{}^\star\Phi(x_{i-1},x_i)}{x_i - x_{i-1}} \approx {}^\star f(x_{i-1}).$$

Dato che $r/(d-c)$ è un reale positivo, risulta

$${}^\star f(x_{i-1}) - \frac{r}{d-c} < \frac{{}^\star\Phi(x_{i-1},x_i)}{x_i - x_{i-1}}.$$

Pertanto, usando le proprietà di linearità, monotonia e telescopica, si ottiene

$$\begin{aligned}
&S(\mathbf{x}) - r = S(\mathbf{x}) - \frac{r}{d-c}(d-c) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu}{}^\star f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) - \frac{r}{d-c}\sum_{i=1}^{\nu}(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{\nu}\left({}^\star f(x_{i-1}) - \frac{r}{d-c}\right)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{\nu}{}^\star\Phi(x_{i-1},x_i) = {}^\star\Phi(c,d) = \Phi(c,d).
\end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si prova l'altra disuguaglianza. Per l'arbitrarietà di $r > 0$, risulta allora $\Phi(c,d) \approx S(\mathbf{x}) \approx I_f(c,d)$ e quindi $\Phi(c,d) = I_f(c,d)$. Infine, dall'arbitrarietà di (c,d) si ha (i). □

Prima di fornire, nella prossima sezione, le dimostrazioni nonstandard di alcuni fondamentali teoremi riguardanti la funzione integrale, riteniamo interessante segnalare che nella prova della sufficienza, relativa all'ultimo teorema, si poteva omettere l'ipotesi di continuità di f, perchè deducibile dalle altre ipotesi. Sussiste infatti il risultato seguente.

Teorema 11.6.3. *Sia f definita nell'intervallo $[a,b]$ e Φ una funzione additiva di dominio $[a,b]^2$. Se per ogni $\star$-reale x e per ogni $\epsilon \neq 0$ tali che $(x, x+\epsilon) \in {}^\star[a,b]^2$, risulta:*

$$\frac{{}^\star\Phi(x, x+\epsilon)}{\epsilon} \approx {}^\star f(x), \tag{11.7}$$

allora f è continua in $[a,b]$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che essendo Φ additiva, lo è anche ${}^\star\Phi$, come si prova facilmente tramite PdT.

Sia $x \in [a,b]$. Sia intanto x interno. Allora, per il Teorema 6.3.1(i), $\mu(x) \subset {}^\star[a,b]$ e quindi $x+\epsilon \in {}^\star[a,b]$, per ogni infinitesimo ϵ. Osservato che, per il Teorema 11.5.3(ii), ${}^\star\Phi$ verifica la proprietà alternante, otteniamo, per (11.7),

$$\begin{aligned} f(x) &= {}^\star f(x) \approx \frac{{}^\star\Phi(x,x+\epsilon)}{\epsilon} = -\frac{{}^\star\Phi(x+\epsilon,x)}{\epsilon} = \frac{{}^\star\Phi(x+\epsilon,(x+\epsilon)-\epsilon)}{-\epsilon} \\ &\approx {}^\star f(x+\epsilon). \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ, in forza del Teorema 8.1.1, f è continua in x.

Se x è uno degli estremi, evidentemente, non si può applicare la proprietà alternante, perchè sono possibili solo incrementi destri o sinistri. Continua a sussistere tuttavia la tesi e la si prova, ovviamente, con ragionamento diverso dal precedente.

Vediamo come si procede per $x = a$. Poichè ${}^\star[a,b]$ è l'intervallo di ${}^\star\mathbb{R}$ di estremi a e b, per ogni $\epsilon' > 0$ risulta $a + \epsilon' \in {}^\star[a,b]$. Sia dunque $\epsilon' > 0$. Per l'additività di ${}^\star\Phi$, si ha

$$\frac{{}^\star\Phi(x, x+2\,\epsilon')}{2\epsilon'} = \frac{1}{2}\,\frac{{}^\star\Phi(x,x+\epsilon')}{\epsilon'} + \frac{1}{2}\,\frac{{}^\star\Phi(x+\epsilon',(x+\epsilon')+\epsilon')}{\epsilon'}.$$

Ne segue, per (11.7),

$${}^\star f(x) \approx \frac{1}{2}\,{}^\star f(x) + \frac{1}{2}\,{}^\star f(x+\epsilon').$$

Dunque $f(x) = {}^\star f(x) \approx {}^\star f(x+\epsilon')$ e quindi, ricorrendo ancora al Teorema 8.1.1, la tesi. Analoga la dimostrazione per $x = b$. □

11.7 Quattro teoremi fondamentali

In questa sezione forniamo le dimostrazioni infinitesimali della formula di Torricelli-Barrow e del teorema fondamentale del calcolo (integrale e differenziale). Ricordiamo che per *primitiva* di una funzione f s'intende una qualsiasi funzione F tale che $F' = f$.

Teorema 11.7.1. (Formula di Torricelli-Barrow) *Siano f continua nell'intervallo I e F una primitiva di f. Allora per ogni $(a, b) \in I^2$ risulta:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$[18]

Dimostrazione. Iniziamo con l'osservare che si può sempre supporre che I sia un intervallo aperto. Se c è un suo estremo, possiamo infatti farlo diventare interno prolungando f in modo costante e F in modo lineare fuori di I estendendo ai prolungamenti le ipotesi del teorema. Basta per questo porre $f(x) = f(c)$ e $F(x) = F(c)+f(c)(x-c)$, a sinistra di c, se c è l'estremo inferiore, a destra, se c è l'estremo superiore.

Sia dunque I aperto. Per comodità supponiamo $a < b$. Per ogni $(x, y) \in [a, b]^2$ poniamo:

$$\Phi(x, y) = F(y) - F(x).$$

È subito visto che Φ è una funzione additiva di dominio $[a, b]^2$.[19] Inoltre soddisfa la condizione infinitesimale (11.7) per ogni $x \in [a, b]$. Infatti, sia x $\star$-reale e $\epsilon \neq 0$ tali che $(x, x+\epsilon) \in {}^\star[a, b]^2$. Poichè f è continua in I e $F' = f$, la funzione F risulta derivabile con continuità in ogni x di I e quindi, in particolare, di $[a, b]$. Ne segue, tenuto conto del Teorema 10.2.6,

$$\frac{{}^\star\Phi(x, x+\epsilon)}{\epsilon} = \frac{{}^\star F(x+\epsilon) - {}^\star F(x)}{\epsilon} \approx F'(r) = f(r),$$

con $r = \mathrm{st}(x)$.

Sfruttando ancora la continuità di f, abbiamo, per il Teorema 8.1.1, $f(r) \approx {}^\star f(x)$, poichè $x \approx r$, e quindi, per il Teorema della somma infinita 11.6.2, $\Phi = I_f$. Per ogni $(x, y) \in [a, b]^2$ allora si ha $F(y) - F(x) = \int_x^y f$. Posto $x = a$ e $y = b$ otteniamo la tesi. $\square$

[18]Mancando altre ipotesi sull'intervallo I, vi possono appartenere gli eventuali estremi, uno o entrambi. In questo caso, com'è usuale, per derivata in un estremo intendiamo la derivata destra, se l'estremo è quello inferiore, quella sinistra, se è quello superiore.

[19]È facile verificare, più in generale, che se h è una funzione reale o $\star$-reale di dominio D qualsiasi, allora risulta additiva la funzione H di dominio D^2 definita dalla $H(x, y) = h(y) - h(x)$ (o anche $H(x, y) = h(x) - h(y)$).

La formula di Torricelli-Barrow offre una metodologia per il calcolo degli integrali di straordinaria importanza, alternativa a quella imposta dalla definizione che richiede il calcolo diretto di sommatorie o $\star$-sommatorie, calcolo che, salvo alcuni casi molto semplici, diviene ben presto praticamente proibitivo.

Grazie a questo teorema, il calcolo degli integrali viene invece ricondotto alla ricerca di una primitiva della funzione in oggetto, questione questa estremamente più semplice di quella precedente.

Il problema della ricerca delle primitive di una funzione acquista quindi importanza fondamentale nella teoria dell'integrazione. Nell'analisi matematica, a questo punto e a tal fine, viene introdotta la nozione di *integrale indefinito* (insieme delle primitive di una funzione) e viene largamente sviluppata una teoria intesa a studiare metodi d'integrazione indefinita: integrazione di funzioni elementari, integrazione per sostituzione, per parti, ecc.. Non ci occupereremo di questo problema, rimandandolo alla letteratura classica e/o nonstandard.[20] Sull'argomento, tuttavia, aggiungiamo, qui, due importanti teoremi che permettono di ottenere una caratterizzazione dell'integrale indefinito delle funzioni continue. Il primo mette a confronto le primitive delle funzioni continue su un intervallo e mostra come la determinazione dell'integrale indefinito si riduca al calcolo di una primitiva, visto che le altre differiscono da quella e tra loro per una costante. Il secondo si occupa invece dell'esistenza di primitive, dando risposta positiva alla quesito per le funzioni continue su un intervallo.

Teorema 11.7.2. (caratterizzazione dell'integrale indefinito) *Siano f continua nell'intervallo I e F, G due sue primitive. Allora la funzione $F - G$ è una costante.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x_0, x \in I$. Per la formula di Torricelli-Barrow, si ha

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f = G(x) - G(x_0),$$

e quindi $F(x) - G(x) = F(x_0) - G(x_0)$. Mantenendo fisso x_0 e facendo variare x si ottiene la tesi. $\square$

[20] L'integrale indefinito di una funzione f viene indicato in letteratura con la notazione $\int f(x)dx$. Il simbolo $\int f(x)dx$ rappresenta dunque una *classe di funzioni* di una sola variabile, che si conviene di designare con la lettera che in esso compare (nel nostro caso con la lettera x). Anche se può apparire ingombrante, questa notazione si è rivelata in pratica molto utile, adatta per esprimere in modo semplice e mnemonico le principali regole di integrazione indefinita.

Veniamo ora al secondo dei due teoremi preannunciati.

Teorema 11.7.3. (fondamentale del calcolo) *Siano f continua nell'intervallo I e $x_0 \in I$. Per ogni $x \in I$ poniamo:*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f. \tag{11.8}$$

Allora, $F' = f$.

Dimostrazione. Come nel caso del Teorema 11.7.1, anche qui è possibile supporre che I sia aperto. Infatti, se c è un estremo dell'intervallo I, possiamo fare in modo che diventi interno prolungando f in modo continuo fuori di I, ponendo $f(x) = f(c)$ per x appartenenti alla semiretta di origine c non contenente I.

Sia dunque I aperto e $x \in I$. Esiste allora un intervallo $[a, b]$ tale che $a < x < b$. Preso $\epsilon \neq 0$ e usando la proprietà additiva $\star$-reale 11.5.2(iv), otteniamo

$$\Delta^\star F = {}^\star\!\!\int_{x_0}^{x+\epsilon} f - {}^\star\!\!\int_{x_0}^{x} f = {}^\star\!\!\int_{x_0}^{x} f + {}^\star\!\!\int_{x}^{x+\epsilon} f - {}^\star\!\!\int_{x_0}^{x} f = {}^\star\!\!\int_{x}^{x+\epsilon} f. \tag{11.9}$$

Poichè f è continua in $[a, b]$, sussiste, per il Teorema della somma infinita 11.6.2, la condizione infinitesimale (11.6). Pertanto

$$\frac{\Delta^\star F}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \; {}^\star\!\!\int_{x}^{x+\epsilon} f \approx {}^\star f(x) = f(x).$$

Conseguentemente, F è derivabile in x e riesce $F'(x) = f(x)$ per definizione. □

Il Teorema fondamentale del calcolo stabilisce, qualora la funzione integranda sia continua, un collegamento tra le nozioni di integrale e di derivata, che sono le più importanti, assieme a quella di limite, di tutta l'analisi matematica. Il teorema presenta l'operazione di derivazione come operazione inversa di quella d'integrazione. La funzione F si ottiene infatti integrando f tra un punto fisso arbitrario x_0 e un punto x variabile. Derivando poi questo integrale di f, cioè F, si riottiene la funzione f di partenza.

Si può dire qualcosa concernente le proprietà di regolarità della funzione integrale, introdotta tramite (11.8), anche quando la funzione integranda non è continua? A tale proposito, una risposta positiva al quesito viene fornita dal risultato seguente, che assicura la continuità di F nella sola ipotesi, ovvia, d'integrabilità di f.

Teorema 11.7.4. *Siano f integrabile nell'intervallo I e $x_0 \in I$. Allora la funzione integrale $F(\cdot) = \int_{x_0}^{\cdot} f$ è continua in I.*

DIMOSTRAZIONE. Dato $x \in I$, dobbiamo provare che $F(\cdot)$ è continua in x. Sia dunque $x + \epsilon \in I$ per qualche infinitesimo ϵ. Per la proprietà additiva $\star$-reale (Teorema 11.5.2(iv)) risulta

$$\Delta^\star F = {}^\star\!\!\int_x^{x+\epsilon} f.$$

Per l'ipotesi d'integrabilità, f è limitata. Allora, per il Teorema 7.1.2(i), ${}^\star f$ è limitata in $[x, x+\epsilon]$. Ne segue, per il Teorema della media integrale $\star$-reale 11.5.2(iii), che esiste Λ $\star$-reale finito tale che

$$\Delta^\star F = {}^\star\!\!\int_x^{x+\epsilon} f = \Lambda\epsilon \approx 0.$$

Dal Teorema 8.1.1 si ha infine la tesi. □

11.8 Il numero di Nepero

In quest'ultima sezione forniamo una dimostrazione nonstandard, basata sulla continuità delle funzioni esponenziali e logaritmiche [21] e sulle $\star$-somme di Riemann, dell'esistenza del limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

il cui valore e, chiamato **numero di Nepero** [22], forma, assieme a π e l'unità immaginaria i, la terna numerica più importante della matematica.[23]

Iniziamo col ricordare la ben nota identità algebrica:

$$\sum_{i=0}^{n-1} b^i = \frac{b^n - 1}{b - 1}$$

[21] La dimostrazione nonstandard della continuità dell'esponenziale non differisce sostanzialmente da quella standard per cui non la riportiamo. Per quanto riguarda invece quella della funzione logaritmica, la si ottiene tramite il Teorema 8.1.2(iv).

[22] In onore di John Napier che inventò i logaritmi attorno al 1594. La notazione e è dovuta a Leonard Euler che sembra essere stato il primo a riconoscere l'importanza di questo numero.

[23] Una interessante disanima del significato di questi numeri viene fatta da Bruno de Finetti nell'articolo *Tre personaggi della matematica: e, π, i*, Le Scienze, Quaderni 45,1982.

valida per ogni reale $b > 1$ e $n \geq 1$. Sussiste allora la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall s \in \Sigma\, \forall \nu \in \mathbb{N}^+\, \forall \nu' \in \mathbb{N}\, (x > 1\, \mathrm{e}\, \pi_1^2(s) = [0, \nu - 1] \subset \mathbb{N}$$
$$\mathrm{e}\, \nu' \in \pi_1^2(s)\, \mathrm{e}\, s(\nu') = \exp(b, \nu') \Rightarrow \mathtt{s}(s) = \frac{\exp(b, \nu) - 1}{b - 1}.$$

Ne segue, tramite un'appropriata semiformalizzazione e il ricorso alla tecnica degli $\star$-concetti, la validità della:

$$\forall x \in {}^\star\mathbb{R}\, \forall s \in {}^\star\Sigma\, \forall \nu \in {}^\star\mathbb{N}^+\, \forall \nu' \in {}^\star\mathbb{N}\, (x > 1\, \mathrm{e}\, \pi_1^2(s) = [0, \nu - 1] \subset {}^\star\mathbb{N}$$
$$\mathrm{e}\, \nu' \in \pi_1^2(s)\, \mathrm{e}\, s(\nu') = {}^\star \exp(b, \nu') \Rightarrow {}^\star\mathtt{s}(s) = \frac{{}^\star \exp(b, \nu) - 1}{b - 1}.$$

Risulta allora, adottando, come già convenuto, l'usuale notazione dell'esponenziale reale anche per ${}^\star \exp$, che l'uguaglianza:

$$\sum_{i=0}^{\nu-1} b^i = \frac{b^\nu - 1}{b - 1} \tag{11.10}$$

sussiste per ogni $\star$-reale $b > 1$ e per ogni $\star$-naturale $\nu \geq 1$.

Ciò osservato, dato il numero reale $b > 1$, la funzione esponenziale $\exp(b, \cdot)$ è continua nell'intervallo reale $[0, 1]$ e quindi, per il Teorema 11.3.1(i), possiamo considerare l'integrale $c = \int_0^1 b^t dt$. Proviamo ora che risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = b^{\frac{c}{b-1}}.$$

Per il Teorema 9.4.1(i), basta verificare che, dato il naturale infinito $\omega > 0$ arbitrario, riesce

$$\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega \approx b^{\frac{c}{b-1}}. \tag{11.11}$$

A tal fine, passando alla funzione ${}^\star \log_b$, osserviamo che risulta:

$${}^\star \log_b \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega = \omega\ {}^\star \log_b \left(1 + \frac{1}{\omega}\right).$$

Notato che $(1 + 1/\omega) \approx 1$ e che la funzione log è continua in 1, dal Teorema 8.1.1 otteniamo ${}^\star \log(1 + 1/\omega) \approx {}^\star \log 1 = 0$. Dunque

$${}^\star \log_b \left(1 + \frac{1}{\omega}\right) = \epsilon > 0.$$

Ne segue, $\omega = 1/(b^\epsilon - 1)$, e quindi

$$^\star\log_b\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega = \frac{\epsilon}{b^\epsilon - 1}. \tag{11.12}$$

Considerata infine la $\star$-suddivisione $\mathbf{x}$ di $^\star[0,1]$ in $\omega' = 1/\epsilon$ parti:

$$x_i = \frac{i}{\omega'} = i\,\epsilon \qquad (i = 0, \ldots, \omega'),$$

risulta, tramite il Lemma 11.4.1 e le proprietà di linearità e di traslazione degli indici della $\star$-sommatoria,

$$c = \int_0^1 b^t\,dt \approx \epsilon \sum_{i=1}^{\omega'} (b^\epsilon)^i = \epsilon\, b^\epsilon \sum_{i=1}^{\omega'} (b^\epsilon)^{i-1} = \epsilon\, b^\epsilon \sum_{i=0}^{\omega'-1} (b^\epsilon)^i$$

e quindi, per (11.10),

$$c \approx \epsilon\, b^\epsilon\,\frac{(b^\epsilon)^{\omega'} - 1}{b^\epsilon - 1} = \epsilon\, b^\epsilon\,\frac{b^{\epsilon\,\omega'} - 1}{b^\epsilon - 1} = \epsilon\, b^\epsilon\,\frac{b - 1}{b^\epsilon - 1}.$$

Ora, per la continuità dell'esponenziale in zero, $b^\epsilon \approx b^0 = 1$. Ne segue

$$c \approx \epsilon\, b^\epsilon\,\frac{b-1}{b^\epsilon - 1} \approx \epsilon\,\frac{b-1}{b^\epsilon - 1}$$

da cui, tramite (11.12),

$$\frac{c}{b-1} \approx \frac{\epsilon}{b^\epsilon - 1} = {}^\star\log_b\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega.$$

Ricorrendo infine alla continuità dell'esponenziale in $c/(b-1)$, otteniamo, tramite in Teorema 8.1.1, l'equivalenza (11.11). La dimostrazione è così terminata.

Bibliografia essenziale

[1] C.C.Chang - H.J.Keisler, *Model Theory*, Third Edition, Dover Pulications Inc., 2012.

[2] R. Goldblatt, *Lectures on the Hyperreals. An introduction to Nonstandard Analysis,* Springer-Verlag, 1998.

[3] I. Golbring, *Lectures Notes on Nonstandard Analysis*, UCLA Summer School in Logic, 2014, https://www.math.uci.edu.

[4] H.J. Keisler, *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, 1976; Revised Edition, University of Wisconsin-Madison, 2007, https://people.math.wisc.edu.

[5] H.J. Keisler, *Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach*, Third Edition, Dover Publications Inc., New York, 2012.

[6] P.A. Loeb, M.P.H. Wolff, *Nonstandard Analysis for the Working Mathematician*, Second Edition, Springer, 2015.

[7] A. Robinson, *Non-Standard Analysis*, Revised Edition, Princenton University Press, 1996.

[8] N.Vakil, *Real Analysis. Through Modern Infinitesimals*, Cambridge University Press, 2011.