

Per gli alunni l'aritmetica è più facile della geometria? Come ho superato alcune difficoltà

MARINA ROCCO
Nucleo di Ricerca Didattica
del Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Trieste
marina.rocco1@tin.it

SUNTO

Vengono presentati alcuni esempi di situazioni (problemi, attività,...) di tipo geometrico in cui sono state notate difficoltà largamente diffuse tra alunni di 11-14 anni. Per ogni esempio si illustrano le strategie didattiche che hanno prodotto dei miglioramenti. Nel corso dell'esperienza, durata più di una ventina d'anni, è stato osservato un numero significativo di alunni (circa 3000).

PAROLE CHIAVE

DIDATTICA DELLA MATEMATICA / MATHEMATICS EDUCATION; DIFFICOLTÀ DI APPRENDIMENTO / LEARNING DIFFICULTIES; GEOMETRIA / GEOMETRY; SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO / MIDDLE SCHOOL

1. PREMESSA

Posso vantare un'esperienza di insegnamento lunga e variegata: sono stata docente di ruolo dal 1978 al 2004 nella scuola secondaria di primo grado; il servizio preuolo si è svolto dal 1972 prevalentemente nella secondaria di secondo grado; ho formato docenti di scuola primaria e secondaria di primo grado (corsi di formazione iniziale, ad es. SSISS, corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria; corsi di formazione in servizio).

Nel corso della mia attività di insegnamento ho constatato che:

- Durante le lezioni di geometria, i ragazzi chiedono con frequenza rilevante "Quando si fa matematica?" (intendendo: *aritmetica*)

- Si riscontra un maggior successo nelle verifiche di aritmetica che in quelle di geometria.

Penso che molti altri insegnanti abbiano potuto fare le stesse osservazioni e forse, come me, si sono chiesti:

- Perché gli alunni preferiscono l'aritmetica alla geometria?
- Perché è più facile produrre un risultato corretto in aritmetica?

Se si insegna alla scuola secondaria, si cerca di trovare una risposta a tali quesiti (causa, correlazione,...) indagando in qualche modo su quanto avvenuto in merito durante la scolarizzazione pregressa degli studenti.

La prima fonte di riferimento (che però può solo dare un'idea di ciò che *avrebbe potuto essere*) sono i testi normativi³⁶: in essi la geometria non è trascurata e, come per le altre discipline, si suggerisce ampiamente il ricorso a esperienze concrete e ad attività laboratoriali. Negli ultimi vent'anni l'elenco dei contenuti di geometria per la scuola primaria si è forse un po' ridotto, ma non dimentichiamo che le innovazioni nell'insegnamento della matematica nella scuola di base sono state spesso indipendenti dalla normativa e legate piuttosto al confronto di esperienze, sotto il controllo delle Università o all'interno di associazioni di categoria.

Per ciò che è realmente avvenuto nella storia scolastica dell'allievo, le fonti di riferimento consistono nei test d'ingresso al nuovo ordine di scuola, nelle interviste più o meno formali agli alunni e ai docenti delle scuole di provenienza. Il quadro che si delineava dalle indagini da me svolte molto spesso mi ha fatto pensare che nella scuola primaria si insegna geometria il più tardi possibile e nelle dosi minime richieste, spesso limitandosi a questioni di calcolo di misure.

Se ci poniamo dal punto di vista dell'alunno, dobbiamo comunque ammettere che la geometria è emotivamente destabilizzante!

Infatti, le competenze richieste nell'esecuzione di un compito di geometria sono complesse. Molti sono i fattori in gioco: possono esserci, oggettivamente, difficoltà

³⁶ Cfr. [MPI, 2007], ma si vedano anche almeno i due precedenti analoghi documenti relativi ai programmi di insegnamento per la scuola primaria e secondaria di primo grado.

a rappresentare graficamente la situazione, o difficoltà a capire la richiesta, non solo a causa della formulazione del testo.

Generalmente, l'allievo:

- ha scarse possibilità di autovalutazione (non riesce a mantenere il controllo sul procedimento risolutivo perché, salvo situazioni molto semplici, non può ricorrere ad automatismi);
- vive in condizioni di incertezza (la “prova” per verificare la correttezza dell'esecuzione riguarda solo gli aspetti numerici);
- sente a rischio l'autostima.

Se uno può o deve decidere da solo, di fronte a un ostacolo ha due possibilità: rinunciare, o affrontarlo (nelle situazioni problematiche reali, l'aggiramento è una scelta quasi mai possibile). Ma, per i nostri allievi, decidiamo noi insegnanti: si può scegliere di evitare loro i “traumi delle sconfitte”, riducendo e semplificando l'insegnamento della geometria. Sarebbe una scelta più saggia quella di rendere la geometria più familiare (in senso latino: *inserviente, domestica*), cominciando a insegnarla prima possibile, sfruttando tutte le occasioni, usando strategie accattivanti. Questa seconda scelta richiede l'individuazione delle situazioni “difficili”, il riconoscimento delle loro origini, la valutazione delle possibili conseguenze sugli apprendimenti futuri, l'applicazione di metodologie di insegnamento efficaci, l'ideazione di attività adeguate alla prevenzione o al recupero,... È una scelta impegnativa, sia perché in ogni fase del lavoro l'insegnante non ha tregua, sia perché, una volta imboccata questa strada, ci si sente moralmente in dovere di continuare a percorrerla.

2. ANALISI DI ALCUNE ESPERIENZE

Le difficoltà che gli alunni incontrano in geometria diventano evidenti con i problemi tipici delle classi *secondo e terzo* della scuola secondaria di primo grado, anche se ci sono state anche altre circostanze in cui i miei alunni hanno fornito prestazioni molto al di sotto delle mie aspettative.

Qui di seguito presento alcuni esempi delle situazioni che mi sono parse più significative, verificatesi nelle classi seconde e terze: per ciascuno di essi indico quelle che mi sono sembrate le possibili cause di insuccesso e riporto la traccia della strategia didattica di cui mi sono servita per il recupero o la prevenzione, con relativo commento.

ESEMPIO 1

Il primo esempio riguarda un problema di geometria piana: tolte le situazioni in cui basta applicare un'unica formula, le difficoltà che i ragazzi della fascia più debole incontrano sono tali, che spesso rinunciano del tutto all'esecuzione oppure procedono con tentativi disorganizzati di utilizzo dei dati, senza una strategia risolutiva. Consideriamo il testo che segue, tipico esercizio di routine o da compito in classe:

Trovare il perimetro di un rettangolo, la cui base misura 6 cm, equivalente a un trapezio isoscele col perimetro di 40 cm, altezza 4 cm e lato obliquo 5 cm.

Le difficoltà che il problema comporta sono innanzi tutto di comprensione del testo, e tale comprensione è legata a numerose conoscenze (definizioni di termini specifici) e subordinata all'individuazione delle richieste esplicite e implicite. Questo è un testo molto denso di informazioni, perciò (analogamente a quanto avevo già fatto nella classe prima per i problemi di tipo aritmetico), come attività di recupero facevo svolgere alla classe le attività sotto esposte.

Attività 1.1

Analizzare il testo, individuando ciò che ha un significato matematico e usando evidenziatori colorati per classificare quanto individuato. I ragazzi mostravano un risultato simile al seguente:

Trovare il **perimetro** di un **rettangolo**, la cui **base misura** 6 cm, **equivalente** a un **trapezio isoscele** col **perimetro di** 40 cm, **altezza di** 4 cm e **lato obliquo di** 5 cm.

Usavamo il rosso per l'obiettivo finale (**perimetro**), il verde per gli elementi dati (tra cui **perimetro**). Guidavo i ragazzi a comprendere che la stessa parola assume ruoli

dipendenti dalla figura a cui si riferisce e che a una parola (in questo esempio **misura**) si possono sostituire preposizioni, da evidenziare con lo stesso colore.

I ragazzi osservavano che anche parole trascurabili hanno un significato matematico e possono indicare la richiesta del problema o le relazioni tra quanto già evidenziato...

Attività 1.2

Modificare il testo, sostituendo alcune parole in modo da renderne più esplicito il significato.

I ragazzi ottenevano, ad esempio:

Trovare (=calcolare) il **perimetro (=somma delle lunghezze dei lati)** di un **rettangolo**, la cui **base misura 6 cm**, **equivalente (=con area uguale)** a un **trapezio isoscele** col **perimetro(=somma delle lunghezze dei lati) di 40 cm**, **altezza di 4 cm** e **lato obliquo di 5 cm**.

Attività 1.3

Sull'ultimo testo o su quello originale, isolare le diverse richieste, individuando eventuali obiettivi intermedi, come segue:

Trovare il **perimetro di un rettangolo**, la cui base misura 6 cm, equivalente (domanda implicita: **area delle due figure**) a un trapezio isoscele col perimetro di 40 cm, altezza 4 cm e lato obliquo 5 cm (domanda implicita: **somma delle basi**).

Attività 1.4

Riscrivere il testo, frazionandolo in sottoproblemi con unica richiesta:

- Un trapezio isoscele ha i lati obliqui di 5 cm e il perimetro di 40 cm: calcola la somma delle basi.
- L'altezza del trapezio misura 4 cm: calcola l'area.
- Un rettangolo ha la stessa area del trapezio e la base di 6 cm: calcola l'altezza.
- Calcola il perimetro del rettangolo.

Al termine dell'Attività 1.4, si ottengono 4 problemi che, per essere risolti, richiedono una sola formula ciascuno: il successo è ora dipendente solo dalla comprensione e memorizzazione di tali formule, e dalle abilità di calcolo. Facevo inoltre raccogliere progressivamente a ogni alunno le sue diverse formulazioni del

problema sullo stesso foglio, opportunamente titolate. Questo accorgimento consentiva rapidi confronti tra le diverse stesure, evitando la scarsa fruibilità delle informazioni causata da uno svolgimento troppo zelante dell'Attività 1.2.

Durante l'Attività 1.1, eliminavo la confusione di colori fornendo agli alunni un foglio col testo riprodotto più volte, su cui evidenziare separatamente le figure, i dati riferiti alla prima di esse, ecc. In presenza di testi molto densi di informazioni, l'Attività 1.2 veniva sostituita dalla stesura di un glossario; spesso si stendeva anche l'elenco delle formule che i ragazzi ritenevano di dover usare.

Con le attività su esposte cercavo di fornire ai ragazzi una metodologia di lavoro che sintetizzavo così: "Se non si sanno le risposte, bisogna almeno sapere le domande!"

Il problema dell'ESEMPIO 1 presenta un'altra possibile causa di insuccesso: non è necessaria la misura delle singole basi del trapezio, ma solo la loro somma! Trovare questa richiede solo una addizione e una sottrazione, mentre trovare la misura delle singole basi richiede l'applicazione del teorema di Pitagora su opportuni triangoli rettangoli che bisogna saper individuare.

Dando direttamente ai ragazzi il testo finale ottenibile nell'Attività 1.4, i risultati della prova sarebbero senz'altro migliori. Perché allora non darlo sempre e direttamente così? Le motivazioni sono le seguenti:

- chi lo affronta dimostra solo il suo livello di conoscenze e abilità;
- le attività da 1 a 4, invece, sviluppano competenze;
- saper ottenere un testo simile a quello dell'Attività 4 è un traguardo che si deve rendere raggiungibile al maggior numero possibile di ragazzi.

ESEMPIO 2

Il testo che segue è tipico delle prove scritte di matematica agli esami di licenza della scuola secondaria di primo grado e degli esercizi che in vista di tale prova si assegnano "per allenamento". In questa formulazione sono ridotti al minimo i rischi di scarsa comprensione del testo; se vi fossero comunque difficoltà, si può procedere come nell'ESEMPIO 1.

Un trapezio isoscele ha base maggiore di 18 cm, base minore di 12 cm e altezza di 4 cm. Il trapezio viene fatto ruotare intorno al suo asse di simmetria: trovare la superficie totale del solido che si ottiene.

In tale problema, il solido che si ottiene è un tronco di cono: certamente ci sarà in classe chi non ricorda o non conosce le formule adatte e non è in grado di ricavarle, servendosi di similitudini. Con altri testi, in cui il trapezio venisse fatto ruotare intorno a una base (dando origine a due coni e a un cilindro) per evitare figure tronche, potrebbero tuttavia presentarsi:

- difficoltà di rappresentazione delle figure solide ottenute;
- difficoltà nel riconoscere il ruolo che gli elementi del trapezio assumono nel solido;
- difficoltà relative alla geometria piana, nel riconoscere la necessità di applicare il teorema di Pitagora o di ricorrere alla similitudine.

Le difficoltà di rappresentazione sono state superate da numerosi miei allievi grazie all'uso di software di geometria dinamica. Per le altre, ho cominciato a vedere dei miglioramenti quando, ipotizzando che fosse utile guidare gli allievi a una corretta interpretazione della figura, ho pensato ad altre situazioni in cui, in precedenza, avevo rilevato difficoltà analoghe e ho notato che queste si erano presentate con la stessa frequenza. Ho provato, perciò, in seguito, a risolvere per tempo tali situazioni e ciò ha portato un effettivo beneficio. Le situazioni su cui ho riflettuto di più sono discusse nei prossimi esempi: in sostanza mi è sembrata una buona idea cominciare per tempo a educare a “vedere in geometria”.

ESEMPIO 3

L'origine di questo esempio sta nell'aver osservato che frequentemente i miei alunni riproducevano approssimativamente le figure presentate alla lavagna o sul libro di testo. Unica laureata in matematica tra gli otto docenti della mia scuola (secondaria di primo grado), curavo i test d'ingresso alla classe prima e, per 6 anni consecutivi, dal 1991 al 1997, vi ho inserito la richiesta di ricopiare le figure riportate di seguito (Figure

1a e 1b). La consegna era fornita a voce. Si chiedeva di riprodurre le figure, da carta quadrettata a carta quadrettata: la quadrettatura dei fogli da cui copiare (consegnati a ciascun ragazzo) era di 0,4 cm, mentre il foglio su cui copiare le figure aveva una quadrettatura di 0,5 cm. Nel replicare le figure, si specificava la necessità di rispettare gli incroci della quadrettatura, senza l'obbligo di mantenere le distanze tra le figure, mentre doveva esser mantenuto il loro ordine nel foglio.

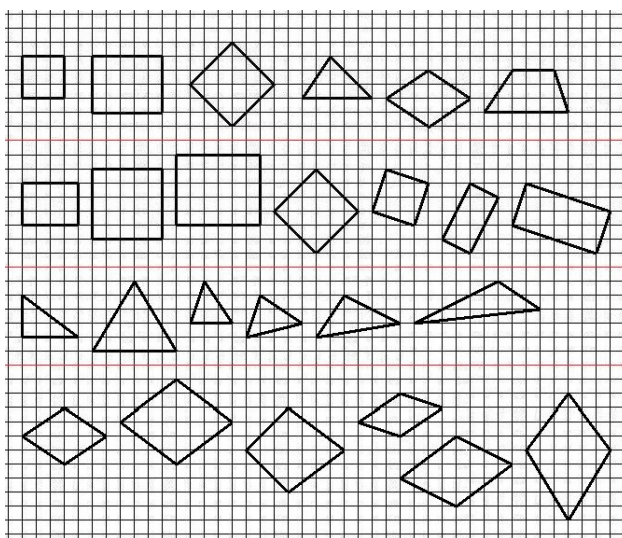


Figura 1a.

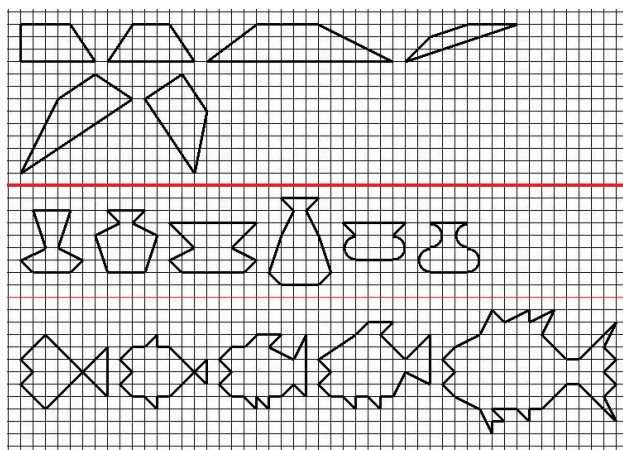


Figura 1b.

Considerando l'età dei ragazzi e la apparente semplicità del compito, gli esiti sono stati molto inferiori alle aspettative: in oltre il 25% dei casi, le riproduzioni contenevano errori. Ad esempio, nella prima riga della Figura 1a, il quadrato al

terzo posto e il rombo al quinto posto venivano scambiati, oppure entrambi riprodotti allo stesso modo (due quadrati o due rombi); nella stessa riga, il triangolo e il trapezio non di rado venivano riprodotti isosceli; nella quarta riga, spesso i quadrilateri venivano copiati come fossero rombi, alcuni dei quali congruenti alla seconda figura della stessa riga.

Nella Figura 1b, sono risultate particolarmente difficili da riprodurre le figure aventi un lato che attraversa vari quadretti, senza appoggiarsi alle linee della griglia; la difficoltà è stata particolarmente riscontrata quando vi era molta differenza tra il numero di quadretti attraversati in verticale rispetto a quelli in orizzontale, indipendentemente dalla forma da riprodurre. Si osservino il quarto “vaso” e l'ultimo “pesce” nella Figura 1b: i segmenti evidenziati nella Figura 1c (e i loro simmetrici) venivano molto frequentemente riprodotti allineati.

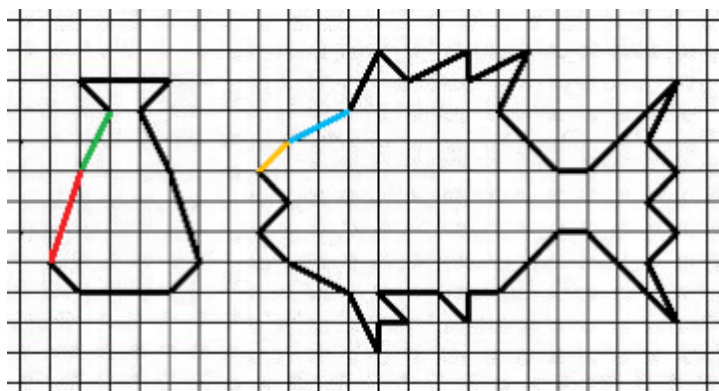


Figura 1c.

Come giustificazione di questi errori e della loro notevole frequenza, si possono ipotizzare le seguenti cause:

1. mancanza di una strategia;
2. scarsa attenzione;
3. scarsa capacità di controllo.

In definitiva, frequentemente l'esecutore si accontentava di un risultato somigliante al modello da riprodurre, del quale conservava solo alcune caratteristiche o aumentava inconsapevolmente le proprietà. Il tutto può sembrare

irrilevante, ma si tenga conto del fatto che l'approssimatività nel disegnare una figura può compromettere, soprattutto nei soggetti più deboli, sia l'apprendimento, sia la risoluzione di problemi di tipo geometrico, senza contare che la prima possibile conseguenza sarà la difficoltà a operare correttamente nel piano cartesiano. Per evitare ciò, svolgevo le attività di recupero di seguito descritte.

Attività 3.1

Dato un insieme di figure, simili a quelle della Figura 2, disegnate su carta quadrettata, si chiede agli allievi di descriverle, specificando le eventuali relazioni tra i lati (che possono essere tra loro congruenti, paralleli, perpendicolari,...) e quelle tra gli angoli (che possono essere tra loro congruenti, supplementari,...).

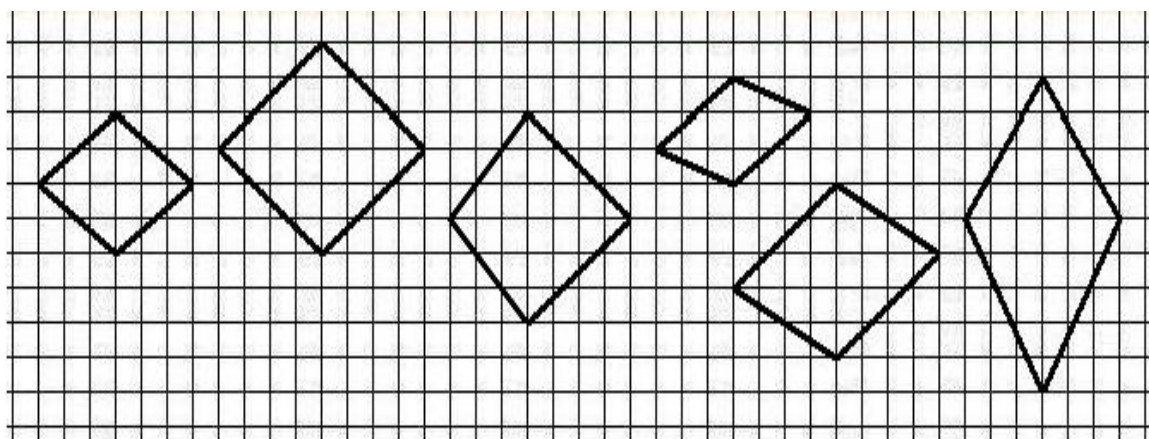


Figura 2.

Lo scopo dell'attività era di migliorare l'autocontrollo, insegnando agli alunni come controllare la correttezza dei propri lavori verificando che nelle riproduzioni comparissero tutte e sole le caratteristiche presenti nei modelli.

Attività 3.2

Dati dei segmenti disegnati su carta quadrettata come in Figura 3a e in Figura 3b, si chiede agli allievi di considerarli, uno alla volta. Fissato un estremo del primo segmento, dal quale iniziare, si chiede all'allievo di descrivere il percorso per raggiungere l'altro estremo dello stesso segmento, muovendosi lungo i lati della griglia.

Le risposte corrette saranno, ad esempio:

- 7 a destra e 4 in alto;
- 5 in giù e 9 a destra.

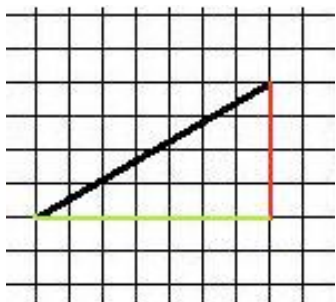


Figura 3a.

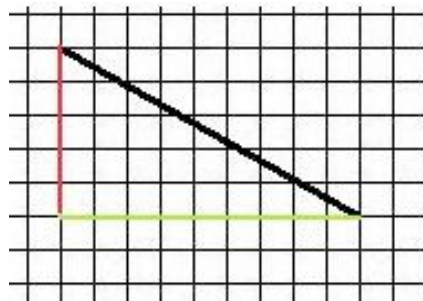


Figura 3b.

Lo scopo dell'attività era di suggerire una strategia che sarebbe tornata utile per disegnare rette nel piano cartesiano, come ad esempio quelle di equazioni:

$$y = \frac{4}{7}x + 1$$

$$y = -\frac{5}{9}x + 1$$

Le attività di descrizione di percorsi hanno avuto fortuna negli anni in cui diversi progetti di informatica prevedevano l'uso di LOGO, soprattutto alla scuola primaria. Descrizioni analoghe vengono tuttora fatte, sempre alla scuola primaria, nell'ambito dell'educazione motoria o nel primo approccio alla geometria, ma sono riferite a percorsi realmente compiuti dai bambini: esiti sistematicamente corretti in queste situazioni, non garantiscono analogo successo quando si passa dallo spazio fisico alla rappresentazione su carta quadrettata.

A proposito delle rette nel piano cartesiano, infine, si confrontino i coefficienti angolari delle due equazioni portate a esempio, con le precedenti descrizioni dei percorsi: se si spiega il significato di tali coefficienti utilizzando l'idea del percorso per andare da un punto dato della retta a un altro punto della stessa retta, si dà agli allievi un modo facile per disegnare (senza calcoli!) "molti" punti della retta.

Sembrerebbe che l'esecuzione delle cosiddette "cornicette", allo scopo di migliorare l'attenzione, possa prevenire l'insorgere della difficoltà di cui si tratta in questo esempio: a conferma di ciò, una classe quinta che aveva in precedenza eseguito molte "cornicette" ha affrontato senza errori questo lavoro, tranne una bambina con forte astigmatismo. L'idea potrebbe trovare ulteriore conferma nel fatto che, negli anni in cui ho sistematicamente rilevato tali difficoltà, questa attività nella scuola primaria non era "di moda". Le esecuzioni scorrette prima descritte erano spesso collegabili (anche se non con certezza) a errori sugli angoli. Ho in seguito potuto lavorare sul tema degli angoli con i tempi e i ritmi permessi alla scuola primaria, ma impensabili alla scuola media, trovando appoggio all'ipotesi delle difficoltà sugli angoli³⁷.

ESEMPIO 4

Assegnavo sistematicamente il seguente compito per casa alle mie classi terze, nello studio dei poliedri:

Costruire la struttura di un cubo, usando cannuce da bibita per rappresentare gli spigoli.

Le cannuce erano state già ampiamente utilizzate in seconda, per lo studio di poligoni con attività tutte basate sul fatto che la struttura di un quadrilatero è deformabile (mentre quella di un triangolo è rigida), se le cannuce che ne rappresentano i lati sono collegate infilandovi del filo elastico³⁸. In terza, i poliedri regolari venivano studiati come indicato in (Rocco 1989); poi iniziava in classe il lavoro con le cannuce, con la costruzione di tetraedri e ottaedri regolari, mentre il cubo e l'icosaedro venivano dati da costruire a casa. Ogni anno, metà della classe dichiarava di non aver eseguito il compito, mentre gli altri esibivano il loro lavoro rammaricandosi che *il cubo non stava in piedi*: i ragazzi, evidentemente, non facevano ricorso alle esperienze precedenti.

³⁷ Cfr. ONOFRIO, ROCCO 2009.

³⁸ Cfr. ROCCO 1996, ROCCO 2002, ONOFRIO, ROCCO 2009.

Da qui partiva la discussione, rammentando le esperienze con le cannuce dell'anno prima ed esaminando la possibilità di rendere indeformabili la struttura del cubo e di altri poliedri. L'errore diventava, così, spunto di riflessione su quanto già appreso e occasione di approfondimento.

Mi sembra, però, che la difficoltà rilevata in questo esempio sia di tipo diverso rispetto alle precedenti, e che non sia da collegare a mancati o incerti apprendimenti, quanto piuttosto alla capacità di farvi ricorso in contesti diversi.

ESEMPIO 5

Anche quest'ultimo esempio si riferisce allo studio dei poliedri e consiste in un compito che veniva assegnato in terza:

Disegnare lo sviluppo di una piramide a base romboidale, assegnate le misure delle diagonali di base e dell'apotema laterale.

I ragazzi eseguivano autonomamente il compito e venivano poi invitati a ritagliare il loro sviluppo del solido, per costruire la piramide... che, regolarmente, non riusciva! Infatti, praticamente sempre, il loro lavoro prevedeva triangoli isosceli come facce laterali della piramide (cfr. Fig. 4).

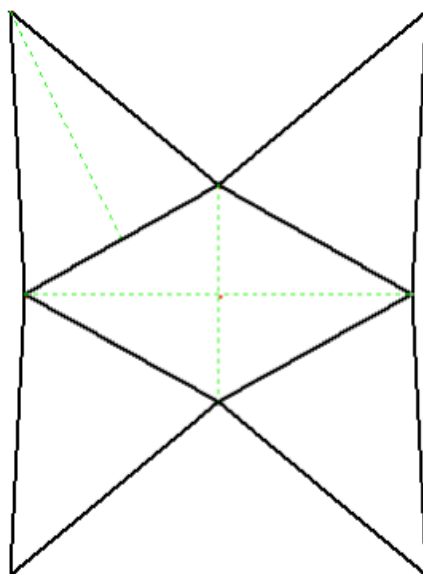


Figura 4.

La causa di questo errore sta nell'aver trascurato il legame tra gli apotemi (laterale e di base), che risulta invece più evidente in una rappresentazione assonometrica o prospettica del solido in questione: la difficoltà, dunque, si potrebbe rimuovere semplicemente esaminando una di tali rappresentazioni. Ritengo, però, che l'apprendimento da parte dei miei alunni, in questo contesto, sia stato più significativo, proprio perché derivato dalla necessità di correggere un risultato che li aveva inaspettatamente delusi.

3. RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Tutti gli esempi prima riportati riferiscono difficoltà rilevate nel corso della mia carriera, con frequenza tale da attirare la mia attenzione. Tutte le attività prima descritte sono state sperimentate, producendo misurabili miglioramenti, con alunni che vanno dalla prima alla terza classe della scuola secondaria di primo grado. Nel complesso, le affermazioni contenute nel presente scritto sono derivate dall'osservazione di circa 3.000 allievi di scuola secondaria di primo grado, come illustrato in Tabella 1.

Tabella 1.

<i>Classe</i>	<i>N° allievi</i>
I	1.500
II	500
III	1.000

Riguardo agli allievi considerati, visto che:

- il loro numero è piuttosto elevato;
- essi sono stati osservati in un lungo arco temporale (maggiore di 20 anni);

- i loro luoghi di residenza, benché variamente distribuiti, coprivano l'intera Provincia di Trieste;
- la loro estrazione socio-culturale aveva una distribuzione varia e simile a quella dell'intera popolazione provinciale;
- gli alunni delle seconde e delle terze avevano avuto in precedenza, nella scuola secondaria di primo grado, almeno 30 insegnanti di matematica diversi, e quelli delle prime provenivano da un numero ben maggiore di insegnanti diversi di scuola primaria,

ritengo che si possa congetturare, con buona probabilità di successo, che le difficoltà qui evidenziate a livello di scuola secondaria di primo grado siano diffuse in modo significativo in tutta la popolazione della Provincia di Trieste.

La rilevanza statistica delle mie osservazioni a livello di scuola secondaria di primo grado dovrebbe mettere in stato d'allarme gli insegnanti di scuola primaria e di scuola dell'infanzia.

Con ciò intendo dire che, se da un lato i nodi vengono al pettine soprattutto negli ultimi due anni della scuola secondaria di primo grado, quando il programma di geometria è più corposo e complesso, dall'altro è ipotizzabile che sia possibile una sorta di prevenzione, rendendo più ricche e precoci le esperienze di tipo geometrico. Su questa idea sto lavorando da alcuni anni, avendo la possibilità di collaborare con docenti di scuola dell'infanzia e di scuola primaria.

Vorrei infine concludere con la seguente osservazione. Il punto sul quale poggia tutto il lavoro qui descritto e quello che continuo a fare, si può sintetizzare come segue: rilevando difficoltà nei miei allievi, all'ovvia domanda che facevo a me stessa: "Ho spiegato bene?", ho sempre aggiunto la seguente: "Ma io, per capire, di cosa ho avuto bisogno?". Ero e rimango convinta del fatto che chi è in grado di rispondere alla seconda domanda, riuscirà a trovare il modo per "spiegare bene".

BIBLIOGRAFIA

Ministero della Pubblica Istruzione

2007, *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*, Roma.

ONOFRIO E., ROCCO M.

2009, *Alla scoperta dei quadrilateri. Un percorso di geometria attraverso l'esperienza manipolativa*, in ZUCCHERI L., GALLOPIN P., ROCCO M., ZUDINI V. (a cura di), «La matematica dei ragazzi, scambi di esperienze tra coetanei. Edizione 2008», Trieste, EUT, pp. 30-42.

ROCCO M.

2009, *Non si finisce mai*, in ZUCCHERI L., GALLOPIN P., ROCCO M., ZUDINI V. (a cura di), «La matematica dei ragazzi, scambi di esperienze tra coetanei. Edizione 2008», Trieste, EUT, pp. 122-128.

2002, *Figure piane e CABRI: alcune proprietà di poligoni viste al calcolatore*, in ZUCCHERI L., LEDER D., SCHERIANI C. (a cura di), «La matematica dei ragazzi, scambi di esperienze tra coetanei. Antologia delle edizioni 1996 - 1998», Trieste, EUT, pp. 113-130.

1996, *Gli strumenti modificano le capacità argomentative?*, in GRUGNETTI L., IADEROSA R., REGGIANI M. (a cura di), «Argomentare e dimostrare nella scuola media», Atti del XV° Convegno Nazionale dei Nuclei di Ricerca in Didattica della Matematica, Pavia, SE.A.G.

1989, *Un itinerario per geometria solida nella scuola media*, «L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate», vol. 12 n.2, pp. 291-296.