A Lucio Crisma
Luciano Daboni
Rodolfo Permutti
con gratitudine

978-88-8303-852-5 (online)

EUT Edizioni Università di Trieste
via Weiss 21, 34128 Trieste
http://eut.units.it
https://www.facebook.com/EUTEdizioniUniversitaTrieste

Silvano Holzer

DEAMS - Università degli Studi di Trieste

Leggendo Jakob Bernoulli: *Ars Conjectandi, 1713*

Testo dell'"Ultima lezione"(13 dicembre 2016)

Nel decennio che va dal 1708 al 1718, apparvero tre "pietre miliari" del percorso intrapreso da quella che può ritenersi una delle più profonde trasformazioni ideologiche del pensiero scientifico: la "rivoluzione probabilistica".[1] Vennero infatti pubblicati *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (Parigi, 1708) di Pierre R. de Montmort, *The doctrine of chances, or, a method of calculating the probability of events in play* (Londra, 1718) di Abraham De Moivre e *Ars Conjectandi* (Basilea, 1713) di (Jakob) Bernoulli (1654-1705), il primo e il più celebre dei valenti matematici che hanno fatto parte della famiglia Bernoulli[2].

Non è chiaro quando Bernoulli iniziò ad interessarsi al calcolo delle probabilità e alle sue applicazioni alla vita reale. Secondo suo fratello Johann, egli iniziò la stesura dell'*Ars Conjectandi* attorno al 1690 e riprese il lavoro, dopo alcune interruzioni, nel corso degli ultimi due anni della sua vita durante i quali tenne una intensa corrispondenza con Gottfried W. Leibniz (che si era interessato di creare una logica dei gradi di probabilità) attorno alle principali idee sull'arte della congettura[3]. Ciò è comprovato anche dalla lettera a

[1] Intesa come matematizzazione (interpretazione numerica) della nozione di probabilità. Nozione che originariamente era intesa, nella filosofia e teologia scolastiche, come quel particolare attributo dell'*opinione* che deriva dall'approvazione di una o più autorità indiscutibili; essere probabile per un fatto significava quindi sia avere l'*approvazione*, che la *rettitudine* delle autorità che l'hanno accettato. I notevoli cambiamenti economici e politici dei secoli XVI e XVII generarono una profonda crisi culturale, sia teologica (connessa con le diatribe tra Riforma e Controriforma) che epistemologica (relativa alle dispute tra la scienza dogmatica scolastica e la nascente scienza sperimentale). La perdita della certezza assoluta comportò che la nozione di probabilità diventasse, sempre di più, intesa come la conoscenza parziale della certezza che l'uomo acquisisce tramite le osservazioni. In questo contesto culturale negli anni 1654-1657 si sviluppò, grazie a Blaise Pascal e Pierre de Fermat in Francia e Christiaan Huygens in Olanda, un'analisi attenta dei giochi d'azzardo che è origine e punto di riferimento dell'"esplosione" avvenuta nel decennio considerato.

[2] Il fratello Johann (1667-1748); il nipote Nikolaus (1687-1759) che pubblicò, a 13 anni dalla morte dello zio, l'*Ars Conjectandi*; i nipoti (figli di Johann), Nicholas (1695-1726), Daniel (1700-1782), che operò la distinzione tra speranza matematica e speranza morale, e Johann (1710-1790); i figli di quest'ultimo, Johann (1746-1807) e Jakob (1759-1789).

[3] Analizzata in Edith Dudley Silla, *The emergence of mathematical probability from the*

Leibniz del 3 ottobre 1703, di cui riportiamo uno stralcio, che è anche una splendida introduzione alle motivazioni che hanno spinto Bernoulli a scrivere l'*Ars Conjectandi*.

Da molti anni mi sono dilettato a meditare sulla teoria della stima delle probabilità, tanto da non credere che qualcun altro abbia pensato più di me su tale argomento. Avevo, anzi, in animo di scrivere un trattato sulla materia; ma spesso dovetti metterne da parte il manoscritto, essendo la naturale mia pigrizia enormemente aggravata dalla malattia.*[omissis]* Ne ho in ogni modo steso la massima parte, ma rimane ancora da completare una parte importante, in cui insegno ad applicare i principi dell'arte della stima alle materie civili, morali ed economiche. Terminero la stesura dopo aver risolto un certo problema di non piccola difficoltà ma di grande utilità, di cui già da più di dodici anni ho messo al corrente mio fratello [Johann],*[omissis]*.

Le dico brevemente quale è il problema: è noto che la probabilità di ogni evento dipende dal numero dei casi possibili in cui può verificarsi o non verificarsi. Così mi sono chiesto perchè, ad esempio, sappiamo con quanta maggiore probabilità un sette piuttosto che un otto esce quando si lancia una coppia di dadi, e inoltre perchè in effetti *non* conosciamo quanto sia più probabile per un giovane uomo di vent'anni sopravvivere ad un vecchio di sessant'anni, e per un vecchio uomo di sessant'anni sopravvivere a un giovane di vent'anni. Questo è il punto: nel lancio dei dadi conosciamo sia il numero dei casi in cui può uscire un sette che quello in cui può uscire un 8, ma non sappiamo il numero di casi possibili in cui un giovane muore prima di un vecchio e in cui un vecchio muore prima di un giovane.

Mi sono pertanto chiesto se quel numero dei casi possibili che *a priori* ci è sconosciuto non si possa determinare *a posteriori* mediante molte osservazioni, sulla base di quanto è avvenuto in esempi simili, cioè da un esperimento condotto su molte coppie di uomini giovani e vecchi. Avendo osservato, ad esempio, che contro 1000 casi in cui muore prima il vecchio, se ne riscontrano 500 in cui al contrario muore prima il più giovane, potrei abbastanza tranquillamente concludere che la probabilità di premorienza del più vecchio sia doppia rispetto a quella del più giovane. Inoltre, anche - e questo è incredibile - la più stupida delle persone sa, per non so quale istinto di natura e senza nessuna istruzione precedente, che più cresce il numero delle osservazioni, minore è il pericolo di allontanarsi dal vero[4]; tuttavia

perspective of the Leibniz-Jacob Bernoulli correspondence, Perspectives on Science, **6**(1-2), 1998, pp. 41-76.

[4]È la cosiddetta LEGGE EMPIRICA DEL CASO: in una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza [relativa] che è press'a poco uguale alla sua probabilità. L'approssimazione cresce ordinariamente col crescere del numero delle prove (Guido Castelnuovo, *Calcolo*

darne accurata dimostrazione geometrica [matematica] è indagine tutt'altro che spregevole.

Mi sono proposto peraltro di ricercare se la probabilità di un accurato rapporto aumenti costantemente con il crescere del numero delle osservazioni, così che alla fine la probabilità di aver trovato il rapporto vero piuttosto che uno falso supera ogni probabilità. Oppure se ogni problema, per così dire, possiede un asintoto - cioè se alla fine avrò raggiunto un certo livello di probabilità oltre il quale non posso essere più certo di aver scoperto il vero rapporto. In quest'ultimo caso sarebbe vano il tentativo di desumere empiricamente la probabilità dal numero dei casi osservati, nel primo invece studieremo il rapporto tra il numero dei possibili risultati *a posteriori* con tutta la certezza come se ci fosse noto quello *a priori*.

Ho trovato che il primo caso è quello vero; sono così in grado di determinare il numero delle osservazioni da fare affinchè risulti 100, 1000, 10000, etc. volte più probabile (e quindi alla fine moralmente certo) che il rapporto tra il numero dei possibili risultati ottenuti in questo modo sia legittimo e genuino. E ciò è sufficiente affinchè le nostre previsioni, in qualsiasi situazione possa verificarsi nella vita civile, siano guidate non meno scientificamente che nei giochi d'azzardo.[5]

L'*Ars Conjectandi* è costituita da quattro parti che ora andiamo a descrivere, trattando le prime tre per sommi capi e dedicando alla quarta - indubbiamente la più importante per gli sviluppi successivi del calcolo delle probabilità - particolare attenzione, dando spazio ad ampi stralci del testo.[6]

---

delle Probabilità, Società editrice Dante Alighieri, 1919, p. 3).

[5]Bing Sung, *Translations from James Bernoulli*, Tech. Rep. No.2, Department of Statistics, Harvard University, 1966, pp. 23-24.

La lettera venne scritta da Bernoulli in risposta a quella di Leibniz dell'aprile 1703 che, in un *Postscriptum*, lo esortava a dedicarsi alla stima numerica della probabilità: "Ho sentito dire che si occupa non poco della teoria della stima delle probabilità, di cui faccio gran conto. Vorrei che qualcuno trattasse matematicamente dei vari giochi [d'azzardo], che di tale teoria offrono begli esempi. Questo compito sarebbe argomento attraente e ad un tempo utile, e non indegno di lei o di qualunque altro serissimo matematico" (*ibidem*, p. 23).

[6]Mi sono avvalso del testo originale in latino (Biblioteca Generale, Università degli Studi di Trieste) recuperabile in rete all'indirizzo books.google.it. Per la quarta parte ho consultato le versioni inglesi di Sung, *ibidem*, e di Oscar Sheynin, *Jakob Bernoulli. On the law of large numbers*, Berlino, 2005 (www.sheynin.de/download/bernoulli.pdf); la versione italiana (traduzione della versione tedesca di H. Haussner, 1899) di Antonello Sciacchitano, *Jacob Bernoulli. Ars Conjectandi* (www.sciacchitano.it/Corpo/Ars%20conjectandi.pdf).

Per la prima parte, mi sono rivolto a Pascal Dupont e Clara Silvia Roero, *Il trattato "De ratiociniis in ludo aleae" di Christiaan Huygens con le "Annotationes" di Jacob Bernoulli ("Ars conjectandi", parte I) presentati in traduzione italiana, con commento storico critico e risoluzioni moderne*, Memorie della Accademia delle Scienze di Torino, I. Classe di Scienze

Pars Prima: *Tractatum Hugenii de Ratiociniis in Ludo Aleæ, cum annotationibus Jacobi Bernoulli* consiste nella ristampa del trattato di Christiaan Huygens *De Ratiociniis in Ludo Aleæ*[7], completato con la soluzione dei cinque problemi di giochi di dadi, carte e urne lasciati aperti dall'olandese e con numerosi e importanti commenti e estensioni di risultati noti (che ampliano il testo originale di ben quattro volte). A fondamento del lavoro, Huygens (e quindi Bernoulli) pone l'assioma seguente (p. 3):

> Prendo come fondamento che in un gioco d'azzardo, la *expectatio* di un giocatore di ottenere qualcosa deve essere valutata come quella quantità tale che, se egli la possedesse, potrebbe nuovamente pervenire alla stessa *expectatio* con un gioco equo.[8]

che precisa sia la nozione di *expectatio* che la sua valenza operativa.

Una importante conseguenza dell'assioma è il risultato seguente (p. 7) che sarà per Bernoulli lo strumento chiave onde ottenere una valutazione numerica della probabilità, come vedremo nel capitolo terzo della parte quarta.

Fisiche, Matematiche e Naturali, Serie V, **8**(I-II), 1984, pp. 1-258.

[7]Pubblicato nel 1657 ad Amsterdam come appendice al quinto volume del testo *Exercitationum Mathematicarum* di Frans van Schooten. Pur essendo considerato come il primo trattato matematico della probabilità, nel testo non compare mai la parola "probabilità", in quanto l'obiettivo dell'autore è quello di valutare il "giusto prezzo"(denominato *expectatio*) di un gioco d'azzardo.

[8]Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid obtinendum, quantum si habeat, possit denuò ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans.

Huygens non precisa cosa si debba intendere per "gioco equo", ma l'analisi del suo lavoro induce a ritenere che lo identifichi con un gioco d'azzardo che "non miri a danneggiare nessuno dei giocatori". A questo proposito è interessante osservare che la richiesta di equità per i giochi d'azzardo era, da tempo, ritenuta una condizione essenziale. Infatti, Gerolamo Cardano inizia il capitolo sesto dell'opera *De ludo aleæ* (1520; pubblicato postumo a 87 anni dalla morte in *Opera Omnia* ad Amsterdam nel 1663; pp. 262-275), dedicata ai giochi dei dadi e delle carte, scrivendo (p. 263):

> Est autem, omnium in Alea principalissimum, æqualitas, ut pote collusoris, astantium, pecuniarum, loci, fritilli, Aleæ ipsus. Et quantumcumque declinaveris ab ea æqualitate adversum te, stultus es, et pro te iniustus.

cioè, il principio fondamentale del gioco d'azzardo è l'equità, che dovrebbe applicarsi ai giocatori e agli spettatori, al denaro e al luogo, ai fritilli (bussolotti usati per il lancio dei dadi) e al dado stesso. Qualora ci si allontani da questa equità a tuo svantaggio sei stolto, a tuo favore ingiusto.

Propositio III: Se in p casi posso ottenere a ed in q casi posso ottenere b ed ammetto che tutti i $p+q$ casi possano aver luogo con uguale facilità, allora la mia *expectatio* è $\frac{pa+qb}{p+q}$.[9]

A commento, Bernoulli nello *Scholium* (p. 10) collega la *expectatio* così ottenuta con la formula aritmetica adoperata dai mercanti per determinare il prezzo di una miscela di ingredienti.

È chiaro che questo calcolo ha grande affinità con la regola aritmetica detta *della mistura* [*alligationis*], secondo la quale si determina il prezzo della miscela di cose aventi prezzi diversi in quantità determinate. Infatti, i due calcoli sono chiaramente la stessa cosa. Così come la somma dei prodotti delle quantità per i prezzi associati relativi a ogni singolo ingrediente, diviso per la quantità totale di tutti gli ingredienti, dà il prezzo richiesto, che è sempre intermedio tra il prezzo più alto e quello più basso; allo stesso modo la somma dei prodotti del numero di casi per la quantità acquisita in tali casi, diviso per il numero totale degli stessi, fornisce il valore della *expectatio*, che è sempre intermedia tra la più grande e la più piccola quantità che si può acquisire.

Per cui, se sono sommati gli stessi numeri, là relativi alle quantità dei componenti la miscela e ai loro prezzi, qui relativi ai numeri dei casi ed ai corrispondenti

[9]Per comprendere il tipo di ragionamento seguito da Huygens, ne riportiamo la dimostrazione (Dupont e Roero, *op.cit.*, p. 63-64): "Per scoprire questa regola, si ponga di nuovo uguale ad x la mia *expectatio*. Bisogna allora che possedendo x, io possa, come prima, pervenire alla stessa *expectatio* con un gioco equo. Considero, a questo scopo, $p+q-1$ compagni di gioco, il quale si effettuerà quindi fra $p+q$ giocatori. Ciascun giocatore depone la somma x, per cui l'intera posta risulta $px+qx$ ed ognuno gioca, per conto suo, con uguale prospettiva di vincere. Inoltre, con q compagni di gioco convengo che ciascuno di loro, se vince il gioco, mi deve dare la somma b, e viceversa, io devo dargli la stessa somma b, se vinco io. Analogamente, con ciascuno dei rimanenti $p-1$ giocatori stabilisco che ciascuno di loro mi deve dare a, se vincerà il gioco, mentre io dovrò dare a lui la stessa somma (cioè a), se sarò io il vincitore. È evidente che, sotto queste condizioni, il gioco è equo, cioè che nessun giocatore è in svantaggio nei confronti degli altri. Inoltre risulta che io ora ho q possibilità di ottenere la somma b e $p-1$ possibilità di ottenere la somma a ed un sol caso (s'intende, quando sono io che vinco) di ottenere la somma $px+qx-qb-(p-1)a$; in quest'ultimo caso, infatti, ritiro $px+qx$, ossia la posta, ma devo dare a ciascuno dei q giocatori la somma b ed a ciascuno dei $p-1$ giocatori la somma a, cioè in totale devo dare ai $p+q-1$ giocatori la somma $qb+pa-a$. Se pertanto $px+qx-qb-(p-1)a$ fosse proprio uguale ad a, avrei p possibilità di ottenere a (poiché avevo già $p-1$ possibilità di ottenere questa somma) e q possibilità di ottenere b e così avrei di nuovo raggiunto la mia precedente *expectatio*. Pongo quindi $px+qx-qb-(p-1)a=a$ e la *expectatio* risulterà perciò $x=\frac{pa+qb}{p+q}$, come si doveva dimostrare.".

guadagni, allora ancora lo stesso numero indicherà là il prezzo della miscela e qui la *expectatio*.[10]

PARS SECUNDA: *Doctrinam de Permutationibus et Combinationibus*, utilizzata come libro di testo per la teoria delle combinazioni e permutazioni durante tutto il '700, fornisce un'esposizione chiara e completa sia dei risultati ottenuti in tale campo da van Schooten, Leibniz, John Wallis e Jean Prestet che nuovi risultati utili nelle applicazioni del calcolo delle probabilità. In particolare, viene provata la seguente relazione che consente di esprimere in forma chiusa la somma delle potenze di uguale esponente dei primi n numeri naturali come un polinomio in n:

$$\sum_{i=1}^{n} i^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \left(n+1\right)^{m+1-k},$$

ove i coefficienti $B_k = 1$, se $k = 0$, e $B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{h=0}^{k-1} \binom{k+1}{h} B_h$, se $k \geq 1$, sono stati chiamati, su suggerimento di De Moivre, *numeri di Bernoulli.*
PARS TERTIA: *Usum præcedentis Doctrinæin variis Sortitionibus et Ludis alæ* consiste nella soluzione dettagliata di 24 problemi relativi a giochi d'azzardo con dadi o carte, al fine di mostrare la portata applicativa dei risultati ottenuti nella parte precedente.
PARS QUARTA: *Usum et applicationem præcedentis Doctrinæ in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis* è divisa in cinque capitoli:
Caput I. *Preliminaria quædam de Certitudine, Probabilitate, Necessitate et Contingentia Rerum* (p. 210);
Caput II. *De Scientia et Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum. Axiomata quædam generalia huc pertinentia* (p. 213);
Caput III. *De variis argumentorum generibus, et quomodo eorum pondera æstimentur ad supputandas rerum probabilitates* (p. 217);
Caput IV. *De duplici Modo investigandi numeros casuum. Quid sentiendum de illo, qui instituitur per experimenta. Problema singulare eam in rem propositum, etc.* (p. 223);
Caput V. *Solutio Problematis præcedentis* (p. 228).
Vengono qui fornite le interpretazioni del concetto di probabilità e delle

[10] Per una approfondita analisi della relazione intercorrente tra l'aritmetica pratica dei mercanti e la nozione di *expectatio* di Huygens-Bernoulli, si veda Dudley Sylla, *Business ethics, commercial mathematics, and the origins of mathematical probability*, History of Political Economy, **35** (Suppl. 1), 2003, pp. 309-337.

nozioni connesse (Caput I). Inoltre, sono calcolate le probabilità relative sia ad alcuni tipi di argomenti dimostrativi che a combinazioni di argomenti differenti (Caput II e III[11]). Infine, viene collegata la probabilità alle osservazioni tramite il *theorema aureum* (attualmente denominato *legge dei grandi numeri di Bernoulli*) (Caput IV) e fornita una sua dimostrazione di carattere elementare, basata su cinque lemmi di natura essenzialmente aritmetico-analitica (Caput V).

Quest'ultima parte doveva anche contenere, come enunciato dal titolo, delle applicazioni del calcolo delle probabilità in civilibus, moralibus et oeconomicis, ma la morte improvvisa di Bernoulli ne impedì il compimento.[12]

Nel seguito riportiamo in corpo minore la traduzione italiana del testo che sarà integrale per i primi due capitoli e parziale per il terzo e quarto. Per quanto riguarda invece il quinto (di natura strettamente tecnica) ci limiteremo a riportare la dimostrazione del *theorema aureum*, un esempio numerico e il commento "metafisico" che Bernoulli fa del teorema.

Caput I

Questo capitolo è una specie di vocabolario etimologico nel quale Bernoulli chiarisce la sua interpretazione dei principali concetti relativi alla trattazione della casualità.

La *certezza* di qualunque cosa si può intendere: o *oggettivamente*, cioè in sé, e in questo caso non mostra altro che la reale, presente o futura presenza di quella cosa o *soggettivamente*, cioè in rapporto a noi, e in questo caso consiste nella misura della nostra conoscenza di quella realtà.[13]

[11] Nella stesura di questi due capitoli, Bernoulli segue da vicino il modello fornito dal più celebre testo di logica del '600: *La logique, ou l'art de penser* (pubblicato in forma anonima e attribuito ad Antoine Arnauld e Pierre Nicole, Parigi, 1662; trad.it., *Grammatica e logica di Port-Royal*, Ubaldini Editore, Roma, 1969). Viene quasi da pensare che egli intendesse la sua *Ars Conjectandi* come una prosecuzione dell'*Ars Cogitandi* (nome latino di *Art de Penser*), in particolare del tredicesimo capitolo della quarta parte: *De la méthode*.

[12] Per un'ampia raccolta di saggi sull'*Ars Conjectandi* e sulla sua influenza si veda *Journal Electronique d'Historie des Probabilités et de la Statistique*, **2**(1, 1 bis), 2006, e Glenn Shafer, *The significance of Jacob Bernoulli's Ars Conjectandi for the philosophy of probability today*, Journal of Econometrics, **75**, 1996, pp. 15-32.

[13] *Ceritudo* rei cujusvis spectatur vel *objective* et in se; nec aliud significat, quàm ipsam veritatem existentiæ aut futuritionis illius rei: vel *subjective* et in ordine ad nos; et consistit in mensura cognitionis nostræ circa hanc veritatem.(p. 210)

Un'analoga distinzione tra oggettivo e soggettivo viene introdotta, in termini di "verità", Tutto ciò che esiste o nasce sotto il sole - il passato, il presente o il futuro - ha in sé, e obiettivamente, la massima certezza. Rispetto alle cose presenti o passate questa affermazione si chiarisce da sola, dato che quelle cose, essendo presenti o essendolo state, escludono per il fatto stesso la possibilità che non esistano o non siano esistite. Tuttavia, per quanto concerne le cose future, non dovrebbe essere messa in dubbio [la massima certezza] in quanto, anche se non con l'inevitabile necessità di una fatalità, [le cose] dovranno verificarsi o meno secondo quanto la previsione e predeterminazione divine impongono. Infatti, se ciò che è futuro non avvenisse sicuramente, non si capirebbe perchè l'altissimo creatore dovrebbe godere della fama incondizionata di onnisciente e onnipotente. Ma su come questa certezza dell'essere futuro si concili con la casualità e l'indipendenza dalle cause efficienti, lasciamo agli altri la discussione. Noi non vogliamo addentrarci nella questione, la cui discussione non rientra nei nostri scopi.[14]

---

da Bruno de Finetti in *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico* (Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, IX(5), 1930) ove scrive (p. 1): "la "verità" di un'asserzione, di una proposizione, si può intendere in due modi: o, in senso obbiettivo, come conformità a una realtà esterna, concepita come indipendente da noi, o, in senso soggettivo, come conformità alle nostre proprie opinioni, impressioni, sensazioni.".

[14]La certezza oggettiva viene quindi interpretata nell'ambito di un determinismo di tipo teologico, ricorrendo ad una ipotesi metafisica di una necessità governata da una divinità onnisciente che, per sua natura, non ha alcuna incertezza, a differenza degli uomini. Questa impostazione è stata verosimilmente suggerita a Bernoulli, di fede protestante, dalla sua formazione teologica (voluta del padre) acquisita durante gli studi fatti presso l'università di Basilea, ove ottenne, nel 1676, la *Licentiam in Theologia*.

Al determinismo teologico di Bernoulli subentrò poi un determinismo di tipo meccanicistico - basato sul *principio di ragion sufficiente* di Leibniz (niente esiste senza una ragione sufficiente per cui esista invece di non esistere) - che ritiene i fenomeni naturali, ineluttabilmente sottoposti a leggi (non sempre conosciute) che governano l'origine del mondo e l'evoluzione. A questa concezione si rifà Pierre S. de Laplace che in *Essai philosophique sur les probabilités* (1795; trad.it., *Saggio filosofico sulle probabilità*, Edizioni Theoria, Roma, 1987) scrive (pp. 2-4): "Gli avvenimenti attuali hanno con i precedenti un legame fondato sul principio evidente che una cosa non può cominciare ad essere senza una causa che la produca. *[omissis]* Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa di quello futuro. Un'intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se inoltre fosse così vasta da sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero; nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi.".

Questo tipo di determinismo dominò la scienza dell'ottocento ed è presente anche nel '900, come appare da una celebre lettera di Albert Einstein, del 4 dicembre 1926, a Niels Bohr: "Tu ritieni che Dio giochi a dadi col mondo; io credo invece che tutto ubbidisca a una legge, in un mondo di realtà obiettive che cerco di cogliere per via furiosamente

La certezza [soggettiva] delle cose, quella relativa a noi, non è uguale in tutti ma varia di molto in più o in meno. Le cose di cui siamo certi per rivelazione, riflessione, percezione sensoriale, esperienza, autopsia [osservazione diretta] o per altri modi, cioè le cose per le quali non possiamo in alcun modo avere dubbi sulla loro esistenza presente o futura, possiedono per noi la certezza massima e assoluta. Tutte le altre cose contengono, a seconda della nostra conoscenza, una misura incompleta [di certezza], che può essere più grande o più piccola, a seconda che esistano maggiori o minori probabilità che una certa cosa sia stata, sia o sarà.

La *probabilità* è, infatti, un grado di certezza e si differenzia dalla certezza come la parte rispetto al tutto.[15] Ad esempio, se la certezza piena e assoluta, che indichiamo con a o con 1, è formata da cinque probabilità o parti [che possano aver luogo con uguale facilità], di cui tre sono a favore del verificarsi di un dato evento mentre le due rimanenti depongono contro, allora diremo che l'evento possiede $3/5a$ o $3/5$ di certezza.

Pertanto la cosa che possiede una parte di certezza maggiore rispetto a quella di un'altra è chiamata *più probabile*, anche se nell'uso linguistico comune viene detto

---

speculativa. Lo credo fermamente, ma spero che qualcuno scopra una strada più realistica o meglio, un fondamento più tangibile di quanto non abbia saputo fare io. Nemmeno il grande successo iniziale della teoria dei quanti riesce a convincermi che alla base di tutto vi sia la casualità, anche se so bene che i colleghi più giovani considerano quest'atteggiamento come un effetto di sclerosi.".

[15] *Probabilitas* enim est gradus certitudinis, et ab hac differt ut pars à toto.(p.211)
L'idea che la probabilità sia una parte della certezza era presente anche in Leibniz, come documentato dalla lettera del gennaio 1687 a Vincent Placcius (*Opera Omnia*, Ginevra, 1768, vol. VI, p. 36): "Imitando i matematici, penserei alla certezza o alla verità come all'intero e le probabilità come alle sue parti, così che le probabilità sono collegate alla certezza come gli angoli acuti lo sono all'angolo retto.".

Un'interpretazione della natura della probabilità, non come "grado di certezza" ma "grado di credenza", può trovarsi nel saggio *Formal logic: or, the calculus of inference, necessary and probable* (Londra, 1847), ove Augustus De Morgan scrive (pp. 171-173): "We have lower grades of knowledge, which we usually call *degrees of belief*, but they are really *degrees of knowledge. [omissis]* By degree of probability we really mean, or ought to mean, degree of belief. *[omissis]* Probability then, refers to and implies belief, more or less, and belief is but another name for imperfect knowledge, or it may be, expresses the mind in a state of imperfect knowledge.".

Siamo dunque in presenza di una *probabilità epistemica*. Preferisco usare questo termine e non *probabilità soggettiva*, in quanto quest'ultimo ha, nell'attuale letteratura, un significato ambiguo poiché presenta almeno tre diverse interpretazioni: quella "personalistica" di de Finetti; quella "logica" di John Maynard Keynes e Rudolf Carnap; quella "quantisica" di Werner Heisenberg e altri. Per un interessante confronto tra queste interpretazioni si veda Ian Hacking, *The emergence of probability*, Cambride University Press, 1975 (trad.it., *L'emergenza della probabilità*, Il Saggiatore, Milano, 1987, pp. 169-171).

probabile ciò la cui probabilità è sensibilmente superiore a metà della certezza. Ho detto *sensibilmente*. Infatti, una cosa la cui probabilità è solo approssimativamente uguale a metà della certezza è detta *dubbia* o ambigua. Ciò che ha 1/5 di certezza è più probabile di ciò che ne ha solo 1/10, anche se nessuno dei due è effettivamente probabile.

Possibile è ciò che ha almeno una parte di certezza, anche se molto piccola; *impossibile* è ciò che non possiede alcuna parte di certezza o ne possiede una infinitamente piccola. Così una cosa è possibile se, ad esempio, ha 1/20 o 1/30 di certezza.

Moralmente certo è ciò la cui probabilità è quasi uguale alla certezza piena, in modo tale che la differenza sia impercettibile.[16] Per contro, *moralmente impossibile* è ciò che possiede tanta probabilità quanto manca alla certezza morale per essere certezza piena. Quindi se si considera ciò che ha certezza 999/1000 come moralmente certo, allora ciò che ha solo 1/1000 di certezza è moralmente impossibile[17].

---

[16]Una nozione di certezza morale, avulsa dalla nozione di probabilità, era già presente prima della pubblicazione dell'*Ars Conjectandi*; ad esempio, René Descartes (alias Renato Cartesio) in *Les principes de la philosophie* (Amsterdam, 1644; trad.it., *Cartesio. Opere filosofiche* 3, Editori Laterza, Roma, 2000) scrive (trad.it., pp.362-363): "La prima [certezza] è chiamata morale, cioè sufficiente per regolare i nostri costumi, o tanto grande quanto quella delle cose, di cui non siamo soliti di dubitare riguardo alla condotta della vita, benché sappiamo che può accadere, assolutamente parlando, che esse siano false. Così quelli che non sono mai stati a Roma non dubitano che essa sia una città in Italia, pur essendo possibile che tutti quelli, dai quali l'hanno imparato, li abbiano ingannati.".

Questa impostazione è tuttora presente, specialmente in campo processuale, ove non viene sempre presentata in modo chiaro e facilmente comprensibile. Ad esempio, con riferimento al diritto canonico concernente le cause matrimoniali, la *Dignitas Connubi* (art. 247, § 2; 2005) precisa che: "per conseguire la certezza morale necessaria per legge, non è sufficiente una prevalente importanza delle prove e degli indizi, ma occorre che resti del tutto escluso qualsiasi dubbio prudente positivo di errore, tanto in diritto quanto in fatto, ancorchè non sia esclusa la mera possibilità del contrario.".
Inoltre, è opinione comune nella letteratura giurisprudenziale che si consegue la certezza morale della responsabilità penale quando questa è basata su un dato probatorio acquisito che esclude solo eventualità remote, pur formulabili in astratto come possibili *in rerum natura* ma la cui effettiva realizzazione nella fattispecie concreta risulti fuori dall'ordine naturale delle cose e dalla ordinaria razionalità umana.

Osserviamo infine che la connessione fatta da Bernoulli tra la certezza morale e la probabilità non era nuova in quanto venne fatta (a dir il vero ancora in forma "*naïf*") da Leibniz nel 1668 quando scrive di ciò che è: "infinitamente probabile o moralmente certo" (*Sämtliche schriften und briefen*, VI(1), Berliner-Brandeburgischen Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Wissenschaften in Gottingen, Berlino, 1923, p. 494).

[17]Ciò non significa, si badi bene, che il contrario di un evento moralmente certo è moralmente impossibile, come succederebbe se si adottasse il *principio dell'additività finita*.

Necessario è ciò che deve essere, essere stato in passato o esserlo in futuro. La necessità può essere:
- *fisica*, quando, per esempio, è necessario che il fuoco bruci, il triangolo abbia tre angoli che sommati formino due angoli retti, l'eclissi di luna si verifichi quando al plenilunio la luna si trova in un nodo;
- *ipotetica*, come conseguenza di cose che sono o si suppone essere state in passato o lo saranno in futuro, che esistono o sono esistite. In questo senso è necessario che Pietro, che so o suppongo che scriverà, scriva effettivamente;
- *stabilita per accordo*, come, ad esempio, quando il giocatore di dadi che faccia sei con un dado deve necessariamente vincere, qualora i giocatori si siano preventivamente accordati che la vittoria vada assegnata all'uscita del sei.[18]

Contingente (sia ciò che dipende dalla libera volontà di un essere razionale che ciò che si basa sul caso o sulla sorte) è ciò che poteva essere o non essere nel presente, nel passato o nel futuro, beninteso come conseguenza di cause lontane, non immediate.[19] Infatti, non sempre la contingenza esclude del tutto la necessità limitatamente a cause di importanza secondaria, come chiarirò con esempi. Certamente, il dado, in funzione di come è tenuto in mano, della velocità, della distanza dal tavolo da gioco e del momento in cui lascia la mano non può cadere diversamente da come effettivamente cade. Analogamente, con riferimento ad una certa situazione atmosferica odierna - conosciuti quantità, posizione, movimento, direzione, velocità dei vento, della nebbia e delle nubi, nonchè le leggi meccaniche che descrivono come questi elementi interagiscono tra di loro - il tempo domani non potrà essere diverso da quello che sarà effettivamente. Questi eventi seguono le loro cause prossime non meno necessariamente di come il fenomeno dell'eclissi derivi dal movimento dei corpi celesti. E tuttavia ci si attiene alla consuetudine di considerare solo l'eclisse come evento necessario, mentre i lanci del dado e le configurazioni future del tempo atmosferico sono classificati come contingenti. Ciò dipende esclusivamente dal fatto che non ci è sufficientemente noto ciò che è effettivamente assunto in realtà come dato per la determinazione degli eventi futuri. E se anche il dato fosse sufficientemente noto, gli studi di geometria e della fisica potrebbero non essere così sviluppati da consentire di calcolare i relativi effetti, così come le eclissi possono essere previste mediante i noti principi dell'astronomia. È per questo motivo che, prima che l'astronomia giungesse a un tale grado di perfezione, l'eclissi era considerata come un evento contingente allo stesso modo delle due situazioni prima citate. Ne consegue che a un certo uomo e in un determi-

[18]Nella "necessità" Bernoulli congloba dunque tre diversi aspetti della modalità: fisico, epistemico e deontico. Inoltre, sembra che per lui "necessario" sia sinonimo di "certo".

[19]Contingens (tam *liberum*, quod ab arbitrio creaturæ rationalis; quàm *fortuitum* et *casuale*, quod à casu vel fortuna dependet) est id, quod posset non esse, sore aut suisse; intellige potentia remota, non proxima.(p. 212)

nato momento può sembrare contingente quel che ad un altro uomo (magari lo stesso) in un altro momento può sembrare necessario una volta note le cause. La contingenza dipende quindi soprattutto dalla nostra conoscenza nella misura in cui non siamo in grado di formulare nessun argomento che deponga contro il fatto che qualcosa non sia o non sarà, anche se, sulla base delle cause immediate a noi ancora sconosciute, è o sarà necessariamente[20].

Si chiama *fortuna* o *sfortuna* quel che di buono o di cattivo ci capita, ma non un buono o un cattivo qualunque, bensì solo ciò che con maggiore o almeno altrettanta probabiltà avrebbe potuto non toccarci in sorte. Perciò la fortuna e la sfortuna sono tanto maggiori quanto minore è la probabilità dell'evento buono o cattivo. Così è baciato dalla fortuna chi scavando una fossa per terra trova un tesoro: un caso che non si verifica neppure una volta su migliaia di casi. Se di venti disertori ne viene estratto uno a sorte per essere impiccato, come esempio dimostrativo per gli altri, i rimanenti diciannove, con i quali il destino si è mostrato benevolo, non possono dirsi particolarmente fortunati, ma il ventesimo che è salito sul patibolo, quello sì è stato il più sfortunato di tutti. Se il tuo amico torna dalla battaglia nella quale sono caduti in pochi, senza neppure un graffio, non lo puoi dire fortunato,

---

[20]Dunque, una cosa non può dirsi contingente se non per difetto di conoscenza, poiché *in rerum natura* ogni cosa è determinata ad essere e ad operare in un dato modo da cause (talvolta a noi sconosciute). Viene quindi proposta da Bernoulli un'interpretazione epistemica della contingenza in termini di "ignoranza delle cause" che poco si accorda con quella usuale (in logica modale) di "non necessario che non".

Una concezione analoga venne adottata da de Montmort (*op.cit.*, p. XIV): "A rigor di termini nulla dipende dal caso. Quando si studia la natura, ci si convince immediatamente che il suo Autore si comporta in modo generale ed uniforme, che comporta saggezza e lungimiranza infinita. Quindi, al fine di dare al *caso* (*hazard*) un significato che sia conforme alla vera Filosofia, dobbiamo pensare che tutte le cose sono regolate secondo leggi certe, ma il cui ordinamento è il più delle volte a noi sconosciuto e che quindi quelle cose dipendono dal caso nel senso che le loro cause sono a noi sconosciute.".

Analogamente, David Hume in *An enquiry concerning human understanding* (Londra, 1748) inizia la sesta sezione *Of probability* con la frase: "Thouth there be no such thing as *Chance* in the world; our ignorance of the real cause of any event has the same influence on the understanding, and begets as like species of belief or opinion."

È interessante osservare che un'altra impostazione, per certi aspetti simile, venne proposta nel secolo scorso da René Thom (fondatore della *teoria delle catastrofi* e medaglia Fields 1958) in *Basta con il caso, taccia il rumore* (K. Pomian, Sul determinismo, *Il Saggiatore*, Milano, 1991, pp. 47-62) ove scrive (p. 48): "L'unica definizione possibile [del caso] non può che avere valenza negativa: aleatorio è un processo non simulabile da qualsivoglia formalismo. Affermare che "il caso esiste" equivale perciò a prendere una posizione ontologica consistente nell'affermare la realtà dei fenomeni naturali che non potremo mai descrivere, dunque mai comprendere.".

anche se forse lo vorresti, perchè si è distinto solo per la fortuna di mantenersi in vita.

Caput II

In questo capitolo Bernoulli chiarisce il significato del titolo *Ars Conjectandi* e fornisce sia una classificazione degli argomenti che entrano in gioco nel "congetturare" che alcune regole, dettate dal buon senso, da seguire per utilizzare correttamente gli argomenti. In particolare, d'importanza notevole è la regola nove che precisa la valenza operativa della certezza morale.

Diciamo che *sappiamo* o *conosciamo* ciò che è certo e indubitabile; ma di tutto il resto diciamo solo che lo *congetturiamo* o lo *supponiamo*.

Congetturare una certa cosa significa misurarne la probabilità. Perciò designamo con *arte della congettura* o *stocastica*, l'arte di misurare il più esattamente possibile la probabilità delle cose allo scopo di poter scegliere sempre quel giudizio e seguire quella condotta che ci sembrano migliori, più consoni, più sicuri e consigliabili; in questo solamente sta tutta la saggezza del filosofo e la prudenza del politico.

Le probabilità vengono valutate in funzione del *numero* e del *peso degli argomenti*, che in un certo qual modo dimostrano o segnalano che una certa cosa è stata, è o sarà. Con *peso* intendiamo la forza dimostrativa.[21]

Gli *argomenti* possono essere:
- *interni*, essenzialmente artificiali, supposti a partire dai punti dimostrativi delle cause, degli effetti, dei soggetti, delle connessioni, degli indizi o di qualsivoglia altra circostanza che sembri avere una qualche connessione con la cosa da dimostrare;
- *esterni*, e non artificiali, derivati dall'autorità o dalle testimonianze degli uomini.[22]

[21] *Conjicere* rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque *Ars Conjectandi* sive *Stochastice* nobis definitur ars metiendi quàm fieri potest exactissimè probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis et actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, fatius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia et Politici prudentia versatur.

Probabilitates æstimantur ex *numero* simul et *pondere argumentorum*, quæ quoquo modo probant vel indicant, rem aliquam esse, fore aut fuisse. Per *Pondus* autem intelligo vim probandi. (pp. 213-214)

[22] La classificazione proposta è mutuata da Arnauld e Nicole (*op.cit.*, p. 378): "Per giudicare della verità di un evento, e determinarmi a crederlo o a non crederlo, non bisogna considerarlo nudo ed in sé stesso, come faremmo con una proposizione di Geometria, ma bisogna fare attenzione a tutte le circostanze che lo accompagnano, tanto interne quanto

Un esempio. Tizio viene trovato morto ammazzato per strada. Mevio viene accusato dell'omicidio. Gli argomenti accusatori sono:
1. Notoriamente Mevio odiava Tizio (un argomento ripreso da una *causa*, in quanto l'odio di Mevio avrebbe potuto incitarlo all'omicidio);
2. Interrogato, Mevio impallidì e rispose impaurito (un argomento ripreso da un *effetto*, in quanto pallore e paura possono essere suscitati dalla coscienza dell'omicidio commesso);
3. In casa di Mevio fu trovato un pugnale sporco di sangue (questo è un *argomento* indiziario);
4. Nello stesso giorno in cui Tizio fu ucciso, Mevio passò per la stessa strada (questa è una *circostanza* di tempo e di luogo);
5. Caio infine sostiene che il giorno prima dell'omicidio aveva litigato con Mevio (questa è una *testimonianza*).

Prima di affrontare il nostro compito specifico, che è quello di come si devono utilizzare gli argomenti per misurare le probabilità delle congetture, è conveniente premettere alcune regole generali, o assiomi, che la pura ragione detta all'uomo dotato di sano intelletto e che l'uomo riflessivo osserva sempre nella vita quotidiana.

1. *Sono inammissibili congetture su cose delle quali si può ottenere la certezza totale. [omissis]*

2. *Non basta ponderare l'uno o l'altro argomento, ma esaminare tutti gli argomenti di cui possiamo venire a conoscenza che sembrino essere in qualche modo adatti a dimostrare la cosa.*[23] Supponiamo che tre navi lascino il porto. Dopo qualche tempo viene data la notizia che una delle tre è affondata dopo aver fatto naufragio. Congetturiamo quale delle tre. Considerando solo il numero delle navi, dovremmo concludere che la sfortuna può essere toccata con pari opportunità a ciascuna delle tre. Ma ricordando che una delle tre navi era vecchia, malconcia e mal corredata di vele e sartiame e inoltre aveva un timoniere giovane e inesperto, allora è per noi più probabile che sia affondata questa nave, piuttosto che una delle altre due.

3. *Non si deve tener conto solo di tutti gli argomenti a favore di una cosa, ma anche di quelli che possono sfavorirla, affinchè sia possibile dopo ponderazione accurata stabilire in tutta evidenza quali prevalgano. [omissis].*[24]

---

esterne. Chiamo circostanze interne quelle che appartengono al fatto stesso, ed esterne quelle che concernono le persone per testimonianza di cui noi siamo indotti a crederlo.".

[23]Richiesta che richiama la seconda regola che Descartes enuncia in *Discours de la mèthode. Pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences* (Leyde, 1637; trad. it., *Discorso sul metodo*, Editori Riuniti, Roma, 1976): "La seconda [regola], di dividere ogni problema preso in esame in tante parti quanto fosse possibile e richiesto per risolverlo più agevolmente."(trad.it., p. 71).

[24]Ancora Descartes (*ibidem*, p. 71): "E l'ultima [regola], di fare in tutti i casi enumerazio-

4. *Per giudicare di cose generali bastano argomenti generali e generici. Ma per formulare congetture su cose specifiche si devono impiegare argomenti particolari e individuali, ammesso che siano disponibili.* Se si tratta di indicare, in generale, di quanto sia più probabile che un giovane uomo di vent'anni sopravviva a un vecchio di sessanta, piuttosto che il contrario, allora oltre alla differenza di età e agli anni, non occorre considerare altro. Ma se si tratta di due persone concrete quali il giovane Pietro e il vecchio Paolo, allora bisogna considerare anche lo stato di salute di entrambi e la cura che ciascuno dedica alla propria persona. Infatti, se Pietro è malato o si abbandona senza ritegno alle proprie passioni vivendo smodatamente, allora Paolo, benché più vecchio, può a pieno titolo sperare di sopravvivergli.

5. *In cose incerte e dubbie bisogna rimandare l'azione finché si sia fatta più luce. Ma se l'occasione favorevole all'azione non tollera rinvii, allora tra due cose bisogna scegliere sempre quella che sembra più adatta, più sicura, più vantaggiosa o almeno più probabile dell'altra, anche se nessuna delle due lo è in realtà.* Quindi, se scoppia un incendio, al quale si può sfuggire saltando dal tetto o da uno dei piani inferiori, è meglio scegliere la seconda possibilità, perchè più sicura, anche se nessuna delle due è senza pericolo di procurasi delle lesioni.

6. *Ciò che in qualche caso può essere vantaggioso e in nessun caso svantaggioso, va preferito a ciò che in nessun caso è vantaggioso o svantaggioso.* Affermazione analoga al proverbio: "Se non giova, almeno non danneggia". *[omissis]*

7. *Il valore delle azioni umane non può essere valutato dal loro successo. [omissis]*

8. *Nei nostri giudizi dobbiamo stare attenti nell'attribuire alle cose più peso di quanto spetti loro e considerare ciò che è solo probabile come assolutamente certo, o imponendolo ad altri come tale. [omissis]*

9. *Poiché solo raramente si può pretendere la certezza assoluta, la necessità e la tradizione impongono di considerare come incondizionatamente certo ciò che è solo moralmente certo.*[25] Sarebbe utile fissare d'autorità limiti ben definiti alla

---

ni tanto perfette e rassegne tanto complete, da essere sicuro di non omettere nulla.".

[25] Come rilevato da John Locke in *An essay concerning human understanding* (Londra, 1690; Volume II, Libro IV, Cap. XV, *Of Probability*) ove inizia il § 2 (p. 274) scrivendo: "Our knowledge, as has been shewn, being very narrow, and we not happy enough to find certain truth in every thing which we have occasion to consider, most of the propositions we think, reason, discourse, nay, act upon, are such as we cannot have undoubted knowledge of their truth; yet some of them border of near upon certainty, that we make no doubt at all about them, but assent to them as firmly, and act, according to that Assent, as resolutely as if they were infallibly demonstrated, and that our knowledge of them was perfect and certain.".

L'esigenza pratica di identificare il moralmente certo (moralmente impossibile) con la certezza assoluta (impossibilità) è stata sempre presente nel pensiero scientifico. Ad esemcertezza morale, per esempio esigere il 99/100 o 999/1000 della certezza, in modo che il giudice non sia di parte, ma abbia un punto di vista solido da tener presente in ogni caso di giudizio.[26]

---

pio, Wolfgang E. Pauli (premio Nobel per la Fisica, 1945) in *Probability and physics* (*Wolfgang Pauli. Writings on physics and philosophy,* Springer-Verlag, Heidelberg, 1994, pp. 43-48) scrive (p. 45): "In this purely mathematical form, *Bernoulli*'s theorem is thus not as yet susceptible to empirical test. For this purpose it is necessary somewhere or other to include a rule for the attitude in practice of the human observer, or in particular the scientist, which takes account of the subjective factor as weIl, namely that the realisation, even on a single occasion, of a very unlikely event is regarded from a certain point on as impossible in practice. Theoretically it must be conceded that there is still a chance, different from zero, of error; but in practice actual decisions are arrived at in this way, in particular also decisions about the empirical correctness of the statistical assertions of the theories of physics or natural science.".

A tale proposito de Finetti in *L'invenzione della verità* (1934, manoscritto; pubblicato nel 2006 da Raffaello Cortina Editore) scrive (p. 133): "Tali probabilità sono tanto vicine alla certezza che praticamente si può, nel linguaggio comune e anche in quello scientifico, parlare correntemente di certezza, ma dal punto di vista filosofico ciò sarebbe altrettanto errato come dire che è impossibile, strettamente parlando, qualche fatto estremamente improbabile come quello immaginato dal Borel che una scimmia pestando a capriccio sui tasti di una macchina da scrivere riproduca la *Divina Commedia*; *[omissis]*. Anche in questo caso la probabilità è prossima ad uno ma non esattamente uno, e analogamente, a rigore, dovrebbe giudicarsi per tutte le verità scientifiche.".

[26]La novità proposta da Bernoulli non sta, come già rilevato, nella nozione di certezza morale ma nel proporre una soglia *numerica* che la delimiti, precisando così quanto affermato da Arnauld e Nicole (*op.cit.*, p. 375): "Ma è possibile tuttavia indicare dei limiti oltre i quali si ottiene la certezza umana, ed altri al di là di cui la si possiede certamente, lasciando tra questi due limiti una zona intermedia che sta tra certezza ed incertezza, secondo che ci si avvicini più agli uni o agli altri.".

Nell'ambito del diritto, la proposta di Bernoulli si concretizza fissando una *soglia di colpevolezza* γ e richiedendo che il giudice decida per la condanna dell'imputato se la sua convinzione di colpevolezza, espressa in termini numerici, supera o uguaglia γ. Ma quanto deve essere operativamente il valore di questa soglia? Certamente maggiore di 0 (ovvio) e "vicino" e minore di 1 (se così non fosse, si condannerebbe solo in caso di certezza). Ovviamente, per le conseguenze sociali e umane che comporta, la sua individuazione è estremamente delicata. La questione (e più in generale l'uso della probabilità nei processi) è stata molto dibattuta (sia teoricamente che con indagini statistiche), a partire dal 1970, nell'ambito della *Common Law* anglo-americana relativamente al celebre principio *Beyond a reasonable doubt* (vecchio di almeno 200 anni). A titolo d'esempio riportiamo il valori di γ dichiarati da nove giudici del distretto orientale di New York (caso U.S. vs. Fatico; 1989): 0.76(1), 0.80(1), 0.85(4), 0.90(2) e 0.95(1), valori molto lontani da quelli considerati dal "garantista" Bernoulli. Comunque, è bene tenere presente che il ricorso ai metodi probabilistici rischia di mettere, in casi complessi, il giudice in una condizione di reale subalternità al probabilista chiamato come esperto a deporre per cui è lecito chiedersi: "Il servitore

Ognuno di noi, che abbia esperienza di vita quotidiana, può scrivere di proprio pugno altri assiomi di questo genere. Non possiamo tenerli a mente tutti, tanto più che non abbiamo l'occasione opportuna per applicarli.

Caput III

In questo capitolo Bernoulli utilizza un modello assai sottile, basato sulle nozioni di contingenza e necessità, per introdurre alcuni tipi di argomenti dimostrativi. Inoltre, considera un'ulteriore classificazione basata sui termini "puro"e "misto", presumibilmente suggeriti dalla terminologia che Leibniz usava per le prove in ambito giuridico. Con riferimento a questi modelli, Bernoulli fornisce, ricorrendo alla PROPOSITIO III, le relative probabilità. Inoltre, nella parte finale del capitolo (di cui daremo solo qualche cenno), affronta il problema, assai delicato e lasciato in parte insoluto, di combinare tra di loro diversi tipi di argomenti dimostrativi.

Chi voglia comprovare gli argomenti dimostrativi di un giudizio o di una congettura, ne distinguerà tre tipi diversi dal momento che alcuni *esistono necessariamente e forniscono contingentemente la prova*; altri *esistono contingentemente e forniscono necessariamente la prova*; altri infine *esistono contingentemente e forniscono contingentemente la prova*.[27]

Spiego queste differenze con esempi. È da tanto tempo che mio fratello non mi scrive. Sono in dubbio se si tratti della sua pigrizia o di suoi impegni, ma potrebbe anche essere morto. Ecco tre motivi che possono giustificare l'assenza di sue lettere: *pigrizia*, *impegni*, *morte*. Il primo esiste necessariamente (come necessità ipotetica, poiché conosco e presumo la pigrizia di mio fratello) ma mostra solo contingentemente il mancato arrivo di lettere, anche se la pigrizia non avrebbe necessariamente ostacolato a mio fratello di scrivermi. Il secondo esiste contin-

---

[l'esperto] del giudice sta forse diventando il suo segreto padrone?"(Mirjan R. Damaska, *Il diritto delle prove alla deriva*, Il Mulino, Bologna, 2003, p. 215).

[27]Qui varia argumenta examinat, quibus opinio vel conjectura generatur, triplex in iis discrimen animadvertet: nam quædam eorum *necessariò existunt et contingenter indicant*: alia *contingenter existunt et necessariò indicant*: alia denique *contingenter existunt simul et indicant.* (p. 217)

Dunque, l'argomento dimostrativo, pensato costituito da un'evidenza e da un'ipotesi, esiste contingentemente quando non si è certi dell'evidenza e la certezza dell'ipotesi può essere dedotta o meno; esiste necessariamente quando si è certi dell'evidenza e la certezza dell'ipotesi non può essere dedotta (situazione ampiamente studiata nella logica induttiva). Chiaramente, Bernoulli tralascia l'ulteriore caso (di nessun interesse in questo contesto) in cui si è certi dell'evidenza e della deducibilità della certezza dell'ipotesi.

gentemente e mostra contingentemente il mancato arrivo delle lettere perchè mio fratello potrebbe essere impegnato oppure no e, nel primo caso, non sono impegni così assorbenti da impedirgli di scrivere. Il terzo esiste contingentemente (perchè mio fratello potrebbe essere ancora in vita) ma mostra necessariamente il mancato arrivo delle lettere, perchè un morto non può scrivere.

Un ulteriore esempio è il seguente: suppongo che, per accordi presi tra i giocatori, un giocatore vinca se fa sette con il lancio simultaneo di due dadi e desidero valutare la sua speranza di vittoria. In questo caso, l'argomento dimostrativo per la vittoria esiste contingentemente (perchè, oltre al sette possono uscire altri numeri), ma mostra necessariamente il vincitore (in forza degli accordi presi).

Oltre a queste diversità tra argomenti dimostrativi, può esserne fatta un'altra osservando che alcuni di questi possono essere *puri* o *misti*. Chiamo *puri* quegli argomenti dimostrativi che in certi casi mostrano una cosa, mentre in altri non mostrano nulla positivamente. Chiamo *misti* quegli argomenti che in certi casi mostrano una cosa, mentre negli altri mostrano l'esatto contrario.[28]

Ad esempio, in un gruppo di contendenti, uno perisce di spada. Secondo la testimonianza di più persone degne di fede, che hanno visto da lontano il fatto, l'omicida portava un mantello nero. Siccome tra i contendenti sia Gracco che tre altri portavano un mantello nero, questo diventa un argomento contro Gracco: tuttavia questo argomento è misto. Infatti, in un caso il mantello nero prova la sua colpevolezza e negli altri (che riguardano la colpevolezza degli altri tre contendenti) invece la sua innocenza, in quanto non si può imputare l'omicidio ad uno di loro

[28]Præter hanc argumentorum distinctionem aliud quoque in iis diferimen observare licet, dum quædam eorum sunt *pura*, alia *mixta*. *Pura* voco, quæ in quibusdam casibus ita rem probant, ut in aliis nihil positivè probent: *Mixta*, quæ ita rem probant in casibus nonnullis, ut in cæteris probent contrarium rei. (p. 218)

Dunque, nell'argomento misto ogni caso consente di dedurre la certezza dell'ipotesi o quella della sua negazione, mentre in quelli puri ci sono casi che consentono di dedurre la certezza dell'ipotesi e casi "neutri" nei quali "si rimane in mezzo al guado" (la certezza dell'ipotesi può sussistere o meno).

Questa distinzione tra argomenti che, a seconda dei casi, "dimostrano o non dimostrano" e "dimostrano o dimostrano che non", è stata sostanzialmente riproposta (senza fare alcun riferimento a Bernoulli) da de Finetti nell'ambito della logica degli eventi (*Calcolo delle Probabilità*, dattiloscritto, 1937-'38; Atti dell'XI convegno A.M.A.S.E.S., Bologna, 1987, pp. 6-8). Precisamente, data una partizione dell'evento certo (evidenza certa), de Finetti chiama un evento (cosa) E:

- *affermativamente semidipendente*, se certi casi implicano E e altri sono compatibili con E e con la sua negazione $\overline{E}$;
- *dipendente*, se certi casi implicano E e gli altri implicano $\overline{E}$.

Ora, se in questa classificazione sostituiamo "implicano" con "mostrano" e "sono compatibili con E e con $\overline{E}$" con "non mostrano positivamente E", vediamo che la semidipendenza affermativa e la dipendenza sono, rispettivamente, un argomento puro e uno misto.

senza che Gracco risulti innocente. Ma durante l'interrogatorio Gracco impallidisce e questo costituisce un argomento dimostrativo puro. Infatti, prova la colpevolezza di Gracco, se proviene da cattiva coscienza, ma non prova positivamente la sua innocenza, se il pallore è determinato da un'altra causa cui Gracco è soggetto (pur tuttavia Gracco potrebbe ancora considerarsi l'assassino).

Da quanto detto risulta evidente che la forza dimostrativa di un argomento dipende dal numero dei casi in cui esso è o può essere presente, mostrando una cosa o non mostrandola o potendo addirittura mostrare il suo contrario. Pertanto, il grado di certezza (ovvero la probabilità) generato da un argomento dimostrativo può essere calcolato tramite questi casi con il metodo descritto nella prima parte [del libro] esattamente nello stesso modo di come viene di solito indagato il destino dei giocatori nei giochi d'azzardo . Per mostrarlo, sia b il numero dei casi ove esiste qualche argomento dimostrativo, c il numero dei casi ove non esiste e $a = b + c$ il numero totale dei casi. Inoltre, siano β il numero di casi in cui un argomento mostra necessariamente [la cosa], γ il numero di casi in cui non mostra necessariamente o mostra il contrario [della cosa] e $\alpha = \beta + \gamma$ il numero totale. Suppongo inoltre che tutti i casi siano egualmente possibili, cioè che ogni caso possa verificarsi con la stessa facilità degli altri. Altrimenti, adotto la modifica per cui al posto di un caso che si verifica più facilmente conto tanti casi [egualmente possibili] che globalmente si verificano tanto facilmente quanto quello. Per esempio, al posto di un caso che si verifica tre volte più facilmente degli altri, conto tre casi, ognuno dei quali può verificarsi con la stessa facilità degli altri due, che globalmente hanno la stessa facilità di verificarsi del caso originario.

1. Quindi, se *un argomento esiste contingentemente e mostra necessariamente*, ci saranno, per quanto convenuto, b casi tra quelli appena considerati nei quali l'argomento è presente e può mostrare quindi la cosa (o 1) e c casi in cui non è presente e, di conseguenza, non mostra nulla. Allora, tramite il *Coroll.* 1 [di p. 9, ottenuto ponendo $b = 0$ in PROPOSITIO III], il valore sarà

$$\frac{b \cdot 1 + c \cdot 0}{a} = \frac{b}{a}$$

così che un tale argomento prova b/a della cosa o b/a della certezza della cosa.[29]

[29]Bernoulli dunque *identifica numericamente* il grado di certezza con la *expectatio* del gioco che fornisce 1, se si verifica uno qualsiasi dei casi favorevoli, e 0, se si verifica uno qualsiasi dei casi non favorevoli o neutri. In altri termini, per misurare la probabilità Bernoulli usa i numeri razionali ottenuti tramite la cosiddetta *definizione classica della probabilità* introdotta esplicitamente da De Moivre (*op. cit.*, p. 1): "1. The probability of an event is greater or less, according to the number of chances by which it may happen, compared with the whole number of chances by which it may either happen or fail.
2. Wherefore, if we constitute a fraction whereof the numerator be the number of chances

2. *Se un argomento è necessariamente presente e mostra contingentemente*, ci saranno, per le assunzioni precedenti, β casi in cui l'argomento può mostrare la cosa e γ casi in cui non la mostra o mostra addirittura il suo contrario. Ne consegue che la forza dimostrativa dell'argomento è

$$\frac{\beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

così che un tale argomento prova β/α della certezza della cosa. Se, in particolare, l'argomento è di tipo misto, allora prova (procedendo in modo analogo)

$$\frac{\gamma \cdot 1 + \beta \cdot 0}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

della certezza del contrario della cosa.[30]

---

whereby an event may happen, and the denominator the number of all the chances whereby it may either happen or fail, that fraction will be a proper designation of the probability of happening.".

Analogamente, e con più precisione, Laplace (*op.cit.*, trad.it., p. 7): "La teoria dei casi consiste nel ridurre tutti gli avvenimenti della stessa specie a un certo numero di casi ugualmente possibili, tali cioè da renderci ugualmente indecisi sulla loro esistenza, e nel determinare il numero di casi favorevoli all'avvenimento da cui si ricerca la probabilità. Il rapporto di tale numero con quello di tutti i casi possibili ci dà la misura di questa probabilità che non è altro che la frazione avente per numeratore il numero dei casi favorevoli e per denominatore il numero di tutti i casi possibili.".

[30]Dunque, se l'argomento è misto, si ottiene $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} = 1$ e quindi la somma delle probabilità della cosa e del suo contrario è pari alla certezza piena, cioè le due probabilità *sono additive*. Per quanto riguarda invece un argomento puro, Bernoulli nulla dice della probabilità del contrario (della cosa). Se supponiamo che $\delta < \gamma$ sia il numero di casi ove l'argomento puro può mostrare il contrario, allora $\beta + (\gamma - \delta)$ sarà il numero di casi ove l'argomento non mostra il contrario o mostra il suo contrario (cioè la cosa). Conseguentemente, la probabilità da assegnare al contrario, in accordo con l'impostazione bernoulliana, è pari a

$$\frac{\delta \cdot 1 + [\beta + (\gamma - \delta)] \cdot 0}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha}.$$

Quindi $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\alpha - (\gamma - \delta)}{\alpha} < 1$, cioè le due probabilità (quella della cosa e del suo contrario) *non sono più additive*. Osserviamo inoltre che, qualora tutti i γ casi siano neutri, la probabilità del contrario è nulla.

A titolo esemplificativo consideriamo, con riferimento a un'urna contenente 5 palline numerate da 1 a 5, tre estrazioni senza rimessa e assumiamo come partizione dell'evento certo di riferimento (argomento necessariamente presente) quella costituita dalle terne formate con i numeri estratti: ordinate (secondo l'ordine di estrazione), se contengono 1, e non ordinate altrimenti. Dato allora l'evento E (la cosa) "il primo numero estratto è 2", otteniamo che le terne (della partizione) ordinate che hanno come primo termine 2

3. *Se un argomento esiste contingentemente e mostra contingentemente*, assumiamo innanzitutto che esso sia presente. In tal caso, come abbiamo visto, mostra β/α della cosa e, se l'argomento è di tipo misto, mostra γ/α del contrario della cosa. Poiché ci sono b casi in cui l'argomento è presente e c casi in cui non lo è, e quindi non mostra nulla, ne segue che l'argomento mostra

$$\frac{b \cdot \frac{\beta}{\alpha} + c \cdot 0}{a} = \frac{b\,\beta}{a\,\alpha}$$

della certezza della prova. Se l'argomento è di tipo misto, allora

$$\frac{b \cdot \frac{\gamma}{\alpha} + c \cdot 0}{a} = \frac{b\,\gamma}{a\,\alpha}$$

è il valore della certezza del contrario della cosa.

Bernoulli prosegue affrontando il delicato e fondamentale problema della combinazione degli argomenti, cioè la valutazione della parte di certezza di una data cosa fornita da più argomenti dimostrativi di tipo diverso concorrenti a mostrarla: tutti puri, tutti misti oppure alcuni puri e altri misti.[31] Essendo ben conscio di procedere su un terreno "minato", Bernoulli sente il

---

mostrano E; quelle ordinate che hanno come primo termine un numero diverso da 2 e quelle non ordinate che non lo contengono mostrano $\overline{E}$; infine quelle non ordinate che includono 2 sono "neutre" in quanto non mostrano né E, né $\overline{E}$. Ne segue, $\beta = 12$, $\gamma = 28$, $\delta = 25$ e $\alpha = 40$; dunque $\Pr(E) = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{12}{40}$, $\Pr(\overline{E}) = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{25}{40}$ e quindi $\Pr(E) + \Pr(\overline{E}) = \frac{37}{40} < 1$.

La non-additività dei gradi di certezza certifica definitivamente che essi non possono essere interpretati in alcun modo come *gradi di fiducia* (per i quali l'additività è ovvia).

Dopo Bernoulli, le probabilità non-additive vennero considerate ancora da Johann H. Lambert (*Neues organon, oder gedanken über die erforschung und bezeichnung des wahren und dessen unterscheidung von irrtum und schein*, Lipsia, 1764) per poi essere totalmente abbandonate a favore di quelle additive, su influenza dei lavori di de Moivre (*op. cit.*, 1718), Thomas Bayes (*Essay towards solving a problem in the doctrine of changes*, Phil. Trans. Roy. Soc., Londra, **53**, 1763, pp. 370-418), Nicolas de Condorcet (*Essai sur l'applications de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Parigi, 1785) e Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, Parigi, 1814). A loro volta le additive vennero poi sostituite con le numerabilmente additive nella *teoria matematica delle probabilità* iniziata da Andrej N. Kolmogorov (*Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitrechnung*, Berlino, 1933; trad ingl., *Foundations of probability*, Chelsea Publishing Company, New York, 1956) e tuttora imperante.

L'uso delle probabilità non-additive venne riesumato (dopo circa 200 anni di oblio) negli anni '60 del secolo scorso ed ha contribuito, e contribuisce, con successo a risolvere e chiarire vari problemi e aspetti sia della teoria della statistica che di quella delle decisioni.

[31] Per un'analisi dettagliata delle regole che Bernoulli ottiene nei tre casi considerati si veda Hacking (*Combined evidence*, in S. Stenlund, *Logical theory and semantic analy-*

bisogno di informare il lettore delle difficoltà che possono sorgere (fornendo anche due esempi esemplificativi che omettiamo). Scrive infatti:

> Prevedo, in quanto non posso negarlo, che si presenteranno diverse circostanze nelle quali, applicando a casi speciali queste regole, si possa spesso incorrere in gravi errori per non aver accuratamente analizzato le differenze tra gli argomenti dimostrativi. Infatti, talvolta gli argomenti sembrano diversi, mentre rappresentano un unico argomento e, viceversa, argomenti effettivamente diversi possono essere accettati come un unico argomento. A volte un argomento include tali premesse che confutano assolutamente l'opposto, e così via.

Caput IV

In questo capitolo (cuore dell'opera) Bernoulli, constatato che la misura della probabilità basata sui casi finiti che si verificano con uguale facilità non è estendibile alle situazioni concrete che si possono incontrare nella vita reale, si propone di valutare la probabilità epistemica facendo ricorso alla tendenza mostrata da alcuni meccanismi casuali a produrre una frequenza relativa (*probabilità statistica*) sufficientemente stabile.[32] Giunge così a formulare (e provare nel prossimo capitolo) il suo celeberrimo *theorema aureum* che, a

---

sis, Reidel Publishing Company, Dordrech, 1974, pp. 113-123) e Glenn Shafer (*Non-additive probabilities in the work of Bernoulli and Lambert*, Archive for History of Exact Sciences, **19**, 1978, pp. 309-370), ove vengono anche riportate le correzioni e i miglioramenti di queste regole fatte da Lambert (*op.cit.*, Capitolo V). Per quanto concerne i limiti della impostazione bernoulliana, al di là delle imperfezioni meramente tecniche, Shafer (*ibidem*, p. 338) scrive: "Bernoulli's discussion of combination suffers from the fact that he can only combine probabilities for a single proposition and its negation. Greater insight is possible in the case of Dempster's rule of combination [1967], which can operate on collections of probabilities for larger algebras of proposition (see §8.2 of *A mathematical theory of evidence*, Princeton University Press, Princeton, 1976). But we are unlikely to improve on Bernoulli's practical advice: proceed cautiously in discerning arguments.".

Per una interessante analisi di tipo filosofico-logico si veda Maurice Boudot, *Probabilité et logique de l'argumentation selon Jacques Bernoulli*, Les *é*tudes Philosophiques, **22**(3), 1967, pp. 265-288.

[32]Il ricorso alla probabilità statistica era stato già ampiamente usato nel decennio 1660-1670, sia nel campo delle assicurazioni di rendite da Johannes Hudde e Jan de Witt che in quello demografico da John Graunt. Dunque Bernoulli ha presenti entrambe le facce di quel Giano bifronte che è la probabilità: da un parte essa ha natura statistica e riguarda le leggi stocastiche dei processi casuali, dall'altra ha natura epistemologica ed è volta a misurare i gradi di certezza di cose anche totalmente prive di contenuto statistico.

buon diritto, gli ha aperto le porte dell'"Olimpo degli immortali" della teoria della probabilità.

Nel capitolo precedente si è visto come - in base al numero dei casi in cui possono essere o non essere presenti argomenti dimostrativi a favore di una certa cosa, possano mostrare o non mostrare o mostrare il contrario della cosa - sia possibile calcolare e valutare le forze dimostrative dei casi e le probabilità ad esse proporzionali. Siamo quindi arrivati al punto in cui, per formulare corrette congetture su qualcosa, non si richiede altro che determinare dapprima esattamente il numero dei casi e poi stabilire quanto è più facile che un caso si verifichi rispetto ad un altro. La difficoltà però sta proprio qui. Infatti, ciò è possibile per pochissimi fenomeni riferiti quasi esclusivamente ai giochi d'azzardo. Affinchè i partecipanti al gioco avessero uguali prospettive di vincita, gli inventori dei giochi d'azzardo li hanno predisposti in modo che il numero di casi in cui si dà guadagno o perdita siano noti e determinabili a priori e che tutti i casi si possano verificare con uguale facilità. Tuttavia, nella stragrande maggioranza delle situazioni, dipendenti dalle forze della natura o dall'arbitrio dell'uomo, ciò non si verifica.

Per esempio, il numero dei casi è noto nel gioco del lancio dei dadi perchè per ogni dado ci sono tanti casi quante sono le facce che lo formano. Inoltre, questi casi hanno tutti la stessa possibilità (parte di certezza) di realizzarsi [iique omnes æquè proclives]: infatti, data l'uguale forma delle facce e la distribuzione uniforme della massa, non ci sono ragioni per cui una faccia debba cadere più facilmente dell'altra, come sarebbe il caso se le facce avessero forma diversa e una parte del dado fosse più pesante dell'altra.[33]

Lo stesso discorso vale per il numero dei casi relativi alle estrazioni di un biglietto bianco o nero da un'urna di composizione nota, dalla quale tutti i biglietti possono essere estratti con eguale facilità, in quanto è noto quanti biglietti di ogni tipo sono presenti nell'urna e non si possono addurre ragioni perchè sia più facile estrarne uno piuttosto di un altro.

Ma quale mortale sarà in grado di determinare, per esempio, il numero di malattie (cioè il numero di casi) che possono capitare al corpo dell'uomo in ognuna delle sue innumerevoli parti e in ogni sua età e portarlo alla morte - e quanto più facilmente una malattia (per esempio la peste) può uccidere un uomo piuttosto di un altra (per esempio la rabbia o la febbre) - per trarne una congettura sul rapporto tra vita e morte nelle generazioni future? Oppure, chi potrebbe enumerare gli innumerevoli casi di cambiamento cui giornalmente va incontro l'aria, volendo già da oggi congetturare che tempo farà tra un mese o tra un anno? O ancora, chi

[33]Dunque Bernoulli trasferisce, coerentemente con la sua impostazione e in accordo con il *principio di ragione insufficiente*, la nozione fisica di "casi che si verificano con uguale facilità" in quella epistemica di "casi equiprobabili".

potrebbe aver indagato tanto a fondo la natura della mente umana e la meravigliosa costruzione del nostro corpo da pretendere di determinare il numero dei casi in cui vincerà questo giocatore o perderà quell'altro in giochi dipendenti in tutto o in parte dall'acutezza dell'intelletto o dalla destrezza del corpo? Poiché queste e altre cose simili dipendono da cause totalmente nascoste, ignote alla nostra conoscenza causa la molteplicità infinita dei loro effetti combinati, sarebbe follia evidente indirizzare la ricerca in questo modo.

Ma qui si apre un'altra via: per ricavare ciò che a priori non è dato conoscere, possiamo per lo meno ottenerlo a *posteriori* stabilendolo tramite molteplici osservazioni di risultati ottenuti in situazioni simili. A tal fine bisogna supporre che ogni singola cosa possa verificarsi o non verificarsi nello stesso numero di casi in cui è stata osservata verificarsi o non verificarsi in precedenza nelle stesse circostanze.[34] Se si è osservato, ad esempio, che di 300 uomini della stessa età e costituzione di Tizio 200 sono morti entro 10 anni mentre gli altri gli sono sopravvissuti, possiamo concludere con sufficiente certezza che, nel decennio successivo, avremo il doppio di casi nei quali anche Tizio dovrà pagare alla natura il tributo dovuto rispetto ai casi nei quali potrà sopravvivere. Analogamente, se qualcuno ha da lungo tempo osservato il tempo atmosferico e notato quante volte è stato sereno e quante piovoso o se qualcuno ha osservato spesso due giocatori e notato quante volte questo o quello abbia vinto può, proprio a partire da ciò, determinare il rapporto che probabilmente avranno in seguito, in circostanze analoghe a quelle precedentemente esistenti, il numero di casi in cui lo stesso evento può verificarsi e quello dei casi ove non può verificasi.

Questo modo empirico di determinare il numero di casi attraverso l'osservazione non è né nuovo né insolito. Infatti, già il famoso autore dell'opera *Ars Cogitandi*, un uomo di grande intelletto e acume, ha descritto nel Cap. XII e segg. dell'ultima parte del suo lavoro un processo del tutto analogo che ogni uomo poò osservare anche nella pratica di tutti i giorni.[35] Inoltre è evidente a tutti che non basta fare

[34] Verum enimverò alia hc nobis via suppetit quâ quæsitum obtineamus; et quod à priori elicere non datur, saltem à *posteriori*, hoc est, ex eventu in similibus exemplis multoties observato eruerë licebit; quandoquidem præsumi debet, tot casibus unumquodque posthac contingere et non contigere posse, quoties id antehac in simili rerum statu contigisse et non contigisse fuerit deprehensum. (p. 224)

[35] Bernoulli si riferisce presumibilmente ad Arnauld, ritenuto l'estensore della parte quarta de *La logique, ou l'art de penser*. In particolare, degno di nota è l'inizio del capitolo XVI (trad. it., pp. 387-388): "Le regole che servono a giudicare dei fatti passati possono applicarsi facilmente ai fatti a venire. Infatti, come bisogna credere probabilmente che un fatto è accaduto quando le circostanze certe che si conoscono sono solitamente congiunte con questo fatto; così bisogna credere probabilmente ch'esso accadrà, quando le circostanze presenti son tali da essere solitamente seguite da un effetto tale. Così i medici possono giudicare del buono o cattivo esito di una malattia; i condottieri degli eventi futuri di una

questa o quella osservazione per giudicare empiricamente un evento, ma è necessario un gran numero di osservazioni. Talvolta il più stupido degli uomini, dotato di un proprio istinto naturale e senza precedente formazione, ha fatto l'esperienza (davvero sorprendente) che, tanto più numerose sono le osservazioni pertinenti, tanto minore è il pericolo di allontanarsi dalla verità.

Sebbene tutti riconoscano che questo sia insito nella natura delle cose, la dimostrazione fondata su principi scientifici non è affatto usuale e mi tocca produrla qui. Ma credo di far poca cosa soffermandomi a dimostrare solo questo punto, noto a tutti. Vale a dire che resta da indagare ciò che nessuno aveva forse fino ad ora pensato, cioè se l'aumento delle osservazioni porti ad aumentare in modo continuo la probabilità che il numero delle osservazioni favorevoli rispetto a quelle sfavorevoli raggiunga il vero rapporto. E precisamente nella misura in cui o questa probabilità supera definitivamente qualunque grado arbitrario di certezza oppure il problema ha, per così dire, il proprio asintoto, cioè è presente un determinato grado di certezza che non si può mai superare comunque si aumentino le osservazioni.[36] Per esempio, per determinare il vero rapporto dei casi non possiamo mai raggiungere una certezza superiore a 1/2, 2/3, 3/4.

Un esempio chiarirà quel che intendo. Supponiamo che in un'urna, *senza che tu lo sappia*, ci siano 3000 sassolini bianchi e 2000 neri. Procedendo per tentativi tu vuoi determinare il loro rapporto estraendo un sassolino dopo l'altro (e rimettendolo nell'urna dopo averlo estratto in modo che il numero dei sassolini non diminuisca) e osservando quante volte esce un sassolino bianco e quante uno nero. Ci si chiede se tu puoi ripetere l'operazione tanto spesso, da far sì che diventi dieci, cento, mille, etc. volte più probabile (fino a raggiungere la certezza morale) che il numero delle volte in cui estrai un sassolino bianco rispetto al numero delle volte in cui ne estrai uno nero, assuma lo stesso rapporto di 3 a 2 che hanno tra loro i sassolini, o questi numeri non formino un tutt'altro rapporto diverso da quello. Se non si verifica il primo caso, ammetto che il nostro tentativo di determinare il numero dei casi attraverso osservazioni è mal congegnato. Al contrario, se si verifica e in questo modo [sperimentale] posso ottenere la certezza morale (che sia effettivamente così lo dimostrerò nel prossimo capitolo), allora sono in grado di trovare *a posteriori* il numero di casi quasi esattamente come se lo conoscessi a priori. Questo per quanto riguarda la vita quotidiana, dove la certezza morale è considerata come assoluta (per l'Assioma 9 del Cap. II), è sufficiente per orientare

guerra, e nella vita si giudicano la maggior parte delle faccende contingenti.".

[36] Mancandogli il concetto di limite (che verrà introdotto in seguito e formulato correttamente appena nel secolo successivo), Bernoulli ricorre al concetto di *asintoto*, introdotto da Apollonio di Perga (262 a.C.- 190 a.C.) nella monumentale opera sulle coniche (otto libri) relativamente alle iperboli (forse l'unico esempio di un limite all'infinito conosciuto all'epoca di Bernoulli).

le nostre congetture su una cosa contingente qualsiasi, altrettanto scientificamente che nei giochi d'azzardo. Infatti, se al posto dell'urna pensiamo, ad esempio, all'aria o al corpo umano, che alberga in sé un'immensità di variazioni e di malattie diverse come l'urna contiene i sassolini, saremo ancora in grado, allo stesso modo, di determinare mediante osservazioni la facilità con cui anche in questo campo risulta un evento piuttosto che un altro.

A scanso di fraintendimenti, va precisato che il rapporto tra i numeri dei casi [favorevoli e contrari] da determinare attraverso le osservazioni, non viene ottenuto con precisione assoluta (perchè comporterebbe un risultato contrario, cioè la probabilità di determinare il rapporto reale diminuirebbe all'aumentare delle osservazioni[37]), ma solo con una certa approssimazione, cioè racchiuso tra due limiti, che tuttavia possono essere presi arbitrariamente vicini.[38] Infatti, se nell'esempio dell'urna costituita da sassolini otteniamo due rapporti, per esempio 301/200 e 299/200 o 3001/2000 e 2999/2000, etc., di cui uno è molto vicino ma maggiore e l'altro molto vicino ma minore di 3/2, allora si dimostra che con qualsivoglia probabilità è più probabile che, dopo osservazioni ripetute un gran numero di volte, il rapporto trovato giaccia all'interno di questi limiti posti intorno a 3/2 piuttosto che all'esterno.

Questo è il problema che qui mi sono proposto di pubblicare, dopo essermene occupato per vent'anni. La sua novità, insieme alla sua straordinaria utilità, unitamente alla notevole difficoltà, supera per importanza tutti gli altri capitoli di questa teoria.

Bernoulli prosegue concludendo il capitolo con tre osservazioni in risposta ad alcune critiche sollevate da Leibniz.[39]

Caput V

Si tratta di un capitolo eminentemente matematico volto a provare, come preannunciato verso la fine del capitolo precedente, il *theorema aureum.*

[37]sin enim contrarium prorsus eveniret, eoque minus probabile fieret, veram rationem inventam esse, quo plures caperentur observationes (p. 226). Frase di significato piuttosto oscuro; forse Bernoulli fa riferimento, in qualche modo, al fatto che il massimo valore del binomio $(r + s)^n$ è approssimativamente uguale, per n grande, a $1/\sqrt{2\pi rsn}$ e quindi decrescente all'aumentare di n (Giorgio Dall'Aglio, *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, 1987; Teorema VIII.1.1, p. 260).

[38]Bernoulli quindi non usa la parola "approssimazione" come sinonimo di "press'a poco" o "in modo impreciso", ma nel senso moderno del termine.

[39]Si veda a tale proposito la corrispondenza riportata da Dudley Silla, *The emergence of etc.*, *op.cit.*, pp. 51-57.

La dimostrazione[40] poggia principalmente su cinque lemmi e uno *Scholium* (pp. 228-236) che riguardano alcune proprietà della potenza di un binomio, nel caso particolare che i termini r, s del binomio siano numeri interi maggiori di uno e la potenza sia un multiplo della loro somma $t = r + s$.

Al fine di esporre succintamente i risultati a cui Bernoulli perviene, consideriamo lo sviluppo binomiale

$$(r+s)^{nt} = \sum_{k=0}^{nt} \binom{nt}{k} r^{nt-k} s^k$$

e poniamo

$$\begin{aligned} L_i &= \binom{nt}{ns-i} r^{nr+i} s^{ns-i} \qquad (i = 0, \dots, ns) \\ \Lambda_j &= \binom{nt}{nr-j} r^{nr-j} s^{ns+j} \qquad (j = 0, \dots, nr). \end{aligned}$$

Risulta allora

$$L_{ns} < \cdots < L_1 < L_0 = M = \Lambda_0 > \Lambda_1 > \cdots > \Lambda_{nr} \tag{1}$$

$$\frac{L_0}{L_1} < \frac{L_1}{L_2} < \cdots < \frac{L_{ns-1}}{L_{ns}} \qquad \frac{\Lambda_{nr-1}}{\Lambda_{nr}} > \cdots > \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} > \frac{\Lambda_0}{\Lambda_1} \tag{2}$$

$$\frac{L_0}{L_n} < \frac{L_i}{L_{n+i}} \quad (i \le ns - n) \qquad \frac{\Lambda_j}{\Lambda_{n+j}} > \frac{\Lambda_0}{\Lambda_n} \quad (j \le nr - n). \tag{3}$$

Tramite (1), (3) otteniamo allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{ns} L_i &= \sum_{i=n+1}^{n2} L_i + \sum_{i=n2+1}^{n3} L_i + \cdots + \sum_{i=ns-2}^{ns-1} L_i + \sum_{i=ns-1}^{ns} L_i \\ &< \sum_{i=n+1}^{n2} L_i + \sum_{i=n+1}^{n2} L_i + \cdots + \sum_{i=n+1}^{n2} L_i + \sum_{i=n+1}^{n2} L_i = (s-1) \sum_{i=n+1}^{n2} L_i \\ &< (s-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{L_n}{L_0} L_i = (s-1) \frac{L_n}{L_0} \sum_{i=1}^{n} L_i \end{aligned}$$

[40] Sostanzialmente corretta anche alla luce degli attuali criteri di rigore. Nell'esposizione Bernoulli non adopera gli attuali simboli per denotare i fattoriali e i coefficienti binomiali in quanto questi simboli vennero introdotti, rispettivamente, da Christian Kramp nel 1807 e da Andreas Freiherr Von Ettingshausen nel 1826.

e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} L_i > \frac{L_0}{L_n}\,\frac{1}{s-1}\ \sum_{i=n+1}^{ns} L_i. \tag{4}$$

In modo analogo si ottieme anche la disuguaglianza

$$\sum_{j=1}^{n} \Lambda_j > \frac{\Lambda_0}{\Lambda_n}\,\frac{1}{r-1}\ \sum_{j=n+1}^{nr} \Lambda_j. \tag{5}$$

Sia ora $c > 0$ arbitrario e n non minore del massimo dei due numeri:

$$\frac{\ln c + \ln(s-1)}{\ln(r+1) - \ln r}\left(1 + \frac{s}{r+1}\right) - \frac{s}{r+1} \tag{6}$$

$$\frac{\ln c + \ln(r-1)}{\ln(s+1) - \ln s}\left(1 + \frac{r}{s+1}\right) - \frac{r}{s+1}. \tag{7}$$

Ne segue (e questa è la parte più difficile e delicata da provare)

$$\frac{L_0}{L_n} \geq c\,(s-1), \qquad \frac{\Lambda_0}{\Lambda_n} \geq c\,(r-1) \tag{8}$$

e quindi, per (4) e (5),

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} L_i + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j \ &\geq\ \sum_{i=1}^{n} L_i + \sum_{j=1}^{n} \Lambda_j > \frac{L_0}{L_n}\,\frac{1}{s-1}\ \sum_{i=n+1}^{ns} L_i + \frac{\Lambda_0}{\Lambda_n}\,\frac{1}{r-1}\ \sum_{j=n+1}^{nr} \Lambda_j \\
&\geq\ c\left[\sum_{i=n+1}^{ns} L_i + \sum_{j=n+1}^{nr} \Lambda_j\right]. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Torniamo ora al testo originale e vediamo come Bernoulli enuncia e prova il teorema facendo ricorso ai risultati sopra riportati (pp. 236-238).

Propos. Princip. A questo punto finalmente consegue il teorema, la cui dimostrazione richiede solo l'applicazione dei lemmi stabiliti alle condizioni stabilite. Per evitare noiose circonlocuzioni chiamo *fecondi* (o *fertili*) i casi in cui si può verificare un evento e *sterili* i casi in cui non si può verificare. Analogamente, chiamo *fecondi* (o *fertili*) gli esperimenti in cui c'è qualche caso fecondo e *sterili* (o *infecondi*) quelli in cui si osserva un caso sterile.

Il numero dei casi fertili stia al numero di casi sterili esattamente o approssimativamente come r a s; o, rispetto al numero $t = r + s$ di tutti i casi, come

r a $r+s$, o r a t, cosicché tale rapporto sia compreso tra i limiti $(r+1)/t$ e $(r-1)/t$. Dimostriamo che si possono fare osservazioni in numero tale che diventa più probabile quanto si vuole, diciamo c volte, che il rapporto tra il numero delle osservazioni fertili e quello di tutte le osservazioni disponibili stia all'interno di tali limiti piuttosto che all'esterno, cioè non risulti nè maggiore di $(r+1)/t$ nè minore di $(r-1)/t$.[41]

[41] Precisamente, Bernoulli prova che, posto $p = r/t$, per ogni $c > 0$ e per ogni n maggiore, o al più uguale, ai numeri considerati in (6), (7), risulta

$$\Pr\left(\left|\frac{S_{nt}}{nt} - p\right| \leq \frac{1}{t}\right) > c \Pr\left(\left|\frac{S_{nt}}{nt} - p\right| > \frac{1}{t}\right),$$

ove S_{nt} denota la frequenza assoluta in nt osservazioni. Poiché siamo in presenza di un argomento dimostrativo di tipo misto, la disuguaglianza ottenuta ammette, per quanto provato nel terzo capitolo (caso 2), la seguente riformulazione equivalente:

$$\Pr\left(\left|\frac{S_{nt}}{nt} - p\right| \leq \frac{1}{t}\right) > \frac{c}{c+1}.$$

Da un punto di vista gnoseologico, nel teorema intervengono dunque tre tipi diversi di probabilità (e ciò ha verosimilmente contribuito "alla notevole difficoltà" del problema riscontrata da Bernoulli): p, S_{nt} e Pr che, nel caso particolare dell'urna sono:
- la probabilità (fisica) p dell'evento "estrarre un sassolino bianco" che dipende dal numero di *sassolini bianchi presenti* nell'urna e diviene nota soltanto *dopo* aver svuotato l'urna;
- la probabilità (statistica) $\frac{S_{nt}}{nt}$ che dipende dal numero di *sassolini bianchi estratti* nelle prime nt estrazioni e diviene nota soltanto dopo aver effettuato le estrazioni;
- la probabilità (epistemica) Pr dell'evento "la frequenza relativa giace tra i limiti prefissati $p - 1/t$ e $p + 1/t$" non ha per oggetto i sassolini ma la *conoscenza del fenomeno casuale* (processo di estrazione delle palline) e quindi può essere intesa come una specie di "meta-probabilità" che stima il comportamento della probabilità statistica rispetto a quella fisica.

Poiché nel teorema la probabilità p è assunta conosciuta, questo risultato purtroppo *non consente* a Bernoulli di realizzare quanto da lui auspicato nel capitolo quarto a p. 224: "per ricavare ciò che a priori non è dato conoscere, possiamo per lo meno ottenerlo a *posteriori* stabilendolo tramite molteplici osservazioni di risultati ottenuti in situazioni simili".

A questo proposito, Corrado Gini in *Rileggendo Bernoulli* (Metron, XV(1-4), 1949, pp. 117-132) scrive: "Più grave e fondamentale obiezione, che il Leibniz non aveva fatto, né il Bernoulli si era prospettato, è che risalire dalla frequenza osservata alla probabilità ignota costituisce un problema di probabilità inversa, mentre il teorema di Bernoulli risolve un problema di probabilità diretta, insegnando a desumere dalla probabilità nota *a priori* la frequenza osservata. Il teorema di Bernoulli non rispondeva dunque al problema pratico, che egli si era proposto, di determinare empiricamente la probabilità con un'approssimazione grande a piacere *[omissis]*. Quell'indebito passaggio dalla probabilità diretta alla probabilità inversa, che riaffiora talvolta nei lavori di Laplace e di Poisson e - come ho messo in luce - sta alla base dei metodi dei testi di significatività e degli intervalli di fiducia proposti dalla Scuola inglese, trova così la sua radice in Giacomo Bernoulli; esso

Dim. Supponiamo che nt sia il numero delle osservazioni programmate. Ci si chiede quanto grande sia la *expectatio*, o la probabilità, che siano feconde, rispettivamente, tutte le osservazioni, tutte meno una, meno due, meno tre, meno quattro etc..

Poiché per ipotesi in ogni osservazione sono possibili t casi, di cui r fecondi e s sterili e ogni caso della prima osservazione si può combinare con ogni caso della seconda e di nuovo i casi combinati si possono associare con ogni caso della terza, quarta osservazione etc., è evidente che devono essere applicate e la Regola posta alla fine delle osservazioni alla Prop. XII della prima parte e il suo secondo corollario[42]. In questo modo ne deriva che la *expectatio* di nessuna osservazione sterile è r^{nt}/t^{nt}, di un'osservazione sterile $\binom{nt}{1}r^{nt-1}s/t^{nt}$, di due osservazioni sterili $\binom{nt}{2}r^{nt-2}s^2/t^{nt}$, di tre osservazioni sterili $\binom{nt}{3}r^{nt-3}s^3/t^{nt}$ e così via.

Chiaramente, tralasciando il denominatore comune t^{nt}, il grado di probabilità o il numero di casi in cui si può verificare che tutte le osservazioni, tutte meno una, tutte meno due, tutte meno tre etc. siano feconde è dato rispettivamente dalle

$$r^{nt}, \binom{nt}{1}r^{nt-1}s, \binom{nt}{2}r^{nt-2}s^2, \binom{nt}{3}r^{nt-3}s^3, \text{ etc.},$$

cioè dai termini dello sviluppo binomiale della potenza nt-esima del binomio $r+s$, già considerato nei lemmi precedenti. Tutto quel che ne consegue è ormai evidente. Vale a dire, risulta dalla struttura della serie che il numero di casi in cui nr osservazioni sono feconde e le restanti ns sterili coincide con il massimo M, poiché, per il Lemma 3 [disuguaglianze (1), (2)], ns termini lo precedono e nr lo seguono. Allo stesso modo il numero di casi in cui di tutte le nt osservazioni $nr+n$ oppure $nr-n$ sono feconde e le restanti sterili, è fornito dai termini L_n e Λ_n rispettivamente, in quanto distano dal termine massimo M di n termini da entrambi i lati.

Conseguentemente, il numero totale dei casi in cui tra tutte le nt osservazioni sono presenti non più di $nr+n$ e non meno di $nr-n$ osservazioni feconde è pari alla somma di tutti i termini dello sviluppo di $(r+s)^{nt}$, che stanno tra L_n e Λ_n (limiti

costituisce - potremmo dire - il peccato originale del calcolo delle probabilità. Ci si rende conto così come esso sia tanto difficile a sradicare. La portata di tale errore logico è tale che contro di esso non si metterà mai in guardia abbastanza."

[42]La regola a cui fa riferimento Bernoulli consente di calcolare la *expectatio* di un giocatore che, nei lanci ripetuti di un dado, in alcuni vince e negli altri no. Precisamente, afferma che: "Il prodotto tra il numero dei casi con i quali si vince qualcosa nei lanci in cui si deve vincere, ed il numero dei casi con i quali si perde, dove si deve perdere, sia diviso per il prodotto del numero di tutti i casi possibili nei diversi lanci: il quoziente è il valore della *expectatio* richiesta" (pp. 44-45). Nel testo Bernoulli fa erroneamente riferimento alla Proposizione XIII.

inclusi). Il numero totale dei casi rimanenti, in cui sono presenti più di $nr + n$ o meno di $nr - n$ osservazioni feconde, è pari alla somma dei termini rimanenti dello sviluppo della potenza, che stanno fuori dall'intervallo compreso tra L_n e Λ_n. Ora, [l'esponente del]la potenza del binomio può essere scelto così grande [tramite le limitazioni inferiori (6), (7) fornite dallo *Scholium*] che, per il Lemma 4 [disuguaglianza (8)] e il Lemma 5 [disuguaglianze (3), (9)][43], la somma dei termini compresi tra L_n e Λ_n (limiti inclusi) risulti più di c volte superiore alla somma dei termini che stanno fuori dai suddetti limiti. È così possibile effettuare tante osservazioni affinchè il numero di casi, per i quali il rapporto tra il numero delle osservazioni feconde e quello di tutte le osservazioni non è esterno ai valori limite

$$\frac{nr+n}{nt} \text{ e } \frac{nr-n}{nt} \quad \text{o} \quad \frac{r+1}{t} \text{ e } \frac{r-1}{t},$$

risulti più di c volte maggiore del numero dei casi rimanenti, cioè sia c volte più probabile che il rapporto tra il numero delle osservazioni feconde e quello di tutte le osservazioni sia compreso tra i limiti $(r+1)/t$ e $(r-1)/t$ piuttosto che il contrario. Come volevasi dimostrare.

Bernoulli prosegue fornendo, con riferimento all'esempio dell'urna ($r/s = 3/2 = 30/20$), alcune valutazioni numeriche del numero di osservazioni da fare per ottenere l'approssimazione richiesta, ricorrendo alle due limitazioni inferiori date in (6) e (7).

Per come è stato dimostrato [il teorema], ne consegue che, avendo fatto 25550 esperimenti, sarà più di un migliaio di volte più probabile che il rapporto tra il numero di osservazioni fertili ottenute e quello totale [di tutte le osservazioni] sia compreso tra i limiti 31/50 e 29/50 anzichè al di fuori. Allo stesso modo, assumendo c = 10000 oppure c = 100000, ecc, troveremo che lo stesso è più di diecimila volte più probabile se si fanno 31258 esperimenti; e più di un centinaio di migliaia di volte se si fanno 36966 esperimenti, e così via all'infinito, sempre aggiungendo 5708 altri esperimenti ai 25550.

Bernoulli conclude (p. 239) con un'interpretazione metafisica davvero sorprendente del *theorema aureum*, ma coerente con il determinismo di tipo teologico con cui aveva aperto questa quarta parte.

[43] Evidentemente Bernoulli suppone, anche se non dichiarato, $r, s > 1$; d'altra parte la condizione non è restrittiva poiché è sempre possibile trovare un numero naturale m tale che $mr, ms > 1$ e quindi considerare il rapporto $(mr)/(ms)$ al posto di r/s.

Questo, infine, sembra comportare un corollario piuttosto singolare: se si osservassero per tutta l'eternità tutti gli eventi - nel qual caso la probabilità si trasformerebbe in certezza piena - si troverebbe che tutto nel mondo è governato da rapporti precisi e secondo una determinata legge costante che regola il cambiamento, tanto da essere costretti ad assumere una certa necessità o per così dire un fato anche per cose che sono apparentemente massimamente casuali o fortuite.

Non so se lo stesso Platone avesse questo in mente nella sua dottrina del ritorno universale delle cose in base alla quale predisse che tutto sarebbe tornato allo stato originario dopo un innumerevole numero di secoli.[44]

Giunti alla fine dell'*Ars Conjectandi*, ritengo opportuno citare quanto scrive Isaac Todhunter a p. 77 di *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace* (Londra e Cambridge, 1865): "Gouraud[45] has given the following summary of the merits of the *Ars Conjectandi*; see his page 28:

> Tel est ce livre de l'*Ars Conjectandi*, livre qui, si l'on considère le temps où il fut composé, I'origiualité, l'étendue et la pénétration d'esprit qu'y montra son auteur, la fécondité étonnante de la constitution scientifique qu'il donna au Calcul des probabilités, l'influence enfin qu'il devait exercer sur deux siécles d'analyse, pourra sans exagération être regardé comme un des monuments les plus importants de l'histoire des mathématiques. Il a placé à jamais le nom de Jacques Bernoulli parmi les noms de ces inventeurs, à qui la postérité reconnaissante reporte toujours et à bon droit, le plus pur mérite des découvertes, que sans leur premier effort, elle n'aurait jamais su faire.

This panegyric, however, seems to neglect the simple fact of the date of *publication* of the *Ars Conjectandi*, which was really subsequent to the first appearance of Montmort and De Moivre in this field of mathematical investigation. The researches of James Bernoulli were doubtless the earlier in existence, but they were the later in appearance before the world; and thus

[44]Bernoulli usa la frase "de universali rerum apocatastasi dogmate"e quindi presumibilmente fa riferimento alla cosiddetta *Dottrina del Grande Anno*: quando gli astri assumeranno la stessa posizione che avevano all'inizio dell'universo, avverrà una grande conflagrazione e il tempo e il mondo ricominceranno un nuovo ciclo.

[45]Charles Gouraud, *Historie du calcul des probabilités depuis origines jusq'à nos jours*, Parigi, 1848.

the influence which they might have exercised had been already produced. The problems in the first three parts of the *Ars Conjectandi* cannot be considered equal in importance or difficulty to those which we find investigated by Montmort and De Moivre; but the memorable theorem in the fourth part, which justly bears its author's name, will ensure him a permanent placed in the history of the Theory of Probability.".

POSTFAZIONE Quando, in occasione del mio pensionamento, ho deciso di tenere la cosiddetta "Ultima Lezione" ho preferito, invece di uno "stato dell'arte" dell'attuale indagine sui fondamenti della probabilità, che avrebbe comportato un'esposizione fortemente tecnica, esporre e commentare un testo vecchio di 303 anni, l'*Ars Conjectandi* di Jakob Bernoulli; un testo universalmente noto che però ben pochi, al di fuori degli storici della scienza, conoscono. Ritengo infatti che la lettura di un classico della probabilità (e più in generale dei classici del pensiero scientifico) sia intellettualmente molto stimolante poiché consente, conducendo alle origini della teoria, di comprendere le motivazioni e le scelte più o meno fondate assunte dagli autori posteriori che talvolta sono adombrate, se non addirittura nascoste, da trattazioni "asettiche" di tipo ipotetico-deduttivo, basate sull'idea che: "The theory of probability, as a mathematical discipline, can and should be developed from axioms in exactly the same way as Geometry and Algebra."(Kolmogorov, *op.cit.*, p. 1).

Tra le molteplici note di commento a piè di pagina, alcune sono dedicate sia ai debiti che Bernoulli aveva con i suoi contemporanei in merito ad alcune nozioni fondamentali che a problematiche attuali in qualche modo connesse con alcune delle sue idee (e.g. probabilità non additive, classificazione degli eventi nella *logica dell'incertezza* di de Finetti).

Credo sia un ulteriore grande merito di Bernoulli, non sempre adeguatamente messo in luce a differenza del *theorema aureum*, essere stato il primo a identificare la misura della probabilità di un evento con il giusto prezzo della scommessa relativa all'evento, anticipando così la base concettuale delle impostazioni della teoria soggettiva delle probabilità di Frank P. Ramsey (1926; *Truth and probability*, in Ramsey, *The foundations of mathematics and other logical essays*, Londra, 1931, pp. 156-198) e di de Finetti (1931; *Sul significato soggettivo delle probabilità*, Fundamenta Mathematica, XVII, pp. 298-329).