Numero irrazionale Φ

Jadranka Santi*

Introduzione

Ho preso parte all'edizione 2006 della manifestazione "La matematica dei ragazzi: scambi d'esperienze tra coetanei" con la classe II B del Liceo Scientifico con lingua d'insegnamento slovena "France Prešeren" di Trieste. La classe è composta da nove allievi, due femmine e sette maschi. Dopo aver discusso con gli studenti sui possibili temi da presentare e aver ascoltato le loro opinioni, la scelta è caduta sul numero irrazionale Φ. Tale tema mi è sembrato particolarmente adatto poiché tocca molte delle conoscenze curricolari del biennio del liceo scientifico. D'altro canto, i ragazzi sembravano interessati ad approfondire tale materia, da loro scoperta attraverso la lettura del thriller *Il Codice Da Vinci* di Dan Brown.

Stabilito il tema, i ragazzi hanno provveduto alla ricerca del materiale, usando prevalentemente Internet. Il materiale recuperato era però troppo vasto perché i ragazzi riuscissero a rielaborarlo completamente da soli. L'ho sistemato dunque personalmente e ho compilato una dispensa, che è servita ai ragazzi per prepararsi alla manifestazione. La stessa è stata poi distribuita anche ai visitatori durante l'incontro.

Per presentare i contenuti, ho stabilito assieme ai ragazzi che essi si sarebbero divisi in tre gruppi di tre studenti ciascuno e che avrebbero preparato così tre laboratori. Per ogni gruppo, ho scelto un responsabile che avesse il compito di organizzare e coordinare il lavoro. I ragazzi sono stati lasciati liberi di trovare il modo migliore per presentare i contenuti. Osservandoli durante questi preparativi, ho notato con gioia che i responsabili distribuivano in modo equo tra i membri del gruppo il lavoro e gli argomenti da presentare e motivavano i compagni, specialmente quelli meno diligenti, rendendosi conto che il successo dipendeva dalla preparazione di tutti.

Nella seconda parte dei preparativi, abbiamo realizzato i cartelloni con l'illustrazione dei contenuti e vario materiale didattico indispensabile per spiegare in modo conciso gli argomenti, che erano, tutto sommato, abbastanza ostici. In questa occasione, gli studenti hanno imparato anche a realizzare varie costruzioni geometriche con il software *Cabri Géometrè*.

Infine, prendendo in considerazione le conoscenze dei possibili visitatori a vari livelli scolastici, abbiamo scelto quali temi presentare ai bambini delle scuole elementari e quali ai ragazzi delle medie e delle superiori.

Passo ora a spiegare in che modo i ragazzi hanno illustrato i numeri di Fibonacci ai visitatori.

I Numeri di Fibonacci e la Sezione Aurea

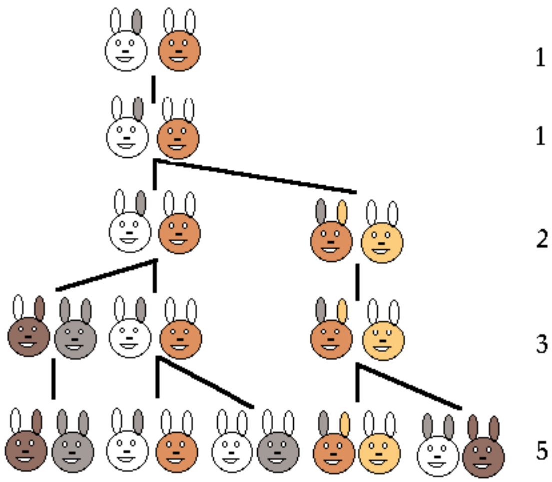
Bisogna premettere che i ragazzi erano inizialmente molto perplessi alla scoperta che avrebbero dovuto spiegare quanto da loro appreso anche ai bambini delle elementari. Ma, di fronte agli scolari che li guardavano con curiosità, si sono ben presto immedesimati nel ruolo di insegnanti, raccontando i contenuti in modo semplice e accattivante.

Alla fine del meeting, fatto il resoconto dell'esperienza, i ragazzi erano tutti d'accordo sul fatto che fosse molto meglio lavorare con dei bambini piccoli, curiosi e attivi, piuttosto che con degli adolescenti, che, a volte, sembrano venuti alla manifestazione perché costretti dai loro insegnanti.

L'introduzione al laboratorio dedicato ai numeri di Fibonacci partiva con dei cenni storici sulla figura di Fibonacci, per poi trattare la sua opera più nota, il *Liber Abaci*. Si passava poi a illustrare il "problema dei conigli", come segue.

> *Uno dei problemi più famosi del* Liber Abaci *si trova nelle pagine 123-124 dell'edizione del 1228 e recita:*
> *"Quanti conigli produce una coppia di conigli in un anno?"*
> *Si parte raccontando che una coppia di conigli di un mese d'età fu posta in un recinto per determinare quanti conigli potessero essere prodotti da questa coppia in un anno, supponendo che ogni mese ogni coppia ne creasse un'altra, la quale dal secondo mese in poi diventa produttiva. Si suppone inoltre che i conigli durante l'anno in cui sono osservati non muoiano.*
> *Poiché la prima coppia ha figliato nel primo mese, il numero raddoppia, e alla fine del primo mese si hanno due coppie. Di queste, una coppia, la prima, figlia nel secondo mese, in modo che alla fine del secondo mese le coppie sono tre. Di queste coppie,*

due figliano nel mese seguente, in modo che alla fine del terzo mese sono nate altre due coppie: il numero sale così a cinque. Iterando questo procedimento, si vede che dopo un anno si hanno 377 coppie.
Se si osserva la figura, da noi trovata in rete, si può vedere come siamo arrivati a questo risultato. Siamo partiti sommando il primo numero al secondo numero ottenuto, cioè 1 a 2, poi il secondo al terzo e il terzo al quarto, e così di seguito, fino a che non abbiamo addizionato l'undicesimo e il dodicesimo numero ottenuto, cioè 144 e 233, e di conseguenza abbiamo calcolato il numero totale delle coppie di conigli in questione, 377, da cui si può ricavare la risposta al quesito.
La successione: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... viene chiamata "successione di Fibonacci".



Visto che spiegare tale problema è risultato noioso, i ragazzi hanno pensato di preparare un cartellone su cui incollare le nuove coppie di conigli che man mano "nascevano". In questo modo la spiegazione è diventata molto più divertente e comprensibile anche per i bambini piccoli.

Dopo questa introduzione, i visitatori delle medie e delle superiori scoprivano, guidati dai narratori, che cos'è una successione in generale, come si genera la successione di Fibonacci, alcune sue proprietà e come la successione dei rapporti di due numeri successivi della successione di Fibonacci tende ad un numero irrazionale, indicato con Φ.

Quest'ultima proprietà veniva poi verificata, con l'aiuto di una calcolatrice, dai visitatori, che trovavano alcuni valori del rapporto f_n/f_{n-1} come quelli illustrati nella Tabella 1.

I ragazzi hanno ben presto osservato che l'attenzione dei visitatori calava se essi non venivano opportunamente coinvolti durante l'esposizione dei contenuti teorici, e quindi hanno imparato a porre delle domande e a destare così l'interesse dei coetanei.

Finita l'esposizione della parte teorica, i ragazzi proponevano un problema legato all'equiscomponibilità delle figure piane. Preso un quadrato di lato 8 e quindi di area 64, scomponendo la figura in modo opportuno e ricomponendola, si può ottenere, apparentemente, un rettangolo di lati 13 e 5, e quindi di area 65. Proponendo il problema con il supporto di un modello di cartone, il quadratino che avanza si mimetizza molto bene e, per un attimo, i visitatori restavano veramente senza parole. In realtà, questo problema è legato strettamente a una delle proprietà fondamentali della successione di Fibonacci: il quadrato di un qualsiasi termine della successione differisce di 1 dal prodotto del termine precedente con quello successivo. In questo caso, si ha: $8^2 = 5 \times 13 - 1$.

f_n	f_n/f_{n-1}
1	
1	1,00000000
2	2,00000000
3	1,50000000
5	1,66666667
8	1,60000000
13	1,62500000
21	1,61538462
34	1,61904762
55	1,61764706
89	1,61818182
144	1,61797753
233	1,61805556
...	...

Tabella 1

A questo punto, si passava a illustrare dei casi in cui la successione è presente in natura. Questa parte era spiegata prestando ovviamente attenzione al linguaggio che veniva utilizzato e che doveva essere adeguato all'età dei vari ascoltatori, a tutti i visitatori. Si portavano i seguenti esempi, illustrandoli con delle figure o con modelli concreti:

– Molte piante hanno un numero di petali corrispondenti a numeri di Fibonacci. Il lilium e l'iris ne hanno 3, la rosa selvaggia e l'aquilegia 5, il delphinium 8, la cineraria 13, ecc. In marzo, questi fiori non fioriscono, perciò ci siamo limitati a mostrarne ai visitatori alcune foto.

– La crescita dell'achillea ptarmica segue uno schema ben preciso: ogni ramo impiega un mese prima di potersi biforcare. Al primo mese, quindi, c'è 1 ramo, al secondo 2, al terzo 3, al quarto 5, e così via. In questi numeri si riconosce subito la successione di Fibonacci.

– I pistilli dei fiori spesso sono disposti secondo uno schema preciso, formato da spirali, il cui numero corrisponde a uno della serie di Fibonacci. Ciò permette loro di essere uniformemente sparsi e non troppo ammassati al centro.

– Nel tagliare un frutto, spesso ci troviamo di fronte a un numero di Fibonacci. Ad esempio, la banana ha 3 sezioni, mentre la mela ne ha 5.

– Le foglie sui rami di numerose piante sono disposte in modo da presentare alcuni numeri della sequenza di Fibonacci. Le foglie sono disposte sui rami in modo tale da non sovrapporsi l'una all'altra per permettere a ciascuna di ricevere la luce del sole. Se prendiamo come punto di partenza la prima foglia di un ramo e passiamo di foglia in foglia in senso orario o antiorario, il numero di giri che compiremo prima di trovare una foglia sovrapposta a quella di partenza corrisponde sempre a un numero di Fibonacci. Due esempi di tale crescita sono stati illustrati costruendo dei modelli. Uno di essi rappresentava la crescita di una pianta, cioè lo stelo con le foglie intorno. L'altro, invece, rappresentava una pianta vista dall'alto ed era costituito da un disco di carta, su cui erano fissate al centro delle foglie di carta che potevano essere ruotate. Con esso si poteva simulare la crescita delle foglie e capire come esse si debbano disporre intorno allo stelo per ricevere la massima quantità di luce.

Per i bambini delle elementari era stata ideata una parte ludica, nella quale essi dovevano individuare e colorare le spirali su delle pigne, che poi potevano tenere, per ricordo della visita. I più grandi, invece, potevano disegnare con il software Cabri Géometrè il rettangolo aureo e la spirale a esso associata, costruita con quarti di cerchio, i cui raggi formano una successione di Fibonacci.

Conclusioni

Alla fine dell'anno scolastico, i ragazzi hanno compilato il questionario rivolto a tutti i partecipanti e hanno svolto una verifica scritta, non preannunciata, sui contenuti da loro esposti, dimostrando, in generale, di ricordare i temi trattati e di essere soddisfatti dell'esperienza.

NOTE

* Liceo Scientifico Statale con lingua d'insegnamento slovena "F. Prešeren",
Strada di Guardiella 13/1,
I-34128 Trieste
e-mail: licejpreseren@adriacom.it

BIBLIOGRAFIA

BURGER E.B., STARBIRD M., 2000, *The heart of mathematics: an invitation to effective thinking*, Key College publishing (in cooperation with Springer), Emeryville, California.

LIVIO M., 2003, *La sezione aurea: storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*, Rizzoli, Milano.

PAVLIČ G., 1998, *Slikovni poimovnik, Matematika*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana.

VOROBYOV N.N., 1965, *I numeri di Fibonacci*, Progresso tecnico editoriale, Milano.

SITI WEB

wikipedia.net

sectioaurea.com

goldennumber.net