Capitolo 8

ENTI E NUMERI ALEATORI

I numeri aleatori (più in generale gli enti aleatori) sono gli strumenti che accanto agli eventi stanno alla base dello studio dei problemi dell'incertezza. In estrema sintesi – seguendo de Finetti – i numeri aleatori sono numeri *ben determinati*, di *valore non noto* (solitamente) per *carenza d'informazione*. Sono poi *ben definiti* solo se si "elencano" le loro *determinazioni possibili*, facendole così di fatto corrispondere ai casi possibili di una partizione. Il contenuto di questo capitolo è una traduzione formale di questo concetto (di una sua generalizzazione). Viene fatta dopo aver osservato che ogni *applicazione aleatoria* (a.a.) – definita su una partizione (*Definizione* 8.2.1) – descrive un *ente* di valore *determinato* dall'immagine del costituente possibile del suo dominio (3.4.1 *Commento*), che a.a. diverse possono descrivere lo stesso ente e che quelle che lo fanno sono *equivalenti* in ogni insieme di a.a. (*Definizione* 8.2.2 e 8.2.2 *Commento*). Gli *enti aleatori* (e.a.) sono classi di equivalenza di a.a. (*Definizione* 8.2.4) – numeri aleatori (n.a.) se le a.a. sono a valori numerici –. In vista di ottenere e.a. componendo e.a. (in particolare di introdurre operazioni con n.a. e loro funzioni) viene introdotta la nozione di n-pla aleatoria (*Definizione* 8.3.2) a cui segue quella di e.a. *trasformato* di (composto con) enti aleatori (*Definizione* 8.3.3). La nozione classica di n.a. è solo *analoga* a quella qui proposta. Essa è infatti di natura *statica:* le applicazioni sono esse stesse n.a., perché il loro dominio è *fisso* (la partizione base della descrizione). Quella proposta è soggetta invece a *evoluzione* (n° 8.3.4), come deve essere per rispettare la natura *dinamica* della descrizione.

8.1 Preliminari

Assieme agli eventi, i numeri aleatori sono gli enti che si presentano con maggiore frequenza in modo del tutto naturale nei problemi dell'incertezza. Tanto naturale, che in alcuni degli esempi sin qui considerati, a cominciare dai primi due, gli eventi che si considerano parlano di situazioni che riguardano numeri aleatori. È aleatorio infatti il *punto* che si realizza lanciando un dado (2.1.1 *Esempio* 1), il numero (la percentuale) di pezzi

difettosi in un lotto di n (2.1.1 *Esempio* 2). Altri esempi già visti sono il primo numero estratto sulla ruota di Venezia in una data estrazione (4.1.1 *Esempio* 1), il punto somma che si realizza lanciando due dadi (4.1.1 *Esempio* 8). Altri sono facili da immaginare, come la vincita del possessore di un biglietto di una data lotteria, il numero di chiamate telefoniche che arrivano a un centralino tra le 9 e le 12 di un assegnato giorno, il livello massimo della marea domani a Venezia, e così via. Per uscire da questa esposizione del tutto informale, andiamo a riflettere sui primi due esempi.

Indichiamo con X il punto realizzato lanciando un dado. Questo numero *a priori* – prima che venga effettuato il lancio, o comunque non conoscendone l'esito – *non è noto* e può essere uno qualsiasi dei primi 6 numeri naturali. Tuttavia, essendo il lancio ben determinato, è allora ben determinata anche la faccia che presenterà il dado e il punto punzonato su di essa – quello che *tutti* possono osservare dopo il lancio –. Si tratta perciò, come si usa dire, di un numero *aleatorio* – nel senso di *incerto per carenza di informazione* –, ma di *valore ben determinato,* che possiamo descrivere "elencando" i suoi *valori possibili* mediante gli eventi $(X = h)$ = *il punto realizzato è h,* $h = 1, \dots, 6$. In termini formali il numero aleatorio X è definito (descritto) dall'applicazione della partizione $\{X = 1, \dots, X = 6\}$ nei numeri naturali, che fa corrispondere all'evento elementare $X = h$ il numero h. In questo modo esso riesce infatti ben determinato, perché in ogni partizione è ben determinato l'unico costituente vero (3.4.1 *Commento*) – anche se non si sa dire quale – e quindi il numero ad essa associato.

Passando ora a 2.1.1 *Esempio* 2, indichiamo con Y il numero di pezzi difettosi in un lotto di n. Se si suppone di non saper dire a priori per nessuno degli n pezzi prodotti se è buono o difettoso, allora Y *non è noto* e *può essere* uno qualunque dei numeri $0, 1, \dots, n$. Come il numero X precedente, anche Y è *ben determinato* e, posto $(Y = h)$ = *il numero di pezzi difettosi è h* esso è definito dall'applicazione di dominio la partizione $\{Y = 0, \dots, Y = n\}$ che fa corrispondere all'evento elementare

$Y = h$ il numero h. Se per conoscere il valore assunto da Y si pensa di operare esaminando i pezzi uno per volta nell'ordine in cui vengono prodotti, posto D_h = *l'h-esimo pezzo esaminato è difettoso,* viene naturale descrivere la situazione introducendo la partizione generata da $D_1, \dots, D_n$ (*Proposizione* 6.3.1). Il numero di pezzi difettosi viene determinato allora dall'applicazione di dominio $\mathbb{P}_G(\{D_1, \dots, D_n\})$, che fa corrispondere ad ogni evento elementare $D_1' \wedge \dots \wedge D_n'$ il numero di affermazioni presenti nella sequenza $D_1', \dots, D_n'$. Anche in questa descrizione il valore assunto da Y è ben determinato, perché è ben determinato l'evento elementare vero di $\mathbb{P}_G(\{D_1, \dots, D_n\})$ e quindi il valore ad esso associato. La differenza tra questa descrizione e la prima sta solo nel fatto che nella prima l'applicazione è iniettiva (*Nota* 18 a piè di pagina) – ogni valore dell'immagine $\{1, \dots, n\}$ corrisponde a un solo evento elementare –, mentre nella attuale il valore h corrisponde a $\binom{n}{h}$ eventi elementari. È però intuitivo che le due applicazioni determinino lo stesso numero aleatorio, perché sono descrizioni formalmente diverse del risultato di un medesimo esperimento. Ciò può essere giustificato del resto in modo preciso osservando che la partizione $\{Y=0, \dots, Y=n\}$ è meno fine della partizione $\mathbb{P}_G(\{D_1, \dots, D_n\})$. Indicato infatti con $[D_1' \wedge \dots \wedge D_n']_h$ il generico costituente di $\mathbb{P}_G(\{D_1, \dots, D_n\})$ con h componenti affermati e $n-h$ negati, esso è di tipo 1 per $Y = h$ e di tipo 2 per $Y = i$, per ogni $i \neq h$. Sicché riesce $(Y=h) = \bigvee^{(1)} [D_1' \wedge \dots \wedge D_n']_h$. Pertanto, se $D_1' \wedge \dots \wedge D_n'$ è il costituente vero di $\mathbb{P}_G(\{D_1, \dots, D_n\})$ e ha h componenti affermate, allora $Y = h$ è il costituente vero di $\{Y=0, \dots, Y=n\}$ ed entrambe le applicazioni dichiarano che il numero dei pezzi difettosi è h. Accade anche il viceversa: se è vero il costituente $Y = h$, è vero allora anche uno dei costituenti $[D_1' \wedge \dots \wedge D_n']_h$, e si conclude come prima.

Quello che interessa mettere per il momento in evidenza, riassumendo le considerazioni svolte, è che i numeri aleatori possono essere descritti da applicazioni diverse. Si pone in proposito naturalmente il problema di riconoscere quando le applicazioni di un insieme descrivono lo stesso numero aleatorio. La questione è trattata con l'introduzione della nozione di

applicazioni equivalenti nel prossimo n° 8.2.2. In tale numero la nozione è data anzi con significato più generale di quello sin qui considerato. Con riferimento cioè ad applicazioni che hanno come dominio una partizione dell'evento certo, ma immagine in un insieme qualsiasi. Ciò viene fatto in vista di introdurre una nozione più generale di quella di numero aleatorio. In effetti, non è difficile immaginare situazioni analoghe a quella dei numeri aleatori, che descrivono però *enti aleatori* più generali. Basterà accennare qui alla vincita di una lotteria che prevede premi in natura, solo o in parte, e al punto che si realizza lanciando un dado da poker, le cui facce sono Asso, Re, Donna, Fante, 10, 9. L'argomento è trattato ponendosi in questo ordine di idee generale nel prossimo paragrafo.

8.2 Enti aleatori

Nel nostro contesto il termine *aleatorio* ha il significato esclusivo di *incerto*. In questa accezione lo abbiamo del resto già utilizzato nel precedente paragrafo, nell'introduzione intuitiva della nozione di numero aleatorio e di quella di significato più esteso di *ente aleatorio*. Anche se il nostro interesse sarà rivolto nel seguito principalmente allo studio dei numeri aleatori, l'introduzione del concetto nella versione estesa – che non comporta tra l'altro difficoltà maggiori di quelle che si incontrano nel caso particolare – è indispensabile se vogliamo essere in grado di descrivere tutte le situazioni incerte che si possono presentare, nella realtà o in modo idealizzato nei modelli matematici. Solo allora sarà ad esempio possibile parlare di punti aleatori di una figura geometrica, di traiettoria aleatoria di un corpo mobile, di premio aleatorio di lotterie che prevedono premi in natura, e così via. Va comunque osservato che, anche volendo, non ci si può limitare all'introduzione del concetto di numero aleatorio, perché per definire in modo rigoroso le operazioni con numeri aleatori, o più in generale

considerare loro funzioni – numeri aleatori trasformati di assegnati numeri aleatori – occorre introdurre almeno anche la nozione di *n-pla di numeri aleatori*, che viene definita mediante applicazioni aleatorie di codominio $\mathbb{R}^n$.

Come si è fatto cenno nel paragrafo introduttivo precedente, gli enti aleatori vengono descritti da applicazioni aleatorie equivalenti. Le due nozioni – di applicazione aleatoria e di equivalenza –, spiegate in quel contesto su esempi, hanno bisogno di essere definite in modo preciso ed approfondite.

8.2.1 Definizione. *Applicazione aleatoria.*

Sia $\mathbb{P}$ una partizione di Ω e S un insieme qualsiasi. Diremo ***applicazione aleatoria*** *ogni applicazione di $\mathbb{P}$ in S.*

NOTA.

Come si è ricordato poco sopra, la nozione di applicazione aleatoria viene introdotta per descrivere elementi *ben determinati:* quelli associati all'unico evento elementare vero – generalmente non noto – del loro insieme (partizione) di definizione. Ciò può indurre a ritenere più appropriato che i domini delle applicazioni aleatorie siano *partizioni* in *eventi elementari.* La presenza dell'evento impossibile nel dominio – nella partizione – appare infatti superflua se si osserva che, essendo falso, l'evento impossibile non può mai essere il costituente che determina il valore assunto da una applicazione aleatoria. Tuttavia, consentire alle applicazioni aleatorie di essere definite anche sui costituenti impossibili, lungi dall'essere superfluo, è al contrario comodo e in taluni casi addirittura indispensabile, per le medesime ragioni per cui si è deciso di consentire all'evento impossibile di far parte di una partizione. Ovvero, perché ciò ci esonera dall'obbligo di distinguere *ad ogni costo* i costituenti possibili da quelli impossibili. Poter ignorare questa distinzione diventa indispensabile – come sottolineato in 3.4.1 *Nota e terminologia* – soprattutto in occasione di taluni sviluppi teorici che prevedono l'introduzione di partizioni con procedimenti "costruttivi". Va comunque precisato che i concetti che servono a rendere le applicazioni aleatorie adatte per descrivere enti ben determinati – ad esempio la prossima nozione di equivalenza – devono essere date con riferimento ad applicazioni definite su partizioni in eventi elementari o, come più spesso faremo, a loro restrizioni su tali domini.

8.2.2 Definizione. *Applicazioni aleatorie equivalenti.*

Siano $\boldsymbol{x}$ *e* $\boldsymbol{y}$ *applicazioni (aleatorie) di dominio* $\mathbb{P}_x$ *e* $\mathbb{P}_y$*, rispettivamente. Diremo che* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *sono* ***applicazioni aleatorie equivalenti****, e scriveremo* $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$*, se per ogni* $\omega_x \wedge \omega_y$ *possibile della partizione prodotto* $\mathbb{P}_x \wedge \mathbb{P}_y$ *riesce* $\boldsymbol{x}(\omega_x) = \boldsymbol{y}(\omega_y)$.

PROPOSIZIONE.

In ogni insieme non vuoto di applicazioni aleatorie $\mathcal{X}$ *la relazione* $\sim$ *è un'equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE.

La prova delle proprietà riflessiva e simmetrica è immediata. Facile pure quella della proprietà transitiva. Siano infatti $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{X}$ definite su $\mathbb{P}_x$, $\mathbb{P}_y$, $\mathbb{P}_z$ e riesca $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \sim \boldsymbol{z}$. Scelto allora $\omega_x \wedge \omega_z$ possibile in $\mathbb{P}_x \wedge \mathbb{P}_z$, per il *Lemma* 6.1.2 esiste $\omega_y \in \mathbb{P}_y$ possibile, tale che $(\omega_x \wedge \omega_z) \wedge \omega_y \in \mathbb{P}_x \wedge \mathbb{P}_z \wedge \mathbb{P}_y$ risulti possibile. Ne segue $\omega_x \wedge \omega_y$, $\omega_y \wedge \omega_z$ sono possibili (3.3.2*h*), e quindi, per definizione di applicazione equivalente, $\boldsymbol{x}(\omega_x) = \boldsymbol{y}(\omega_y)$ e $\boldsymbol{y}(\omega_y) = \boldsymbol{z}(\omega_z)$. Da qui la conclusione. ■

COMMENTO.

La relazione $\sim$ è data in modo che le restrizioni agli eventi elementari di due applicazioni dichiarate equivalenti definiscano il *medesimo elemento aleatorio*. Esse determinano infatti per definizione lo stesso elemento del codominio S, qualunque sia l'evento elementare vero della partizione $\mathbb{P}_x \wedge \mathbb{P}_y$, e conseguentemente qualunque siano gli eventi elementari veri di $\mathbb{P}_x$ e $\mathbb{P}_y$. La relazione chiama in causa solo immagini di eventi elementari delle due partizioni, come giustamente deve essere, perché la relazione $\sim$ riguarda le applicazioni aleatorie, per le quali la presenza nei rispettivi domini di eventuali costituenti impossibili deve essere ininfluente.

ESEMPIO.

In una festa paesana viene organizzata una lotteria che prevede i seguenti premi: 1000 euro al primo biglietto estratto, 500 al secondo estratto, un prosciutto dal 3° al 12° estratto, una scatola di cioccolatini dal 13° al 30°, una bottiglia di vino dal 31° al 100°.

Con riferimento a Tizio, possessore di un biglietto, si può descrivere il suo

premio aleatorio introducendo la partizione $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_p, \omega_s, \omega_b\}$ – ove ω_0 = *Tizio non vince*, ω_1 = *Tizio vince 1000 euro*, ω_2 = *Tizio vince 500 euro*, ω_p = *Tizio vince un prosciutto*, ω_s = *Tizio vince una scatola di cioccolatini*, ω_b = *Tizio vince una bottiglia di vino* – e definendo su di essa l'applicazione $\boldsymbol{x}$ come segue:

$$\boldsymbol{x}(\omega_x) = \begin{cases} \text{nulla} & x = 0 \\ \text{1000 euro} & x = 1 \\ \text{500 euro} & x = 2 \\ \text{un prosciutto} & x = p \\ \text{una scatola di cioccolatini} & x = s \\ \text{una bottiglia di vino} & x = b \end{cases}$$

In alternativa, un altro modo naturale di descrivere lo stesso premio aleatorio è quello di ricorrere alla partizione $\mathbb{P} = \{e_0, e_1, \dots, e_{100}\}$ ove e_0 = *il biglietto di Tizio non viene estratto*, e_i = *il biglietto di Tizio viene estratto all'i-esimo posto*, $i = 1, \dots, 100$, e considerare in corrispondenza l'applicazione

$$\boldsymbol{y}(e_i) = \begin{cases} \text{nulla} & i = 0 \\ \text{1000 euro} & i = 1 \\ \text{500 euro} & i = 2 \\ \text{un prosciutto} & i = 3, \dots, 12 \\ \text{una scatola di cioccolatini} & i = 13, \dots, 30 \\ \text{una bottiglia di vino} & i = 31, \dots, 100 \end{cases}$$

Le applicazioni $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ sono equivalenti, com'è facile verificare – e deve essere, se vogliamo descrivere lo stesso premio –. Infatti, ω_0 è compatibile solo con e_0 e in entrambi i casi Tizio perde; ω_1 (ω_2) è compatibile solo con e_1 (e_2) e in entrambi i casi Tizio vince 1000 (500) euro; ω_p è compatibile con $e_3, \dots, e_{12}$ e in tutti questi casi Tizio vince un prosciutto; ω_s è compatibile con … .

8.2.3 Teorema. Applicazione canonica.

Le restrizioni di applicazioni aleatorie equivalenti ai rispettivi domini (partizioni) in eventi elementari hanno la medesima immagine e determinano, suo tramite, una ed una sola comune applicazione aleatoria iniettiva equivalente, che prende il nome di ***applicazione canonica*** *associata. Il suo dominio è meno fine di quelli delle applicazioni ad essa equivalenti.*

Dimostrazione.

Poiché la relazione $\sim$ è una equivalenza, è sufficiente ragionare con una coppia di applicazioni. Siano allora $\mathbb{P}_x$ e $\mathbb{P}_y$ i domini (partizioni) di due applicazioni aleatorie equivalenti $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, rispettivamente. Scelto un *generico* elemento dell'immagine di $\boldsymbol{x}$, ovvero un $\boldsymbol{x}(\omega)$ con $\omega \in \mathbb{P}_x^{\phi}$, esiste un $e \in \mathbb{P}_y$ tale che $\omega \wedge e \neq \phi$ (*Lemma* 6.1.2). Per l'equivalenza delle due applicazioni si ha allora $\boldsymbol{y}(e) = \boldsymbol{x}(\omega)$, da cui segue che l'immagine di $\boldsymbol{x}$ è inclusa in quella di $\boldsymbol{y}$. Con ragionamento simmetrico si ottiene il viceversa e ciò prova la prima parte della tesi.

Indicheremo con $\mathfrak{I}$, nel seguito della dimostrazione, la comune immagine delle *restrizioni* delle applicazioni $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ ai rispettivi domini in eventi elementari.

Con riferimento all'applicazione $\boldsymbol{x}$ proviamo ora che l'insieme di eventi $\{\vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) : a \in \mathfrak{I}\}$ è una partizione. Per $a, b \in \mathfrak{I}$, $a \neq b$, le controimmagini

$$\boldsymbol{x}^{-1}(a) = \{\omega \in \mathbb{P}_x : \boldsymbol{x}(\omega) = a\} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}^{-1}(b) = \{\omega \in \mathbb{P}_x : \boldsymbol{x}(\omega) = b\}, \qquad (15)$$

a meno del costituente impossibile (eventuale), sono sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{P}_x$ e quindi $\vee \boldsymbol{x}^{-1}(a)$ e $\vee \boldsymbol{x}^{-1}(b)$ sono eventi incompatibili (*Proposizione* 3.5.1). Si ha poi ovviamente

$$\vee_{a \in \mathfrak{I}} \vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) = \vee_{a \in \mathfrak{I}} \vee \{\omega \in \mathbb{P}_x : \boldsymbol{x}(\omega) = a\} = \vee \mathbb{P}_x = \Omega.$$

Ciò prova che $\{\vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) : a \in \mathfrak{I}\}$ è una partizione, come si voleva. In virtù della (15) si vede pure che i suoi eventi sono logicamente dipendenti da $\mathbb{P}_x$, e quindi che essa è meno fine della $\mathbb{P}_x$ medesima (*Definizione* 6.1.1).
Simmetricamente, $\{\vee \boldsymbol{y}^{-1}(a) : a \in \mathfrak{I}\}$ è una partizione meno fine di $\mathbb{P}_y$ e, come andiamo ora a provare, essa è uguale alla precedente. Osserviamo intanto per questo che, essendo $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ equivalenti, per ogni $\omega \in \mathbb{P}_x^{\phi}$ ed $e \in \mathbb{P}_y^{\phi}$ per cui $\boldsymbol{x}(\omega) \neq \boldsymbol{y}(e)$, riesce $\omega \wedge e = \phi$. Allora, qualunque sia $a \in \mathfrak{I}$ si ha:

$$\vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) = \Omega \wedge \vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) = \vee \mathbb{P}_y \wedge \vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) =$$
$$\vee \{e \in \mathbb{P}_y\} \wedge \vee \{\omega \in \mathbb{P}_x : \boldsymbol{x}(\omega) = a\} = \vee \{e \wedge \omega \in \mathbb{P}_y \wedge \mathbb{P}_x : \boldsymbol{x}(\omega) = a\} =$$
$$\vee \{e \wedge \omega \in \mathbb{P}_y^{\phi} \wedge \mathbb{P}_x^{\phi} : \boldsymbol{y}(e) = \boldsymbol{x}(\omega) = a\}.$$

Il risultato che esprime l'evento $\vee \boldsymbol{x}^{-1}(a)$ è simmetrico rispetto alle applicazioni $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, e simmetrica è anche l'ipotesi su di queste. Invertendo il loro ruolo ed eseguendo gli stessi calcoli, si trova perciò che l'evento $\vee \boldsymbol{y}^{-1}(a)$ è espresso dallo stesso risultato. Riesce allora $\vee \boldsymbol{x}^{-1}(a) = \vee \boldsymbol{y}^{-1}(a)$ per ogni $a \in \mathfrak{I}$, e le due partizioni sono uguali come asserito.

A questo punto, ponendo $\boldsymbol{x}^c(\boldsymbol{x}^{-1}(a)) = a$ – o indifferentemente $\boldsymbol{y}^c(\boldsymbol{y}^{-1}(a)) = a$ – si trova un'applicazione aleatoria iniettiva (ovvio) ed equivalente a $\boldsymbol{x}$ (e a $\boldsymbol{y}$) come subito si verifica – basta osservare che $\omega \in \mathbb{P}_x^{\phi}$ è compatibile con $\vee\boldsymbol{x}^{-1}(a)$ se e solo se $\omega \Rightarrow \vee\boldsymbol{x}^{-1}(a)$, cioè se e solo se $\boldsymbol{x}(\omega) = a$ –, il cui dominio è meno fine di quello di $\boldsymbol{x}$ (e di $\boldsymbol{y}$), come visto sopra.

Resta da provare che questa applicazione è l'unica iniettiva equivalente a $\boldsymbol{x}$ (e a $\boldsymbol{y}$). Sia per questo $\boldsymbol{z}$ un'applicazione di dominio la partizione $\mathbb{P}$ in eventi elementari, iniettiva ed equivalente a $\boldsymbol{x}^c$ (e a $\boldsymbol{x}$). Come provato all'inizio di questa dimostrazione, in quanto equivalenti le applicazioni $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{x}^c$ hanno la stessa immagine $\mathfrak{I}$. In quanto iniettive, le rispettive controimmagini di ogni $a \in \mathfrak{I}$ sono singoli eventi elementari. Indicata ω_a la controimmagine di a in $\mathbb{P}$, si ha che $\mathbb{P} = \{\omega_a : a \in \mathfrak{I}\}$. Si tratta di dimostrare che per ogni a riesce $\omega_a = \vee\boldsymbol{x}^{-1}(a) \in \{\vee\boldsymbol{x}^{-1}(b) : b \in \mathfrak{I}\}$. Osserviamo intanto per questo che poiché $\boldsymbol{x}^c$ e $\boldsymbol{z}$ sono equivalenti riesce $\vee\boldsymbol{x}^{-1}(a) \wedge \omega_b = \phi$ se $b \neq a$, perché allora i componenti del prodotto associano immagini diverse. Il prodotto $\vee\boldsymbol{x}^{-1}(a) \wedge \omega_a$ è perciò l'unico non impossibile al variare di b in $\mathfrak{I}$ – uno ne deve esistere (*Lemma* 6.1.2) – e ai suoi componenti è associata la stessa immagine a. Ciò osservato, allora si ha:

$$\vee\boldsymbol{x}^{-1}(a) = \vee\mathbb{P} \wedge \vee\boldsymbol{x}^{-1}(a) = \vee_{b \in \mathfrak{I}} (\omega_b \wedge \vee\boldsymbol{x}^{-1}(a)) = \omega_a \wedge \vee\boldsymbol{x}^{-1}(a) =$$
$$\vee_{b \in \mathfrak{I}} (\omega_a \wedge \vee\boldsymbol{x}^{-1}(b)) = \omega_a \wedge \vee\{\vee\boldsymbol{x}^{-1}(b) : b \in \mathfrak{I}\} = \omega_a.$$

Le applicazioni $\boldsymbol{x}^c$ e $\boldsymbol{z}$ sono allora uguali, perché hanno lo stesso dominio e associano lo stesso elemento in corrispondenza a ogni evento elementare.

Con ciò la prova è completa. ■

Esempio.

Con riferimento a 8.2.2 *Esempio*, l'applicazione $\boldsymbol{x}$ di dominio $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_p, \omega_s, \omega_b\}$ è iniettiva, perciò canonica. La sua equivalenza con l'applicazione $\boldsymbol{y}$, già verificata nell'esempio citato, può essere provata anche mostrando che la sua applicazione canonica è $\boldsymbol{x}$. Sommando i casi possibili di $\mathbb{P}$ – dominio della $\boldsymbol{y}$ – che associano lo stesso premio si trova infatti:

$$e_0 = \omega_0,\ e_1 = \omega_1,\ e_2 = \omega_2,\ \bigvee_{i=3}^{12} e_i = \omega_p,\ \bigvee_{i=13}^{30} e_i = \omega_s,\ \bigvee_{i=31}^{100} = \omega_b.$$

Siamo ora in grado di introdurre la nozione di *ente aleatorio*. Il procedimento è analogo a quello seguito per

introdurre la nozione di evento, a livello più elevato però, perché ora è indispensabile avere a monte la nozione di evento per poter dare quella di applicazione aleatoria e, a seguire, quella di ente aleatorio. Gli eventi sono infatti classi di equivalenza di proposizioni della logica – enti primitivi –, mentre gli enti aleatori sono classi di equivalenza di applicazioni aleatorie – enti concettualmente di livello superiore a quello di evento – secondo quanto sarà precisato nella prossima definizione.

8.2.4 Definizione. Ente aleatorio.

Siano $\mathfrak{A}$ un insieme non vuoto di applicazioni aleatorie e $\mathfrak{A}_r$ l'insieme delle loro restrizioni agli eventi elementari. Diremo ***ente aleatorio*** *ogni classe di equivalenza individuata in $\mathfrak{A}_r$ dalla relazione $\sim$. Gli enti definiti dalle applicazioni costanti si dicono* ***enti certi****.*
L'immagine comune delle restrizioni delle applicazioni di ciascuna classe di equivalenza è detta anche ***immagine dell'ente aleatorio*** *da esse definito. Ai suoi elementi – a quelli dell'immagine – si dà il nome di* ***valori possibili*** *o* ***determinazioni possibili*** *dell'ente aleatorio medesimo.*

NOTA E TERMINOLOGIA.

Come nel caso degli eventi, per i quali basta una proposizione per definirli e questa può essere sostituita da altra ad essa α-equivalente, anche gli enti aleatori vengono concretamente definiti da un'applicazione aleatoria – tramite la sua restrizione agli eventi elementari – che può essere ovviamente sostituita da altra applicazione ad essa equivalente. Useremo perciò in seguito la terminologia «ente aleatorio definito dall'applicazione $\boldsymbol{x}$» anche quando l'applicazione è definita pure sui costituenti impossibili, intendendo correttamente (è ovvio) che l'ente è in realtà definito dalla sua restrizione.
Osserviamo poi che per ogni ente aleatorio $\mathbb{E}$ esiste *una e una sola* applicazione canonica (iniettiva) che lo definisce (*Teorema* 8.2.3), alla quale daremo in seguito il nome di **rappresentazione canonica** e diremo **partizione canonica** il suo dominio. Se $\mathfrak{I}$ è l'immagine di $\mathbb{E}$ (quella delle restrizioni agli eventi elementari delle applicazioni che lo definiscono) la sua *partizione canonica* in *eventi elementari* si scrive $\{\mathbb{E}=a : a\in\mathfrak{I}\}$. Con abuso di linguaggio

indicheremo spesso allo stesso modo anche la *rappresentazione (applicazione) canonica,* sottintendendo in quei casi che all'evento $\mathbb{E}=a$ si debba associare a.
Come visto nel *Teorema* 8.2.3 citato, la partizione canonica è la meno fine tra quelle che si possono scegliere per descrivere un ente aleatorio $\mathbb{E}$ e ogni evento elementare $\mathbb{E}=a$ di tale partizione è logicamente dipendente dal dominio (partizione) di ogni altra applicazione equivalente alla rappresentazione canonica. Se $\boldsymbol{x}$ è una applicazione che definisce $\mathbb{E}$ e $\mathbb{P}$ è il suo dominio, si ha $(\mathbb{E}=a) = \bigvee\{\omega\in \mathbb{P}^{\phi} : \boldsymbol{x}(\omega)=a\} = \bigvee\{\omega\in \mathbb{P} : \boldsymbol{x}(\omega)=a\}$. L'evento $\mathbb{E}=a$ può dunque essere espresso indifferentemente come somma di eventi elementari (purché non sia impossibile) o di costituenti – come accade sempre per gli eventi logicamente dipendenti da una partizione –. È interessante osservare nel caso specifico che l'evento $\mathbb{E}=a$ può essere espresso come somma di costituenti anche quando a è nell'immagine di $\boldsymbol{x}$ ma non in quella di $\mathbb{E}$ – ottenendo in tal caso ovviamente $(\mathbb{E}=a)=\phi$ –. È utile averlo presente, perché ciò dice che nella scrittura della partizione canonica *in costituenti* non si è obbligati a distinguere a priori l'immagine di $\boldsymbol{x}$ da quella della sua restrizione (cioè da quella di $\mathbb{E}$).
Osserviamo infine che la partizione canonica degli enti certi è la partizione nulla $\{\Omega\}$.

COMPLEMENTO. *Enti aleatori e logica dipendenza.*

Gli eventi che si possono descrivere mediante un ente aleatorio $\mathbb{E}$ sono quelli che affermano qualche cosa intorno alle sue determinazioni. Sono cioè tutti e soli gli eventi del tipo $(\mathbb{E}\in I) = \bigvee_{a\in I}\{\mathbb{E}=a : a\in I\subset \mathsf{S}\}$, ovvero gli eventi logicamente dipendenti dalla partizione canonica di $\mathbb{E}$. Evitando il riferimento alla partizione canonica, si usa anche dire allora che $\mathbb{E}\in I$ è un evento **logicamente dipendente** da $\mathbb{E}$. Analogamente, si dirà che un evento E è **logicamente dipendente** dagli enti aleatori $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ se esso è logicamente dipendente dalla partizione prodotto dalle loro partizioni canoniche.
Si dirà poi che $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ **sono logicamente indipendenti**, se sono tali le loro partizioni canoniche.

8.3 Trasformati di enti aleatori

Nella parte introduttiva del § 8.2 si è osservato che per introdurre numeri aleatori in funzione di altri numeri aleatori – in particolare loro operazioni –, occorre premettere la

nozione di *n-pla di numeri aleatori*. Come si è fatto sin qui, però, studieremo anche questo problema in termini generali, con riferimento cioè all'introduzione di enti aleatori in funzione di altri enti aleatori. Cosa che peraltro continua a non comportare maggiori difficoltà di quelle relative al caso particolare.

Per poter considerare enti aleatori in funzione di altri enti aleatori, occorre dunque dare prima la nozione di *ente aleatorio n-pla* di enti aleatori. In realtà, l'anticipazione è necessaria se si devono introdurre enti aleatori in funzione di *più* enti aleatori. Il problema degli enti aleatori funzione di *un solo* ente aleatorio potrebbe in effetti essere affrontato subito. È però evidente che per affinità di argomento conviene rimandare la sua trattazione assieme a quella generale.

La questione che ci poniamo per il momento è allora quella di ottenere una descrizione congiunta degli enti aleatori $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$. Partiamo per questo da una loro descrizione generica. Siano per questo $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ applicazioni aleatorie di dominio $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ e codominio comune S [32], che definiscono nell'ordine gli enti $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$. Per ogni costituente $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ della partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ poniamo $\boldsymbol{x}(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n) = (\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n))$. Si ottiene così un'applicazione aleatoria vettoriale $\boldsymbol{x}$ di dominio $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$, a valori in S^n, che pertanto descrive una n-pla aleatoria di elementi di S. Affinché sia corretto considerare questa n-pla – la sua restrizione su $(\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$ – una descrizione congiunta degli enti aleatori $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ – ovvero una descrizione della *n-pla aleatoria* $(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$ – bisogna provare che essa non dipende dalle particolare scelta delle applicazioni che definiscono i singoli enti. Ciò è quanto afferma il prossimo teorema, il quale aggiunge che ogni applicazione aleatoria vettoriale con codominio S^n è della forma dell'applicazione $\boldsymbol{x}$. Le n-ple aleatorie di codominio S^n sono cioè definite,

---

32 Dato comunque un insieme di applicazioni aleatorie, è sempre possibile supporre che abbiamo in comune il codominio. Basta per questo sostituire i rispettivi codomini con la loro unione.

tutte e sole, da una n-pla di applicazioni con codominio S.

8.3.1 Teorema.

Siano $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ enti aleatori, $\boldsymbol{x}_i$ di dominio $\mathbb{P}_i$ e codominio S una descrizione di $\mathbb{E}_i$, $i = 1, \dots, n$. Posto

$$\boldsymbol{x}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = (\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \dots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n)) \tag{16}$$

per ogni $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, l'applicazione aleatoria $\boldsymbol{x}$ di dominio $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ a valori in S^n definisce una n-pla aleatoria che non dipende dalle particolari applicazioni $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ scelte per descrivere $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$.
Inoltre, ogni ente aleatorio con immagine in S^n è descrivibile nella forma (16).

Dimostrazione.

Siano $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ applicazioni di domini $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_n$, equivalenti nell'ordine alle $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ dell'enunciato. Posto $\boldsymbol{y}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = (\boldsymbol{y}_1(e_1), \dots, \boldsymbol{y}_n(e_n))$ per ogni $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \mathbb{Q}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{Q}_n$, proviamo che allora le applicazioni aleatorie vettoriali $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$ sono equivalenti. Presi $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ e $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \mathbb{Q}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{Q}_n$ tali che $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) \wedge (e_1 \wedge \dots \wedge e_n) \neq \phi$, si ha $\omega_i \wedge e_i \neq \phi$ per ogni $i = 1, \dots, n$ (3.3.2h). Segue allora $\boldsymbol{x}_i(\omega_i) = \boldsymbol{y}_i(e_i)$ per ogni i – perché $\boldsymbol{x}_i$ e $\boldsymbol{y}_i$ sono equivalenti –, quindi $(\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \dots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n)) = (\boldsymbol{y}_1(e_1), \dots, \boldsymbol{y}_n(e_n))$, ovvero $\boldsymbol{x}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = \boldsymbol{y}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n)$. Perciò si ha che $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ e la prima parte del teorema è così provata.
Passando alla seconda parte, sia ora $\boldsymbol{z}$ un'applicazione di dominio $\mathbb{P}$ e codominio S^n. Ciò vuole dire che esistono n applicazioni $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n$ di dominio $\mathbb{P}$ e codominio S, tali che per ogni $\omega \in \mathbb{P}$ riesca $\boldsymbol{z}(\omega) = (\boldsymbol{z}_1(\omega), \dots, \boldsymbol{z}_n(\omega))$. Per dire che l'ente aleatorio definito da $\boldsymbol{z}$ è esprimibile nella forma (16), bisogna provare che se le applicazioni $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ sono rispettivamente equivalenti a $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n$, esse definiscono lo stesso ente aleatorio definito da $\boldsymbol{z}$. Indicati anche in questo passo della dimostrazione con $\mathbb{Q}_1, \dots, \mathbb{Q}_n$ i domini di $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$, si tratta di far vedere che posto $\boldsymbol{y}(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = (\boldsymbol{y}_1(e_1), \dots, \boldsymbol{y}_n(e_n))$, per ogni $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \mathbb{Q}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{Q}_n$, le applicazioni $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ sono equivalenti. Siano infatti $\omega \in \mathbb{P}$ e $e_1 \wedge \dots \wedge e_n \in \mathbb{Q}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{Q}_n$ tali che $\omega \wedge e_1 \wedge \dots \wedge e_n \neq \phi$. Segue allora $\omega \wedge e_i \neq \phi$ e, essendo $\boldsymbol{z}_i$ e $\boldsymbol{y}_i$ equivalenti, $\boldsymbol{z}_i(\omega) = \boldsymbol{y}_i(e_i)$, $i = 1, \dots, n$. La prova è così completa. ■

In virtù del teorema appena dimostrato possiamo ora dare la seguente definizione.

8.3.2 Definizione. n-pla aleatoria.

Siano $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ enti aleatori, $\boldsymbol{x}_i$ di dominio $\mathbb{P}_i$ e codominio S una descrizione di $\mathbb{E}_i$, $i = 1, \dots, n$. Posto

$$\boldsymbol{x}(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = (\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \dots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n))$$

*per ogni $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, l'ente aleatorio definito dall'applicazione aleatoria $\boldsymbol{x}$ di dominio $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ – dalla sua restrizione su $(\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$ – e a valori in S^n prende il nome di **n-pla aleatoria** (di enti) e viene indicato con $(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n)$.*

NOTA.

Come si vede, il dominio dell'applicazione *vettoriale* che definisce l'n-pla aleatoria è la partizione prodotto dei domini delle applicazioni *scalari* scelte per descrivere gli n enti aleatori assegnati. I domini di questi sono generalmente diversi. Si può però fare sempre in modo – ampliando eventualmente l'ambiente – che applicazioni scalari e applicazione vettoriale corrispondente abbiano tutte lo stesso dominio. Infatti, se le applicazioni scalari scelte in partenza sono $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ e $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ sono i loro domini, ponendo $\xi_i(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = \boldsymbol{x}_i(\omega_i)$ per ogni $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in \mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, $i = 1, \dots, n$, si ottengono le applicazioni $\xi_1, \dots, \xi_n$ equivalenti nell'ordine alle $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ (ovvio) e la corrispondente applicazione vettoriale

$$\xi(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n) = (\xi_1(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n), \dots, \xi_n(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n)).$$

Le applicazioni $\xi_1, \dots, \xi_n$ e la ξ, che definiscono nell'ordine gli stessi enti delle $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ e $\boldsymbol{x}$, sono definite sullo stesso dominio $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$, come si voleva. ■

Data la nozione di n-pla aleatoria di enti, siamo ora in grado di affrontare il problema della costruzione di enti aleatori in funzione di altri enti aleatori.

In termini formali, dati gli enti aleatori $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$, il problema è quello di dare significato alla trasformazione

$f(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n)$, essendo f un'applicazione certa di n variabili, $n \geq 1$. Vista la natura degli enti $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$ – sono classi di equivalenza –, ciò va fatto naturalmente operando con loro rappresentanti. Se $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ sono applicazioni di domini $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$ che definiscono $\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n$, si deve allora in primo luogo vedere se l'applicazione composta $f(\boldsymbol{x}_1(\cdot), \dots, \boldsymbol{x}_n(\cdot))$ è un'applicazione aleatoria. Si tratta cioè di vedere se la funzione f è definita su *tutte* le n-ple $(\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \dots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n))$ corrispondenti agli eventi elementari $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in (\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$, ovvero sull'intera immagine dell'n-pla aleatoria $(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n)$. Si badi in proposito che ai nostri fini sarebbe *concettualmente scorretto* considerare *restrizioni* dell'applicazione $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ su sottoinsiemi propri del suo dominio $(\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$, nell'intento di fare così in modo che l'applicazione $f(\boldsymbol{x}_1(\cdot), \dots, \boldsymbol{x}_n(\cdot))$ sia definita su di essi. Il nostro obbiettivo è infatti quello di definire un ente aleatorio – il trasformato $f(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n)$ – che deve essere *ben determinato* già *prima* di sapere qual è l'*evento elementare vero* della partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n$ che lo determina. E ciò accade se e solo se nessun costituente possibile di tale partizione viene escluso dall'insieme di definizione, perché altrimenti potrebbe essere proprio uno degli eventi elementari esclusi ad essere quello vero, il quale determinerebbe così l'n-pla associata all'applicazione vettoriale $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$, non potendo però fare altrettanto per il valore della f, che resterebbe così *indeterminata.*

Fermi restando gli assunti e i simboli precedenti, aggiungiamo perciò ora l'ipotesi che f sia definita sull'immagine dell'n-pla aleatoria $(\mathbb{E}_1, \dots, \mathbb{E}_n)$. Posto allora $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \dots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n))$ per ogni $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n \in (\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$, si ha che $\boldsymbol{x}$ è un'applicazione aleatoria. Come tale essa definisce un ente aleatorio, lo stesso definito da ogni altra applicazione aleatoria $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{y}_1(\cdot), \dots, \boldsymbol{y}_n(\cdot))$, di dominio $(\mathbb{Q}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{Q}_n)^\phi$, per cui riesca $\boldsymbol{y}_i \sim \boldsymbol{x}_i$, $i = 1, \dots, n$. Quest'ultima ipotesi implica infatti che le applicazioni vettoriali $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ e $(\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n)$ siano equivalenti (*Teorema* 8.3.1), che associno perciò la stessa n-pla qualunque siano gli eventi elementari veri dei rispettivi

domini $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ e $\mathbb{Q}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{Q}_n$) (8.2.2 *Commento*), e quindi anche lo stesso valore alla funzione f. In conclusione, abbiamo che la seguente definizione è consistente.

8.3.3 Definizione. Trasformato di enti aleatori.

Siano $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ enti aleatori definiti dalle applicazioni aleatorie $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ di domini rispettivi $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$, $f(\cdot, \ldots, \cdot)$ una funzione definita sull'immagine dell'n-pla aleatoria $(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$. Diremo ***trasformato*** *di $\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n$ secondo la f, l'ente aleatorio $\mathbb{E}$ definito dall'applicazione $f(\boldsymbol{x}(\cdot \wedge \ldots \wedge \cdot)) = f(\boldsymbol{x}_1(\cdot), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\cdot))$ di dominio $(\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$, e scriveremo $\mathbb{E} = f(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$.*

COMPLEMENTO.

Come messo in luce in 8.2.2 *Commento*, la presenza nei domini delle applicazioni aleatorie di eventuali costituenti impossibili — e delle relative immagini – è del tutto ininfluente per la definizione della nozione di «applicazioni aleatorie equivalenti», mentre al contrario sono tutti essenziali per la medesima gli eventi elementari – con le loro immagini –. La stessa cosa accade di conseguenza anche per il concetto di ente aleatorio che è definito come classe di applicazioni aleatorie equivalenti (*Definizione* 8.2.4).
Di ciò tiene conto la definizione attuale di «ente aleatorio trasformato di enti aleatori». Da un lato quando richiede che le funzioni usate per le trasformazioni siano definite sull'immagine dell'n-pla aleatoria $(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$ – ovvero sull'immagine delle restrizioni agli eventi elementari delle applicazioni vettoriali che la definiscono –, per fare in modo che, qualunque sia l'applicazione $\boldsymbol{x}$ che descrive $(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$, sia possibile calcolare l'applicazione aleatoria $f(\boldsymbol{x}_1(\cdot), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\cdot))$ su *tutti* gli eventi elementari della partizione $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$ – su $(\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n)^\phi$ –. Dall'altro quando dando la definizione del trasformato $f(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$ esclude dal dominio dell'applicazione $f(\boldsymbol{x}_1(\cdot), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\cdot))$ i costituenti impossibili, come si fa del resto per ogni ente aleatorio (*Definizione* 8.2.4). La differenza rispetto alla *Definizione* 8.2.4 è che qui si richiede *a priori* che l'applicazione sia definita su una partizione in eventi elementari. Cosa che del resto si sarebbe potuto fare già nel dare la detta definizione, perché operando in questo modo non si altera il concetto di ente aleatorio. Ma

che per le ragioni accennate in 8.2.1 *Nota* abbiamo invece preferito dare consentendo alle applicazioni di essere definite su partizioni in costituenti. Sotto questo aspetto l'attuale definizione appare perciò piuttosto rigida. Si tratta però di una rigidità facile da eliminare. Infatti, poiché i valori assunti dalla f su eventuali n-ple corrispondenti a costituenti impossibili sono ininfluenti per la definizione del trasformato $f(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$, quando occorre si potrà prolungare a piacere la f medesima sulla parte di tali n-ple in cui non è definita e usare poi il prolungamento per dare la definizione del trasformato. Indicato con g uno di tali prolungamenti, oltre che come nella definizione qui sopra, l'ente aleatorio $f(\mathbb{E}_1, \ldots, \mathbb{E}_n)$ è definito dunque anche dalla restrizione dell'applicazione aleatoria

$$g(\boldsymbol{x}(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n)) = g(\boldsymbol{x}_1(\omega_1), \ldots, \boldsymbol{x}_n(\omega_n))$$

di dominio $\mathbb{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathbb{P}_n$.

8.3.4 Aspetti dinamici della nozione di ente aleatorio.

La nozione di ente aleatorio è in accordo con la nostra impostazione aperta della descrizione dei problemi in condizioni di incertezza. Infatti la definizione di ente aleatorio è stata data in modo analogo a quella di evento (*Definizione* 2.2.2), anche se a un livello concettuale più elevato.

La nozione di evento è stata relativizzata a un linguaggio $\mathcal{L}$, in corrispondenza del quale gli eventi sono rappresentati dalle classi di equivalenza dell'insieme quoziente $\mathcal{L}_{|\alpha}$ – determinato dalla relazione di equivalenza $\vdash_{\alpha} (p \leftrightarrow q)$ –. In tale insieme, quando $\mathcal{L}$ è un linguaggio generato abbiamo introdotto le operazioni e relazioni logiche e, loro tramite, la fondamentale nozione di partizione che sta alla base della recente introduzione della nozione di applicazione aleatoria.

La nozione di ente aleatorio è stata relativizzata invece a un insieme di applicazioni aleatorie $\mathfrak{A}$, che si devono pensare definite su partizioni scelte in modo arbitrario in un qualche insieme di eventi $\mathcal{L}_{|\alpha}$ da chi studia il problema. Gli enti aleatori sono gli elementi dell'insieme quoziente $\mathfrak{A}_{r|\sim}$, determinato dalla relazione di equivalenza $\sim$ con riferimento alle restrizioni delle applicazioni di $\mathfrak{A}$ agli eventi elementari (*Definizione* 8.2.4)

Il significato relativo della nozione di evento ha posto problemi di evoluzione per incremento di descrizione, che sono stati risolti nel *Complemento* 2.2.3 (per le descrizioni con linguaggi qualsiasi) e in 3.3.2 *Complemento* (per le descrizioni con linguaggi generati). Problemi analoghi si pongono naturalmente anche per la nozione di ente aleatorio. Per rispondere alle esigenze di

schema aperto di descrizione dell'incertezza, deve essere data infatti la possibilità non solo di scegliere l'ambiente $\mathfrak{A}$ a piacere, ma anche di arricchirlo a piacere di nuove applicazioni aleatorie in vista di ottenere nuovi enti aleatori o nuove descrizioni degli esistenti, senza perdere ciò che si è descritto.
Per quanto riguarda l'aspetto descrittivo, per poter passare da un ambiente $\mathfrak{A}$ a un ambiente ampliato $\mathfrak{A}'$, occorre essere in grado di descrivere in sua corrispondenza i domini (partizioni) delle applicazioni aleatorie presenti in $\mathfrak{A}$ – descritti in un linguaggio $\mathfrak{L}$ – e quelli delle applicazioni che si intende aggiungere. Se questi ultimi sono già inclusi in $\mathfrak{L}_{|\alpha}$, allora la procedura di ampliamento si conclude con la specificazione degli elementi associati agli eventi elementari relativi alle nuove applicazioni. Altrimenti bisognerà considerare un ampliamento $\mathfrak{L}'$ di $\mathfrak{L}$ tale che $\mathfrak{L}'_{|\alpha}$ contenga i domini delle nuove applicazioni, in corrispondenza ai quali sarà possibile definirle. La generica applicazione $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{A}$ di dominio la partizione definita dalle proposizioni di $\mathcal{P} \subset \mathfrak{L}$ sarà poi rappresentata nell'ambiente ampliato $\mathfrak{A}'$ dall'applicazione $\boldsymbol{x}'$ di dominio $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathcal{P}\}$ che si ottiene ponendo $\boldsymbol{x}'(p_{|\alpha,\mathfrak{L}'}) = \boldsymbol{x}(p_{|\alpha,\mathfrak{L}})$ per ogni $p \in \mathcal{P}$ – riesce $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathcal{P}\}$ incluso nell'insieme $\{p_{|\alpha,\mathfrak{L}'} : p \in \mathfrak{L}\}$ che rappresenta $\mathfrak{L}_{|\alpha}$ in $\mathfrak{L}'_{|\alpha}$ (3.3.2 *Complemento*) –.

8.4 Numeri aleatori. Esempi.

I numeri aleatori sono particolari enti aleatori. Della loro nozione intuitiva ci siamo anzi serviti per avviare il discorso relativo agli enti aleatori nel § 8.1. La loro definizione rigorosa si ottiene semplicemente specificando che essi sono enti aleatori definiti da applicazioni aleatorie che hanno come codominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali – o un suo sottoinsieme se si preferisce delimitarlo meglio –. Quando si introducono insiemi di numeri aleatori, viene naturale pensare di eseguire con essi le operazioni aritmetiche e di considerare più in generale loro funzioni (a valori reali). Tutto ciò rientra naturalmente in quanto è stato detto in generale per i trasformati degli enti aleatori. È utile tuttavia approfondire l'argomento in questo caso particolare – che come abbiamo avuto modo di segnalare è fondamentale per lo sviluppo di ogni teoria delle probabilità – illustrandolo con qualche esempio.

8.4.1 Esempi.

1 Con riferimento ai numeri aleatori X e Y del § 8.1 – «punto realizzato lanciando un dado» e «numero di pezzi difettosi prodotti da una macchina», rispettivamente –, abbiamo considerato le partizioni $\{X=1, \dots, X=6\}$ e $\{Y=0, \dots, Y=n\}$. Per quanto convenuto in 8.2.4 *Nota e Terminologia* queste sono anche le rappresentazioni canoniche dei due numeri aleatori – si sottintende che a $X=i$ si associa i e lo stesso a $Y=i$ –. Indicato con D_i l'evento *l'i-esimo pezzo prodotto è difettoso,* abbiamo descritto il numero aleatorio Y anche con l'applicazione aleatoria $\boldsymbol{y}$ di dominio la partizione generata dall'insieme $\{D_1, \dots, D_n\}$, che associa al generico costituente $D_1' \wedge \dots \wedge D_n'$ il numero dei componenti D_i' affermati. Indicata con $\boldsymbol{y}$ questa applicazione e con $[D_1' \wedge \dots \wedge D_n']_h$ il generico costituente con h affermazioni, riesce $\vee \boldsymbol{y}^{-1}(h) = \vee^{(\cdot)}[D_1' \wedge \dots \wedge D_n']_h = (Y=h)$. Ciò prova che l'applicazione $\boldsymbol{y}$ descrive il numero aleatorio Y, perché la sua applicazione canonica associata (*Teorema* 8.2.3) è proprio la $\{Y=0, \dots, Y=n\}$ considerata sopra.

2 In una estrazione del lotto su una ruota, l'h-esimo estratto è un numero aleatorio X_h, la cui rappresentazione canonica si scrive $\mathbb{P}_h = \{X_h = 1, \dots, X_h = 90\}$, $h = 1, \dots, 5$. L'estrazione completa è un ente aleatorio (cinquina aleatoria) $(X_1, \dots, X_5)$ definito sulla partizione prodotto

$$\mathbb{P}_1 \wedge \dots \wedge \mathbb{P}_5 = \{X_1 = i_1 \wedge \dots \wedge X_5 = i_5 : 1 \le i_1, \dots, i_5 \le 90\}$$

dall'applicazione aleatoria iniettiva – e quindi canonica – che fa corrispondere al costituente $X_1 = i_1 \wedge \dots \wedge X_5 = i_5$ la cinquina – ordinata – $(i_1, \dots, i_5)$. In accordo con 8.2.4 *Nota e Terminologia*, mettendo in evidenza i valori dell'immagine (cinquine) possiamo anche scrivere (rappresentazione canonica):

$$\Omega = \{(X_1, \dots, X_5) = (i_1, \dots, i_5) : 1 \le i_1, \dots, i_5 \le 90\}$$

ove va ovviamente inteso che l'evento $(X_1, \dots, X_5) = (i_1, \dots, i_5)$ è impossibile se qualche numero della cinquina si ripete. Il codominio delle applicazioni che definiscono la cinquina aleatoria è $\mathbb{N}^5$ o un qualunque altro suo sottoinsieme includente la sua immagine, ovvero l'insieme delle disposizioni semplici di classe 5 dei primi novanta numeri naturali.
L'estrazione completa descritta in termini di cinquine non ordinate è l'ente aleatorio definito dalla restrizione su Ω^ϕ dell'applicazione di dominio Ω, che fa corrispondere al costituente $(X_1, \dots, X_5) = (i_1, \dots, i_5)$ l'insieme $\{i_1, \dots, i_5\}$, e che viene naturale indicare con $\{X_1, \dots, X_5\}$. L'applicazione che abbiamo usato per definire $\{X_1, \dots, X_5\}$ non è ovviamente

iniettiva – una cinquina non ordinata possibile è corrispondente di 5! eventi elementari di $\mathcal{P}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}_5$ –. La cinquina non ordinata $\{X_1, \ldots, X_5\}$ è espressa nella forma canonica in eventi elementari dalla:

$$\{\{X_1, \ldots, X_5\} = \{i_1, \ldots, i_5\} : 1 \leq i_1 < \ldots < i_5 \leq 90\}.$$

La sua immagine è costituita dagli $\binom{90}{5}$ sottoinsiemi di 5 elementi dei primi 90 numeri naturali.

Indicata con $\mathcal{Q}_i$ la partizione che descrive l'estrazione dell'i-esima ruota in cinquine ordinate, l'estrazione completa del lotto su 10 ruote viene definita in forma canonica sulla partizione $\mathcal{Q}_1 \wedge \ldots \wedge \mathcal{Q}_{10}$, la cui immagine – insieme dei corrispondenti degli eventi elementari – è costituita dalle *decine* ordinate delle *cinquine* ordinate dei primi 90 numeri naturali. Il dettaglio della formalizzazione è lasciato al lettore per esercizio.

3 Poiché le applicazioni aleatorie che definiscono un qualunque numero aleatorio X hanno come codominio $\mathbb{R}$, la loro partizione – e rappresentazione – canonica si può sempre scrivere nella forma $\{X = x : x \in \mathbb{R}\}$. Si tratta naturalmente di una rappresentazione *in costituenti*, solitamente solo in parte possibili: tutti e soli quelli per cui x è una determinazione possibile per X. Quando il numero aleatorio X è finito, si preferisce usualmente rappresentarlo in eventi elementari. Se i suoi valori possibili sono $x_1, \ldots, x_n$, allora la sua rappresentazione in eventi elementari è $\{X = x_1, \ldots, X = x_n\}$. Spesso si fa lo stesso anche con i numeri aleatori numerabili.

Negli esempi precedenti sono solo 6 i costituenti (e valori) possibili del punto realizzato lanciando un dado e n quelli del numero di pezzi difettosi prodotti da una macchina (*Esempio* 1); sono 90 invece quelli dell'h-esimo estratto su una data ruota dell'*Esempio* 2.
I valori possibili del tasso di umidità T di 5.3.5 *Esempio* 1 sono i numeri reali dell'intervallo $[0, 1]$. Allora, $\{T = t : 0 \leq t \leq 1\}$ è la rappresentazione canonica in eventi elementari di T. Quella di X, danno assicurato da Tizio per la sua villetta in 5.3.5 *Esempio* 2, è invece $\{X = x : 0 \leq x \leq 230\}$.
Se X è l'errore che si commette misurando una grandezza assegnata, sono possibili i numeri di un intorno dell'origine. Spesso – idealizzando il problema – si suppone che l'intorno sia l'insieme di tutti i numeri reali. In questa ipotesi i costituenti di $\{X = x : x \in \mathbb{R}\}$ sono tutti possibili e perciò $\{X = x : x \in \mathbb{R}\}$ è la rappresentazione canonica dell'errore in eventi elementari.

4 Se X è un numero aleatorio definito dall'applicazione $\boldsymbol{x}$ di dominio $\mathbb{P}$, ogni funzione di variabile reale f definita sull'immagine di X determina, mediante l'applicazione $f(\boldsymbol{x}(\cdot))$ di dominio la partizione $\mathbb{P}$, un numero aleatorio trasformato di X – è il caso più semplice di numero aleatorio trasformato di numeri aleatori –. In particolare merita aver presente che qualunque sia X, ha senso considerare il trasformato $aX+b$ per ogni coppia di numeri reali a, b, il quale è definito su $\mathbb{P}$ dall'applicazione che, a ogni $\omega \in \mathbb{P}$, fa corrispondere $a\boldsymbol{x}(\omega)+b$.

5 Si lanci due volte un dado. Indichiamo con X, Y i punti (numeri aleatori) realizzati nel primo e nel secondo lancio, rispettivamente, e consideriamo il «punto somma» $Z=X+Y$. I tre numeri aleatori X, Y, Z sono definiti in forma canonica sulle partizioni $\mathbb{P}_X = \{X=1, \dots, X=6\}$, $\mathbb{P}_Y = \{Y=1, \dots, Y=6\}$ e $\mathbb{P}_Z = \{Z=2, \dots, Z=12\}$, facendo corrispondere i a $X=i$ e $Y=i$, $i=1, \dots, 6$, e j a $Z=j$, $j=2, \dots, 12$. La rappresentazione canonica di Z può essere data se si pensa già eseguita la somma $X+Y$, ed è anche facile farlo intuitivamente. Formalmente però si tratta di sommare due numeri aleatori, e Z è il numero aleatorio trasformato della coppia (X, Y) mediante l'addizione. Indicate con $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ le rappresentazioni canoniche di X e Y, esso è definito dall'applicazione aleatoria $z(\cdot \wedge \cdot) = f(\boldsymbol{x}(\cdot), \boldsymbol{y}(\cdot)) = \boldsymbol{x}(\cdot) + \boldsymbol{y}(\cdot)$ di dominio la partizione prodotto $\mathbb{P}_X \wedge \mathbb{P}_Y = \{X=h \wedge Y=i : 1 \le h, i \le 6\}$. Allora si trova:

$$z((X=h) \wedge (Y=i)) = f(\boldsymbol{x}(X=h), \boldsymbol{y}(Y=i)) = \boldsymbol{x}(X=h) + \boldsymbol{y}(Y=i) = h+i$$

e ciò si riassume dicendo che il numero aleatorio $Z=X+Y$ è definito dall'applicazione che associa al costituente $(X=h) \wedge (Y=i)$ la somma $h+i$, la cui rappresentazione canonica è quella data all'inizio.

I numeri aleatori trasformati della coppia (X, Y) sono tutti quelli che si ottengono agendo come sopra con le funzioni reali di due variabili definite sull'immagine della coppia medesima, ovvero sull'insieme di coppie $\{(h, i) : 1 \le h, i \le 6\}$. In particolare si potrà considerare il prodotto $X \cdot Y$ – cosa che si può fare, come del resto la somma, per *ogni* coppia di numeri aleatori – e anche il rapporto X/Y o Y/X, visto che i valori possibili degli *attuali* X e Y sono *tutti* diversi da zero. Evitando il formalismo che abbiamo voluto dettagliare a titolo di esempio per la somma, basterà dire che il prodotto $X \cdot Y$ (rapporto X/Y o Y/X) è definito dall'applicazione di dominio $\mathbb{P}_X \wedge \mathbb{P}_Y$, che associa al costituente $(X=h) \wedge (Y=i)$ il prodotto $h \cdot i$ (rapporto h/i o i/h). L'indicazione della rappresentazione canonica di

questi tre trasformati non presenta difficoltà ed è lasciata all'iniziativa del lettore. È solo un po' più laborioso farlo rispetto a quella della somma.

Vale la pena di osservare ancora che in questo esempio i numeri aleatori X e Y sono *logicamente indipendenti*, perché i 6^2 costituenti della partizione prodotto delle loro partizioni canoniche sono tutti possibili. Non è così se X e Y sono il primo e secondo estratto su una ruota nel gioco del lotto, perché in tal caso sono impossibili 90 dei 90^2 costituenti della partizione prodotto delle loro partizioni canoniche: $(X=i)\wedge(Y=i)$, $i=1,\dots,90$.

8.4.2 Indicatori di evento

Dopo i numeri certi, i numeri aleatori più semplici sono gli indicatori di evento, per i quali si dà la seguente definizione.

Definizione. Indicatore di evento.

Dicesi ***indicatore*** *dell'evento* $\boldsymbol{E}$ *il numero aleatorio* $|\boldsymbol{E}|$ *che vale* 1 *se* E *è vero e* 0 *se* E *è falso. Si pone cioè:*

$$|E| = \begin{cases} 1 & se\ E\ è\ vero \\ 0 & se\ E\ è\ falso \end{cases}$$

In particolare riesce $|\Omega|=1$ *e* $|\phi|=0$.

Gli indicatori $|\Omega|$ e $|\phi|$ sono numeri certi e la loro rappresentazione canonica, come quella di ogni numero certo, è un'applicazione costante di dominio la partizione nulla $\{\Omega\}$ – volendo anche $\{\Omega,\phi\}$ – Nei nostri due casi specifici le applicazioni costanti sono 1 e 0.
Se E è possibile, l'indicatore di E è definito in forma canonica dall'applicazione di dominio $\{E,\bar{E}\}$ che fa corrispondere nell'ordine 1 e 0 agli eventi elementari E e $\bar{E}$. L'indicatore della negazione di E, $|\bar{E}|$, è definito sulla medesima partizione, e vale 1 se E è falso e 0 se E è vero. Su tale partizione è allora definita anche la somma $|E|+|\bar{E}|$ e riesce $|E|+|\bar{E}|=1$ (numero certo). Oppure, volendo mettere in evidenza il comportamento dell'indicatore della negazione rispetto a quello dell'evento corrispondente, si può scrivere $|\bar{E}|=1-|E|$. Sulla partizione $\{E,\bar{E}\}$ sono definiti tutti i trasformati di $|E|$, ovvero i numeri aleatori che si ottengono come trasformati delle funzioni di $|E|$ definite sull'insieme $\{0,1\}$ (immagine degli indicatori di eventi possibili). Ad esempio, sono definite le potenze $|E|^{\alpha}$ con α reale positivo – e riesce

$/E/^{\alpha} = /E/$, come subito si verifica –. Non sono definite le potenze $/E/^{\alpha}$ con α negativo o nullo. Porremo comunque – per definizione – $/E/^{0} = 1$.

I numeri aleatori trasformati di n indicatori $/E_1/, \ldots, /E_n/$ sono definiti da applicazioni aleatorie di dominio la partizione generata $\mathbb{P}_G(E_1, \ldots, E_n) = \{E_1, \bar{E}_1\} \wedge \ldots \wedge \{E_n, \bar{E}_n\}$. Come sempre, occorre naturalmente che la funzione che opera la trasformazione sia definita sull'immagine della l'n-pla aleatoria $(/E_1/, \ldots, /E_n/)$. In assenza di ipotesi che dichiarino qualche condizione di logica dipendenza per gli n eventi, l'immagine è l'insieme delle sequenze di n elementi 0, 1 – le disposizioni con ripetizione dei numeri 0, 1 di classe n –. Ad esempio, per eseguire la somma e il prodotto di $/E_1/$ e $/E_2/$ – anche la loro differenza, ma *non* il loro quoziente! –, si introduce la partizione $\mathbb{P}_G(E_1, E_2)$, i cui costituenti sono riportati nella prima riga della tabella qui sotto. Le altre righe della stessa riportano invece: in corrispondenza della prima colonna quattro indicatori di evento e tre loro operazioni; a seguire, sotto ciascuno dei costituenti nominati, i rispettivi valori associati. Nella tabella si legge:

	$E_1 \wedge E_2$	$E_1 \wedge \bar{E}_2$	$\bar{E}_1 \wedge E_2$	$\bar{E}_1 \wedge \bar{E}_2$
$/E_1/$	1	1	0	0
$/E_2/$	1	0	1	0
$/E_1 \wedge E_2/$	1	0	0	0
$/E_1/\,/E_2/$	1	0	0	0
$/E_1 \vee E_2/$	1	1	1	0
$/E_1/+/E_2/$	2	1	1	0
$/E_1 \vee E_2/+/E_1 \wedge E_2/$	2	1	1	0

(i) La terza e quarta riga sono uguali ed esse dicono perciò che l'indicatore del *prodotto logico* di due eventi è uguale al *prodotto aritmetico* dei loro indicatori. In simboli: $/E_1 \wedge E_2/ = /E_1/\,/E_2/$.

(ii) L'indicatore della *somma logica* di due eventi *non è* uguale alla *somma aritmetica* dei loro indicatori. La due ultime righe dicono però che sussiste la $/E_1/+/E_2/ = /E_1 \vee E_2/+/E_1 \wedge E_2/$. Da questa e dalla (i), per l'indicatore della somma logica si trova: $/E_1 \vee E_2/ = /E_1/ + /E_2/ - /E_1/\,/E_2/$.

Nel prossimo *Teorema* sono elencate le proprietà sin qui provate. Quelle del prodotto e somma logici in forma generalizzata a n eventi, ciascuna seguita nell'elenco da una loro formulazione particolare.

Teorema. Proprietà degli indicatori.

Siano $E, E_1, \dots, E_n$ eventi. Si ha:

a) $|\Omega| = 1, \quad |\phi| = 0$

b) $|E|^{\alpha} = |E|$, α reale positivo

c) $|\bar{E}| = 1 - |E|$

d) $|E_1 \wedge \dots \wedge E_n| = |E_1| \dots |E_n|$

e) $|E_1 \wedge \dots \wedge E_n| = 0$ *se e solo se gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono incompatibili*

f) $$|E_1 \vee \dots \vee E_n| = \sum_{i=1}^{n} |E_i| - \sum_{i<j}^{1,n} |E_i||E_j| + \sum_{i<j<h}^{1,n} |E_i||E_j||E_h| - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n+1} |E_1| \dots |E_n|$$

g) $|E_1 \vee \dots \vee E_n| = |E_1| + \dots + |E_n|$ *se e solo se gli eventi $E_1, \dots, E_n$ sono a due a due incompatibili*

Dimostrazione.

Prova della d).
È stata provata per $n = 2$. Segue subito per induzione sfruttando la proprietà associativa del prodotto logico.

Prova della e).
Facile conseguenza della *a)*: $|E_1 \wedge \dots \wedge E_n| = |\phi| = 0$.

Prova della f).
Come la *d)*, anche questa è stata provata per $n = 2$ e segue per induzione. Lasciamo al lettore il compito di provarla per questa via.
Noi preferiamo indicare una via alternativa, che può essere utile avere presente. Sfruttando la *c)*, la formula di De Morgan, la *d)* e ancora la *c)*, si ha:

$$\begin{aligned} |E_1 \vee \dots \vee E_n| = \; & 1 - |\neg(E_1 \vee \dots \vee E_n)| = 1 - |\bar{E}_1 \wedge \dots \wedge \bar{E}_n| = \\ & 1 - |\bar{E}_1| \dots |\bar{E}_n| = 1 - (1 - |E_1|) \dots (1 - |E_n|). \end{aligned}$$

Sviluppando il prodotto dell'ultimo membro, con semplice calcolo algebrico si arriva alla conclusione.

Prova della g).
Siano $E_1, \dots, E_n$ a due a due incompatibili. Allora lo sono anche a k a k, $k = 3, \dots, n$. Ciò premesso, scriviamo nelle sommatorie a secondo membro della *f)* (meno la prima) al posto del prodotto degli indicatori, l'indicatore del prodotto logico (usando la *d)*). Per quanto appena osservato, ogni prodotto

logico è impossibile e quindi è 0 il suo indicatore. È allora nullo il contributo complessivo delle sommatorie, dalla seconda in poi. Segue la sufficienza di quanto asserito.
Viceversa, sia ora $/E_1 \vee \ldots \vee E_n/ = /E_1/ + \ldots + /E_n/$. Il primo membro di questa uguaglianza può essere solo 0 o 1 e, in sua corrispondenza, tale deve allora essere anche il secondo. Pertanto, uno al più degli eventi $E_1, \ldots, E_n$ può essere vero e perciò essi sono a due a due incompatibili. ■

ESEMPI. *Uso degli indicatori.*

1 *Numeri aleatori semplici e numerabili.*

Facendo combinazioni lineari di un numero finito di indicatori si ottengono numeri aleatori finiti (con un numero finito di determinazioni), che chiameremo anche **numeri aleatori semplici**. È vero anche il viceversa, ovvero che ogni numero aleatorio semplice può essere scritto come combinazione lineare di indicatori. Il risultato vale anzi più in generale per i numeri aleatori definiti da applicazioni di dominio partizioni numerabili – e perciò con un numero di determinazioni finito o numerabile –. Infatti, se il numero aleatorio X è definito sulla partizione $\mathcal{P} = \{\omega_1, \ldots, \omega_s, \ldots\}$ dall'applicazione $\boldsymbol{x}$, riesce

$$X = \boldsymbol{x}(\omega_1)/\omega_1/ + \ldots + \boldsymbol{x}(\omega_s)/\omega_s/ + \ldots, \tag{17}$$

ove la somma a secondo membro ha in realtà al più un solo addendo diverso da 0, quello corrispondente al solo indicatore $/\omega_s/$ che vale 1. L'uguaglianza (17) si giustifica osservando che tale somma è un'applicazione definita sulla partizione $\mathcal{P}$ come la $\boldsymbol{x}$, che entrambe le applicazioni associano all'evento elementare ω_s il valore $\boldsymbol{x}(\omega_s)$ e che sono perciò la stessa applicazione aleatoria. ■

In particolare, se le determinazioni di X sono $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ la sua rappresentazione canonica scritta nella forma (17) diventa:

$$X = x_1/X = x_1/ + \ldots + x_n/X = x_n/ + \ldots .$$

2 *Numero di successi.*

In relazione a una partita a testa e croce, posto E_h = *esce testa all'h-esimo lancio,* in più occasioni abbiamo chiamato *successo* il verificarsi di E_h (l'uscita di testa). Seguendo la consuetudine, useremo questa terminologia in generale. Precisamente:

Data una sequenza o una successione (E_n) di eventi che descrive l'evoluzione di un fenomeno, diremo ***successo*** *al colpo h il verificarsi di E_h.*

Ciò premesso, indichiamo con S_n il numero di successi nei primi n colpi. Un modo utile e molto naturale di rappresentare S_n è di esprimerlo come somma di indicatori. Riesce infatti:

$$S_n = /E_1/ + \ldots + /E_n/.$$

Il risultato è estremamente intuitivo. La somma a secondo membro appare come un "contatore" di successi: al colpo i il "contatore" incrementa di 1 il valore al momento registrato se E_i è vero, non lo modifica – lo incrementa di 0 – se E_i è falso.
Per una giustificazione formale, osserviamo che l'insieme di definizione della somma degli indicatori è la partizione generata $\mathcal{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\}) = \{E_1, \bar{E}_1\} \wedge \ldots \wedge \{E_n, \bar{E}_n\}$ e che il costituente $E_1' \wedge \ldots \wedge E_n'$ associa al generico addendo $/E_i/$ valore 1 se $E_i' = E_i$ e valore 0 se $E_i' = \bar{E}_i$, attribuendo così a S_n valore pari al numero degli eventi affermati nella sequenza $E_1', \ldots, E_n'$, ovvero il numero dei successi.

3 *Guadagno di una scommessa.*

Nel mondo delle scommesse gli allibratori *offrono quote* in corrispondenza ad avvenimenti futuri di interesse pubblico per renderli oggetto di scommessa. Indicato con E l'evento che descrive uno di questi avvenimenti, per **offerta q per E** di un allibratore si intende che, in cambio della puntata *unitaria* (di 1 euro), egli si impegna a pagare q euro ($q > 1$) se E si verifica. In altri termini, la puntata *certa* 1 dà diritto alla vincita *aleatoria* $q/E/$. Il guadagno aleatorio di un giocatore che punta un euro su E è allora $q/E/ - 1$. Vale inoltre la regola proporzionale: chi punta l'importo s – scelto entro limiti imposti dall'allibratore – acquisisce il diritto di ricevere $s(q/E/)$, e quindi guadagna $s(q/E/ - 1)$.
Nell'ipotesi che l'allibratore offra nell'ordine $q_1, \ldots, q_n$ per gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ e che un giocatore punti su di essi gli importi $s_1, \ldots, s_n$, il suo guadagno diventa $G = \sum_{i=1}^{n} s_i(q_i/E_i/ - 1)$. Come nell'esempio precedente il dominio di G (dell'applicazione che lo definisce) è $\mathcal{P}_G(\{E_1, \ldots, E_n\})$.

Per qualche breve approfondimento di questo argomento rimandiamo al § 9.1 del prossimo capitolo, con il quale diamo inizio allo studio del problema della valutazione dell'incertezza secondo l'impostazione di de Finetti che, come abbiamo avuto già occasione di segnalare più volte, nella

definizione di probabilità coerente si ispira a un modello idealizzato del mondo della scommesse.

4 *Impegno dell'assicuratore in assicurazione contro i danni.*

Un contratto di assicurazione (polizza) contro i danni – causati da furto, incendio, responsabilità civile, ecc. – prevede il risarcimento del danno nella misura pattuita – risarcimento totale, con franchigia e/o massimale –, tutte le volte che si verifica un sinistro durante un periodo di tempo dichiarato in polizza. L'impegno dell'assicuratore dipende allora dal numero aleatorio di denuncie di sinistro N e dai risarcimenti aleatori $Y_1, Y_2, \dots, Y_n, \dots$ per il primo, il secondo, ... , l'n-esimo sinistro, ... Può essere naturalmente $N=0$, e allora l'assicuratore non deve alcun risarcimento; altrimenti, se $N=n$ egli dovrà risarcire un importo (aleatorio) pari a $Y_1+\dots+Y_n$. Indicato con X il risarcimento globale, allora si ha:

$$X = \begin{cases} 0 & \text{se } N=0 \\ Y_1+\dots+Y_n & \text{se } N=n \end{cases}$$

Anche se nei rami che sono oggetto di assicurazione il numero di sinistri che colpiscono un contratto è solitamente contenuto, spesso si idealizza il problema non ponendo limiti al numero di sinistri che possono essere denunciati – si adegua poi il modello alla realtà assegnando probabilità trascurabili alla collettività dei valori non attendibili –. Un modo semplice di descrivere X si ottiene osservando che esso può essere visto come un'applicazione di dominio la partizione $\{N=0, \dots, N=n, \dots\}$ a valori *numeri aleatori*. Estendendo la rappresentazione (17) dell'*Esempio* 1 – ivi scritta per applicazioni a valori reali – si ottiene:

$$X = /N=1/\cdot Y_1 + /N=2/\cdot(Y_1+Y_2) + \dots + /N=n/\cdot(Y_1+\dots+Y_n) + \dots .$$

Questa rappresentazione di X suggerisce di usare per la sua descrizione un'applicazione di dominio la partizione prodotto delle partizioni scelte per descrivere N e gli Y_i. Se questi numeri aleatori sono descritti in forma canonica, le partizioni sono $\mathbb{P}_N = \{N=n : n \in \mathbb{N}_0\}$ e $\mathbb{P}_i = \{Y_i = y : 0 \le y \le M\}$, $i \in \mathbb{N}$, con $M=+\infty$ se il risarcimento per singolo sinistro è illimitato. Il generico costituente della partizione prodotto $\mathbb{P}_N \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_i$ si scrive allora $(N=n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (Y_i = y_i)$. Per significato del problema, il danno dell'i-esimo sinistro è nullo per ogni $i>n$. I costituenti possibili di tale partizione sono allora $(N=0) \wedge \bigwedge_{i=1}^{\infty} (Y_i = 0) = (N=0)$ e $(N=n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (Y_i = y_i) \wedge \bigwedge_{i=n+1}^{\infty} (Y_i = 0) = (N=n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (Y_i = y_i)$ per $i \in \mathbb{N}$. Il numero aleatorio X è allora definito dall'applicazione di dominio

$$\{N=0\} \cup \{(N=n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (Y_i=y_i) : n \in \mathbb{N},\ 0 \le y_i \le M\},$$

che associa 0 al costituente $N=0$ e $y_1+\ldots+y_n$ al costituente generico $(N=n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (Y_i=y_i)$ del secondo insieme.

8.4.3 Complemento. *Partizione e algebra generate dalla famiglia di eventi* $(X_1 \le x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \le x_n)_{x_1,\ldots x_n \in \mathbb{R}}$.

Studieremo l'argomento prima nel caso particolare $(X \le x)_{x \in \mathbb{R}}$ e poi in quello generale. Sotto convenienti ipotesi, la conoscenza della probabilità degli eventi della famiglia $(X \le x)_{x \in \mathbb{R}}$ consente di effettuare la valutazione del numero aleatorio X (§ 18.2, Vol. II), e quella degli eventi della famiglia $(X_1 \le x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \le x_n)_{x_1,\ldots x_n \in \mathbb{R}}$ di farlo per convenienti numeri aleatori trasformati di $(X_1, \ldots, X_n)$ (§ 18.3, Vol. II). Da qui nasce l'interesse di conoscere le loro algebre generate e le loro partizioni generate. Le prime perché saranno utilizzate per lo studio delle valutazioni ammissibili (coerenti) per gli eventi della famiglia $(X \le x)_{x \in \mathbb{R}}$ (*Teorema* 11.1.2, ponendo ivi $E_x = (X \le x)$ e $I = \mathbb{R}$) e per quelli della famiglia $(X_1 \le x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \le x_n)_{x_1,\ldots x_n \in \mathbb{R}}$ (*Teorema* 11.2.2, ponendo ivi $E_{x_h}^{(h)} = (X \le x_h)$ e $I_h = \mathbb{R}$), le seconde perché i loro eventi logicamente dipendenti rappresentano il limite di descrivibilità dell'incertezza mediante gli eventi di tali famiglie (*Teorema* 6.3.2).

1 *Algebra generata da* $(X \le x)_{x \in \mathbb{R}}$.

È un caso particolare dell'algebra generata dalla famiglia monotona non-decrescente $(E_x)_{x \in I}$ studiata in 7.5 *Esempio* 9. Si tratta di porre ivi $E_x = (X \le x)$ e $I = \mathbb{R}$. Si trova allora che gli eventi dell'algebra generata da $(X \le x)_{x \in \mathbb{R}}$ sono la totalità delle somme logiche *finite* di eventi «base» del tipo $X \le x$, $X > x$, $x < X \le y$, $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, e sono rappresentabili – generalmente non in modo unico – come somma di eventi base a due a due incompatibili. Gli eventi base si prestano qui a una naturale rappresentazione geometrica sulla retta mediante intervalli aperti a sinistra, illimitati

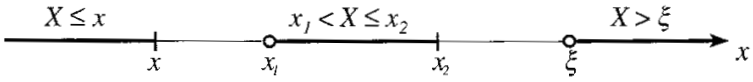

Figura 12 – Costituenti di $\mathcal{P}_G(\{X \le x : x \in \mathbb{R}\})$.

quelli dei primi due tipi (*Fig. 12*). Con riferimento a questa rappresentazione geometrica viene naturale chiamare *intervalli* gli eventi base $X \le x$, $X > x$, $x_1 < X \le x_2$, come d'ora in poi faremo, e *plurintervalli (finiti)* gli eventi dell'algebra generata dall'insieme $\{X \le x : x \in \mathbb{R}\}$ – dalla famiglia

$(X \le x)_{x \in \mathbb{R}}$ –, quando sono rappresentati come somma di un numero finito di intervalli a due a due incompatibili. In accordo con questa terminologia, daremo il nome di intervalli anche agli eventi $X<x$, $X \ge x$, $x_1 \le X \le x_2$, $x_1 < X < x_2$, $x_1 \le X < x_2$, che però *non appartengono* – si badi bene! – all'algebra generata da $\{X \le x : x \in \mathbb{R}\}$.

2 *Algebra generata da* $(X_1 \le x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \le x_n)_{x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}}$.

Per semplicità di notazione, ci limitiamo a considerare il caso di due eventi. L'algebra generata dall'insieme $\{X \le x \wedge Y \le y : x, y \in \mathbb{R}\}$ è caso particolare di quella generata dall'insieme $\{A_x \wedge B_y : x \in I \text{ e } y \in J\}$ e determinata in 7.5 *Esempio* 10, essendo $(A_x)_{x \in I}$ e $(B_y)_{y \in J}$ famiglie monotone non-decrescenti. Posto $A_x = (X \le x)$ e $B_y = (Y \le y)$, Si trova allora che gli eventi dell'algebra generata da $\{X \le x \wedge Y \le y : x, y \in \mathbb{R}\}$ sono la totalità delle somme logiche *finite* di eventi «base» del tipo:

$$X \le x \wedge Y \le y, \quad X > x \vee Y > y,$$
$$(x < X \le \xi) \wedge (Y \le y), \quad (X \le x) \wedge (y < Y \le \eta),$$
$$(x < X \le \xi) \wedge (y < Y \le \eta), \quad x, \xi, y, \eta \in \mathbb{R}, x < \xi \text{ e } y < \eta,$$

e come nel caso unidimensionale sono rappresentabili – generalmente non in modo unico – come somma di eventi base a due a due incompatibili. Per una rappresentazione geometrica si veda la *Fig. 13*. Sono ivi raffigurati i sette costituenti – pensati tutti possibili – della partizione generata dall'insieme $\{X \le x_1, X \le x_2, X \le x_3\} \wedge \{Y \le y_1, Y \le y_2\}$. I lati tratteggiati segnalano la loro appartenenza al rettangolo – limitato o illimitato – contenente il tratteggio.

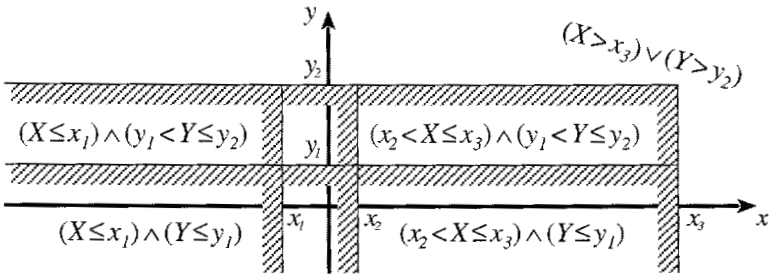

Figura 13 – Costituenti di $\mathcal{P}_G(\{X \le x_1, X \le x_2, X \le x_3\} \wedge \{Y \le y_1, Y \le y_2\})$.

È facile rendersi conto a questo punto – per analogia o ricavandolo come caso particolare da 7.5 *Esempio* 11 – che gli eventi dell'algebra generata

dalla famiglia $(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)_{x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}}$ sono somme logiche di eventi del tipo $(X_1 > x_1 \vee \ldots \vee X_n > x_n)$ e $(\xi_1 < X_1 \leq x_1) \wedge \ldots \wedge (\xi_n < X_n \leq x_n)$, con $\xi_1, \ldots, \xi_n$ possibilmente $-\infty$, cioè di costituenti delle partizioni generate da insiemi finiti di eventi della famiglia. In accordo con la terminologia introdotta nell'esempio precedente per il caso unidimensionale, daremo il nome di intervalli a detti costituenti e di plurintervalli alle loro somme logiche finite. Daremo lo stesso nome anche agli eventi che da essi si ottengono sostituendo parte dei simboli $<$ ($>$) – anche tutti – con $\leq$ ($\geq$) o viceversa.

3 *Partizione generata da* $(X \leq x)_{x \in \mathbb{R}}$.

La partizione generata dalla famiglia $(X \leq x)_{x \in \mathbb{R}}$ – ovvero dall'insieme $\{X \leq x : x \in \mathbb{R}\}$ – è $\mathcal{P} = \{X = x : x \in \mathbb{R}\}$. Lo si prova usando il *Teorema* 6.3.4, in forza del quale si tratta di mostrare che l'insieme di eventi $\{X \leq x : x \in \mathbb{R}\}$ è incluso in $\mathcal{A}_L(\mathcal{P})$ e che il generico costituente $X = x$ di $\mathcal{P}$ è un evento composto con eventi dell'insieme $\{X \leq x : x \in \mathbb{R}\}$. La prima condizione segue subito dalla $(X \leq x) = \bigvee_{\xi \leq x} (X = \xi)$, che vale per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Per provare che sussiste anche la seconda osserviamo che riesce $(X = x) = (X \leq x) \wedge (X \geq x)$, con $(X \leq x) \in \{X \leq x : x \in \mathbb{R}\}$. Per ottenere l'asserto è sufficiente allora dimostrare che $(X \geq x)$ è un evento composto con eventi di $\{X \leq x : x \in \mathbb{R}\}$. Infatti, poiché $(X \geq x) \Rightarrow (X > \xi)$ per ogni $\xi < x$, si ha $(X \geq x) \Rightarrow \bigwedge_{\xi < x} (X > \xi)$ (3.3.2*l*); viceversa, $\bigwedge_{\xi < x} (X > \xi) \Rightarrow (X \geq x)$, perché se X supera ξ per ogni $\xi < x$, allora riesce $X \geq sup_{\xi < x}\, \xi = x$. Pertanto si ha $(X \geq x) = \bigwedge_{\xi < x} (X > \xi) = \bigwedge_{\xi < x} \neg (X \leq \xi)$ e ciò mostra che $X \geq x$ è un evento composto con eventi di $\{X \leq x : x \in \mathbb{R}\}$, come appunto volevasi. Ciò completa la prova. ■

4 *Partizione generata da* $(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)_{x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}}$.

La partizione generata dalla famiglia $(X_1 \leq x_1 \wedge \ldots \wedge X_n \leq x_n)_{x_1, \ldots x_n \in \mathbb{R}}$ è $\mathcal{P} = \{X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. La prova si ottiene usando ancora il *Teorema* 6.3.4, adattando la dimostrazione data nell'esempio precedente per la famiglia «unidimensionale» $(X \leq x)_{x \in \mathbb{R}}$.
Per semplicità vedremo anche qui in dettaglio solo il caso $n = 2$. Proviamo allora che la partizione generata dall'insieme $\{X \leq x \wedge Y \leq y : x, y \in \mathbb{R}\}$ è $\mathcal{P} = \{X = x \wedge Y = y : x, y \in \mathbb{R}\}$. Cominciamo per questo con l'osservare che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, riesce:

$$(X \leq x \wedge Y \leq y) = \bigvee_{\xi \leq x} (X = \xi) \wedge \bigvee_{\eta \leq y} (Y = \eta) =$$

$$\bigvee_{\xi\le x}\bigvee_{\eta\le y}(X=\xi\wedge Y=\eta)\in\mathcal{A}_L(\{X=x\wedge Y=y : x,y\in\mathbb{R}\}).$$

Ciò prova che sussiste la prima condizione del teorema citato.
In vista di provare che sussiste anche la seconda condizione cominciamo col far vedere intanto che $X\le x$ e $Y\le y$ sono eventi composti con eventi della famiglia $\{X\le x\wedge Y\le y : x,y\in\mathbb{R}\}$. Basta farlo ovviamente per uno dei due. Ad esempio, $(X\le x)=\bigvee_{y\in\mathbb{R}}(X\le x\wedge Y\le y)$, come segue da:

$$(X\le x)=(X\le x)\wedge\Omega=(X\le x)\wedge\bigvee_{y\in\mathbb{R}}(Y\le y)=\bigvee_{y\in\mathbb{R}}(X\le x\wedge Y\le y).$$

Osserviamo poi che $(X=x)=(X\le x)\wedge\bigwedge_{\xi<x}\neg(X\le\xi)$ – come visto nell'esempio precedente – e che analoga espressione vale anche $Y=y$. Pertanto si ha

$$(X=x\wedge Y=y)=(X\le x\wedge Y\le y)\wedge\left(\bigwedge_{\xi<x}\neg(X\le\xi)\right)\wedge\left(\bigwedge_{\eta<y}\neg(Y\le\eta)\right).$$

Ciò mostra che i costituenti della partizione $\{X=x\wedge Y=y : x,y\in\mathbb{R}\}$ sono eventi composti con gli eventi della famiglia $\{X\le x\wedge Y\le y : x,y\in\mathbb{R}\}$, essendo tali tutti gli eventi $\neg(X\le\xi)$ e $\neg(Y\le\eta)$, in quanto negazioni di eventi composti con eventi della famiglia medesima, e naturalmente $X\le x\wedge Y\le y$. Resta con ciò provato che sussiste anche la seconda condizione del *Teorema* 6.3.4 e quindi l'asserto. ■